ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
(A) Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού k για την οποία το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ έχει ρίζα τον αριθμό 2. Στη συνέχεια, για την τιμή του k που θα βρείτε, να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές.
(B) Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν την εξίσωση $2a + b + \frac{4}{ab} = 10$, να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του a.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του, τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^0,\ \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 50^0,\ \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 55^0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 80^0$
(β) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Πρόβλημα 3
Στον πίνακα γράφουμε σε μία σειρά n αριθμούς, $n \geq 40$, όπου καθένας από αυτούς ισούται με 1 ή -1, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω συνθήκες:
(i) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 40 διαδοχικών αριθμών είναι ίσο με 0.
(ii) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 42 διαδοχικών αριθμών δεν είναι ίσο με 0.
Ονομάζουμε Σ_n το μέγιστο δυνατό άθροισμα των n αριθμών του πίνακα. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του Σ_n για τις διάφορες τιμές του n.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη μηδενικών ακεραίων (x, y) που είναι τέτοιοι, ώστε ο ακέραιος $x^2 + y^2$ να είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων $x^5 + y$ και $y^5 + x$.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022
Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$. Στο ευθύγραμμο τμήμα BC θεωρούμε τα σημεία D, E ώστε $BD = BA$ και $CE = CA$. Αν K είναι το περίκεντρο του τριγώνου ADE, F είναι η τομή των ευθειών AD, KC και G είναι η τομή των ευθειών AE, KB, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KDE, έστω c_1, ο κύκλος με κέντρο το σημείο F και ακτίνα FE, έστω c_2, και ο κύκλος με κέντρο το σημείο G και ακτίνα GD, έστω c_3, περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία AK.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ένας θετικός ακέραιος $n > 4$, που διαιρείται από τον αριθμό 4. Συμβολίζουμε με A_n το άθροισμα όλων των θετικών περιττών διαιρετών του n. Συμβολίζουμε με B_n το άθροισμα όλων των θετικών άρτιων διαιρετών του n, εξαιρουμένου του n. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $f(n) = B_n - 2A_n$, για τις διάφορες τιμές του n. Για ποιους θετικούς ακεραίους n επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή;

Πρόβλημα 3
Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ικανοποιούν την ισότητα

$$\alpha + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} = 18.$$

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α.

Πρόβλημα 4
Έστω Q_n το σύνολο των n-άδων $x = (x_1, \dots, x_n)$ με $x_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Μία τριάδα (x, y, z), όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, διακεκριμένων στοιχείων του Q_n λέγεται *καλή,* αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα συνόλων: $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0,1,2\}$. Ένα υποσύνολο A του Q_n λέγεται *καλό*, αν οποιαδήποτε τρία στοιχεία του A σχηματίζουν μια *καλή* τριάδα. Να αποδείξετε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_n έχει το πολύ $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ στοιχεία.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Οι λύσεις των θεμάτων των μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού k για την οποία το πολυώνυμο $P(x)=x^3-kx+2$ έχει ρίζα τον αριθμό 2. Στη συνέχεια για την τιμή του k που θα βρείτε να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-kx+2$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές.

(b) Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν την εξίσωση $2a+b+\frac{4}{ab}=10$, να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του a.

Λύση

(A) Για να είναι ο 2 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)=x^3-kx+2$, πρέπει και αρκεί

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3-2k+2=0 \Leftrightarrow k=5.$$

Για $k=5$ παίρνουμε:

$$P(x)=x^3-5x+2=x^3-4x-x+2$$
$$=x(x-2)(x+2)-(x-2)=(x-2)(x^2+2x-1).$$

(B) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε:

$$b+\frac{4}{ab}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{4}{ab}}=\frac{4}{\sqrt{a}}$$

Επομένως, $2a+\frac{4}{\sqrt{a}}\leq 10$. Θέτοντας $\sqrt{a}=x$, παίρνουμε $x^2+\frac{2}{x}\leq 5 \Leftrightarrow x^3-5x+2\leq 0$. Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα έχουμε $(x-2)(x^2+2x-1)\leq 0$. Η τελευταία δεν ισχύει για $x>2$, άρα $x\leq 2$, οπότε $a\leq 4$. Πράγματι, η τιμή 4 είναι η μέγιστη τιμή, αφού για $a=4$, παίρνουμε $b=1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

2ος τρόπος

Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε

$$2a+b+\frac{4}{ab}=\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\cdots+\frac{a}{4}+b+\frac{4}{ab}\geq 10\sqrt[10]{\frac{a^8}{4^8}\cdot b\cdot\frac{4}{ab}}$$

Επομένως $\sqrt[10]{\frac{a^8}{4^8}\cdot b\cdot\frac{4}{ab}}\leq 1$, άρα $a^7\leq 4^7$, άρα $a\leq 4$.

Πράγματι, η τιμή 4 είναι η μέγιστη τιμή, αφού για $a=4$, παίρνουμε $b=1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

3ος τρόπος: Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $ab^2+(2a^2-10a)b+4=0.$ (1)
Για να έχει λύσεις η τελευταία, πρέπει η διακρίνουσα να είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2(2a-10)^2-16a\geq 0 \Leftrightarrow a(a-5)^2-4\geq 0 \Leftrightarrow a^3-10a^2+25a-4\geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3-4a^2-6a^2+25a-4\geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-4)-(6a-1)(a-4)\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(a-4)(a^2-6a+1)\geq 0.$$

Η τελευταία αληθεύει για $3-2\sqrt{2}\leq a\leq 4$ ή $a\geq 3+2\sqrt{2}$.
Αν $a\geq 3+2\sqrt{2}$, τότε η (1) δεν μπορεί να ισχύει, αφού

$$ab^2>0,\ (2a^2-10a)b>0, \text{οπότε } ab^2+(2a^2-10a)b+4>4.$$

Επομένως $3-2\sqrt{2}\leq a\leq 4$. Άρα η μέγιστη τιμή του a είναι 4, αφού για για $a=4$, παίρνουμε $b=1$, δηλαδή, υπάρχουν, a,b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma=30^0,\ \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=50^0,\ \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}=55^0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=80^0$

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Λύση (1ος τρόπος)

(α) Πρώτα διαπιστώνουμε ότι

$$\hat{\mathrm{B}}=\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}+\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma=50^0+30^0=80^0.$$

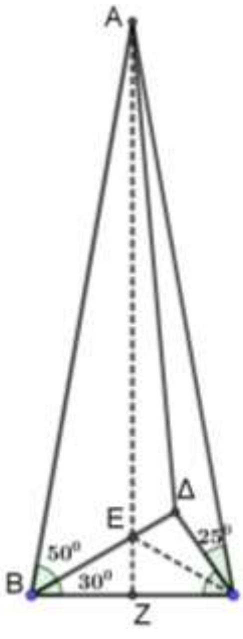
Αν ήταν $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=80^0$, τότε θα είχαμε

$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=80^0+80^0+\hat{\Gamma}>160^0+55^0=215^0,$$

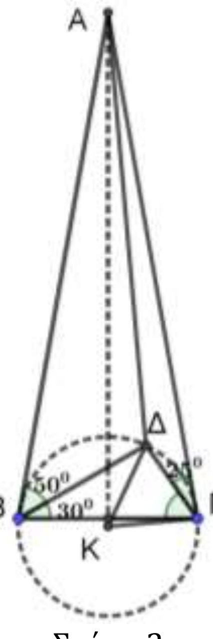
που είναι άτοπο.

Αν ήταν $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^0-80^0}{2}=50^0$, τότε $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta=55^0<\hat{\Gamma}=50^0$, άτοπο.

Επομένως έχουμε $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=80^0$ και $\hat{\mathrm{A}}=20^0$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

(β) Επειδή $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=80^0$, έχουμε:

$$\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A}=80^0-55^0=25^0 \qquad (1)$$

Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, που επιπλέον είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ, και υποθέτουμε ότι τέμνει την ευθεία ΒΔ σε σημείο Ε, σχήμα 1.

Επειδή στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta<\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$, έπεται ότι $\Delta\Gamma<\Delta\mathrm{B}$, οπότε το Δ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο ακμής ΑΖ που περιέχει το σημείο Γ. Έτσι το Ε βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ.

Επειδή το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με ΕΒ = ΕΓ, έπεται ότι $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=30^0$, οπότε

$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=55^0-30^0=25^0\overset{(1)}{=}\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A}. \qquad (2)$$

Από τη σχέση (2) έπεται ότι η ευθεία ΓΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ του τριγώνου ΑΕΓ.
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι γωνίες $\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ και $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ είναι εξωτερικές στα τρίγωνα ΕΒΓ και ΕΒΑ, αντίστοιχα, οπότε έχουμε:

$$\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 30^0 + 30^0 = 60^0 \quad \text{και} \quad \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} = 50^0 + 10^0 = 60^0 .$$

Άρα είναι $\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = 60^0$, οπότε η ευθεία ΕΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ του τριγώνου ΑΕΓ. Επομένως, το σημείο Δ είναι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΕΓ, οπότε

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma}{2} = \frac{10^0}{2} = 5^0.$$

2ος τρόπος (β) Θεωρούμε το περίκεντρο Κ του τριγώνου ΒΔΓ, σχήμα 2, το οποίο βρίσκεται στη μεσοκάθετη της ΒΓ. Επειδή $\widehat{\Delta \mathrm{K} \Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Delta \mathrm{B} \Gamma} = 60°$, ως επίκεντρη, έπεται ότι το τρίγωνο ΚΔΓ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60°, οπότε είναι ισόπλευρο. Άρα $\widehat{\mathrm{B}\Gamma\mathrm{K}} = 5°$, οπότε $\widehat{\mathrm{A}\Gamma\mathrm{K}} = 85°$. Όμως, $\widehat{\mathrm{K}\mathrm{A}\Gamma} = 10°$, οπότε το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ισοσκελές και το Α είναι στη μεσοκάθετη του ΚΓ. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΚΔΓ και το Δ είναι στη μεσοκάθετη του ΚΓ. Άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετη του ΚΓ, οπότε θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{K}\mathrm{A}\Gamma}$, δηλαδή $\widehat{\Delta\mathrm{A}\Gamma} = 5°$.

Πρόβλημα 3
Στον πίνακα γράφουμε σε μία σειρά n αριθμούς, $n \geq 40$, όπου καθένας από αυτούς ισούται με 1 ή -1, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω συνθήκες:
(i) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 40 διαδοχικών αριθμών είναι ίσο με 0.
(ii) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 42 διαδοχικών αριθμών δεν είναι ίσο με 0.
Ονομάζουμε Σ_n το μέγιστο δυνατό άθροισμα των n αριθμών του πίνακα. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του Σ_n για τις διάφορες τιμές του n .
Λύση
Αφού το άθροισμα των πρώτων 40 αριθμών είναι 0, πρέπει οι μισοί να είναι 1 και οι άλλοι μισοί -1. Αφού το άθροισμα των πρώτων 42 δεν είναι 0, πρέπει ο 41ος και ο 42ος αριθμός να είναι ίσοι, έστω ίσοι με $a \in \{-1, 1\}$. Ομοίως αν πάρουμε τους 42 αριθμούς, από τον 2ο μέχρι τον 43ο, αφού το άθροισμά τους δεν είναι 0, θα πρέπει ο 42ος και ο 43ος να είναι ίσοι. Άρα και ο 43ος πρέπει να είναι ίσος με a.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε ότι όλοι οι αριθμοί από τον 41ο και μετά πρέπει να είναι ίσοι με α. Επομένως αν $n > 60$, το άθροισμα των 40 αριθμών από τον a_{22} μέχρι τον a_{61} έχει τους 21 αριθμούς $a_{41} = a_{42} = \cdots = a_{61} = a$, οπότε τα 1 και -1 δεν μπορεί να είναι ίσα το πλήθος σε αυτό το άθροισμα, άρα το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών δεν είναι 0, άτοπο.
Επομένως, η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n είναι 60. Η μέγιστη τιμή του Σ_n επιτυγχάνεται όταν έχουμε όσο το δυνατόν περισσότερους αριθμούς ίσους με 1. Κοιτώντας την πρώτη 40-αδα, αριθμών, πρέπει να έχουμε τουλάχιστον 20 αριθμούς ίσους με -1. Άρα οι αριθμοί ίσοι με 1 είναι το πολύ 40. Άρα, για κάθε n , έχουμε ότι $\Sigma_n \leq 20$. Πράγματι, το 20 είναι η μέγιστη δυνατή τιμή και επιτυγχάνεται όταν οι πρώτοι 20 αριθμοί είναι όλοι ίσοι με 1, η δεύτερη εικοσάδα αριθμών είναι όλοι ίσοι με -1 και η τρίτη εικοσάδα αριθμών είναι όλοι ίσοι με 1.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη μηδενικών ακεραίων (x, y) που είναι τέτοιοι ώστε ο ακέραιος $x^2 + y^2$ να είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων $x^5 + y$ και $y^5 + x$.

Λύση

Επειδή $x^2 + y^2 \mid x(x^5 + y)$ και $x^2 + y^2 \mid y(y^5 + x)$, έπεται ότι

$$x^2 + y^2 \mid x(x^5 + y) + y(y^5 + x) \Rightarrow x^2 + y^2 \mid x^6 + y^6 + 2xy. \qquad (1)$$

Όμως από την ταυτότητα για το άθροισμα κύβων παίρνουμε ότι:

$$x^2 + y^2 \mid (x^2)^3 + (y^2)^3 = x^6 + y^6. \qquad (2)$$

Επομένως συνδυάζοντας τις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$x^2 + y^2 \mid 2xy. \qquad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι $x^2 + y^2 \leq 2 \cdot |xy| \Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \leq 0$, δηλαδή $|x| = |y|$.

Επομένως έχουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $x = y$, τότε από την εκφώνηση έχουμε:

$$2x^2 \mid x^5 + x \Rightarrow 2x \mid x^4 + 1 \Rightarrow x \mid 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.,$$

(β) Αν $x = -y$, τότε από την εκφώνηση έχουμε

$$2x^2 \mid x^5 - x \Rightarrow 2x \mid x^4 - 1 \Rightarrow x \mid 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.,$$

Επομένως τα ζεύγη που ζητάμε είναι τα

$$(x, y) \in \{(1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1)\}.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

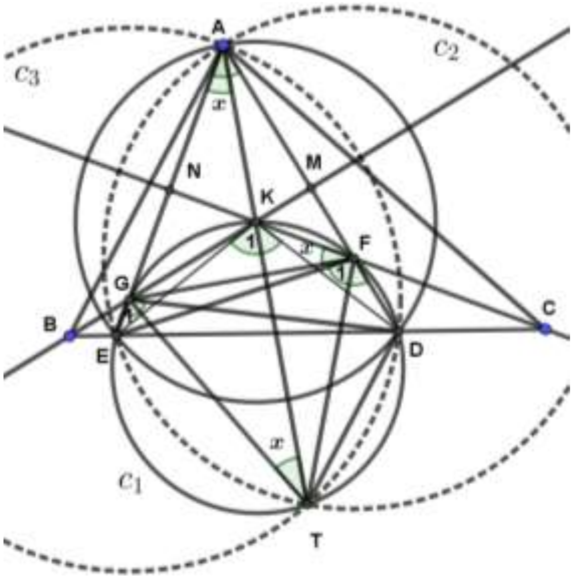
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Οι λύσεις των θεμάτων των μεγάλων τάξεων

1. Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$. Στο ευθύγραμμο τμήμα BC θεωρούμε τα σημεία D, E ώστε $BD = BA$ και $CE = CA$. Αν K είναι το περίκεντρο του τριγώνου ADE, F είναι η τομή των ευθειών AD, KC και G είναι η τομή των ευθειών AE, KB, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KDE, έστω c_1, ο κύκλος με κέντρο το σημείο F και ακτίνα FE, έστω c_2, και ο κύκλος με κέντρο το σημείο G και ακτίνα GD, έστω c_3, περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία AK.

Λύση.



Σχήμα 1

Έστω M το μέσο του AD. Από τις υποθέσεις του προβλήματος τα σημεία B, G, K, M είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν στη μεσοκάθετη του AD. Επιπλέον ο κύκλος c_3 περνάει από το A, αφού $GD = GA$.
Ομοίως, αν N είναι το μέσο του AE, τα σημεία G, F, K, N είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν στη μεσοκάθετη του AE. Επιπλέον ο κύκλος c_2 περνάει από το A, αφού $FA = FE$.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία G, F ανήκουν στο περιγεγραμμένο κύκλο c_1 του τριγώνου KDE.
Από τα ισοσκελή τρίγωνα ADG και AFE, έχουμε;

$$\hat{G}_1 = E\hat{G}D = 2\cdot G\hat{A}D = 2\cdot E\hat{A}F = \hat{F}_1 \qquad (1)$$

Επίσης, η γωνία $E\hat{A}D$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ADE με αντίστοιχη επίκεντρη τη γωνία $\hat{K}_1 = G\hat{K}F$, οπότε

$$\hat{K}_1 = 2\cdot E\hat{A}D \qquad (2)$$

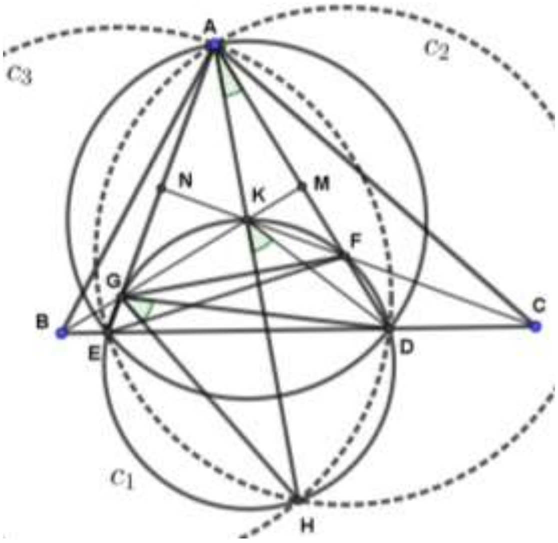
Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\widehat{G}_1 = \widehat{F}_1 = \widehat{K}_1$, οπότε τα σημεία D, E, F, G, K είναι ομοκυκλικά και ανήκουν στο κύκλο c_1.
Έστω T το σημείο τομής των κύκλων c_2, c_3. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία A, K, T είναι συνευθειακά και ότι το T ανήκει στον ίδιο κύκλο με τα σημεία D, E, F, G, K.
Πράγματι, η κοινή χορδή AT των κύκλων c_2 και c_3είναι κάθετη προς τη διακεντρική ευθεία τους FG και επίσης η ευθεία AK είναι κάθετη προς την ευθεία FG, αφού το K είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AGF.
Επίσης, επειδή $GA = GD = GT$ έχουμε τις ισότητες γωνιών:

$$G\hat{A}T = G\hat{T}A = x \,, \qquad (3)$$

και αφού το K είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AGF

$$G\hat{A}T = G\hat{F}K = 90 - A\hat{G}F \qquad (4)$$

Άρα έχουμε $G\hat{T}K = G\hat{T}A = G\hat{F}K$, οπότε τα σημεία F, G, K, T είναι ομοκυκλικά.



Σχήμα 2

2ος τρόπος

Αφού BD = BA και KA = KD, η BK είναι η μεσοκάθετη του AD, οπότε GA=GD. Έχουμε $\widehat{KGD} = \widehat{KGA} = 90° - \widehat{EAD} = \widehat{AFK}$, οπότε τα σημεία K, F, D, G είναι ομοκυκλικά.

Όμοια βγάζουμε $\widehat{KFE} = \widehat{AGK}$, οπότε τα σημεία K, F, E, G είναι ομοκυκλικά.

Από τα δύο προηγούμενα συμπεράσματα έχουμε ότι τα K, F, E, G και D είναι ομοκυκλικά.

Έστω τώρα ότι η AK τέμνει τον κύκλο c_1 στο H. Τότε

$$\widehat{HGD} = \widehat{HKD} = 2 \cdot \widehat{HAD} \qquad (5)$$

Επομένως το G ανήκει στη μεσοκάθετη του AD και επιπλέον ισχύει η σχέση (5), οπότε το G είναι το περίκεντρο του τριγώνου AHD, δηλαδή ο κύκλος c_3 περνάει από το H. Όμοια, ο κύκλος c_2 περνάει από το H, οπότε το ζητούμενο έπεται.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ένας θετικός ακέραιος $n>4$, που διαιρείται από τον αριθμό 4. Συμβολίζουμε με A_nτο άθροισμα όλων των θετικών περιττών διαιρετών του n. Συμβολίζουμε με B_n το άθροισμα όλων των θετικών άρτιων διαιρετών του n, εξαιρουμένου του n. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $f(n)=B_n-2A_n$, για τις διάφορες τιμές του n. Για ποιους θετικούς ακεραίους n επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή;

Λύση

Συμβολίζουμε με $d_1,\dots,d_k$ τους περιττούς διαιρέτες του n. Τότε οι αριθμοί $2d_1,\dots,2d_k$ είναι άρτιοι διαιρέτες του n. Επίσης, καθένας από αυτούς δεν διαιρείται από 4, επομένως, άρα κανένας από αυτούς δεν μπορεί να ισούται με n. Τέλος, κανείς από αυτούς δεν ισούται με 4, και ο 4 είναι ένας άρτιος διαιρέτης του n. Συνοψίζοντας έχουμε ότι,

$$A_n=d_1+\cdots+d_k \text{ και } B_n=2d_1+2d_2+\cdots+2d_k+4.$$

Επομένως, έχουμε

$$B_n-2A_n\geq 4.$$

Πράγματι, η τιμή 4 είναι η ελάχιστη τιμή, αφού για $n=8$, έχουμε:

$$A_n=1, B_n=2+4=6, B_n-2A_n=4.$$

Τώρα μένει να βρούμε όλους τους θετικούς ακεραίους n με την ιδιότητα: $B_n-2A_n=4$. Η ισότητα, σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει όταν $B_n=2d_1+\cdots+2d_k$. Αν τώρα p είναι ένας περιττός πρώτος διαιρέτης του n, τότε ο $4p$ είναι άρτιος διαιρέτης του n και δεν συμπεριλαμβάνεται στο $2d_1+\cdots+2d_k$. Επομένως για να ισχύει
$B_n=2d_1+\cdots+2d_k+4$, πρέπει $n=4p$. Πράγματι, τότε

$$B_n-2A_n=(2+4+2p)-2(1+p)=4.$$

Αν τώρα ο n δεν έχει περιττό πρώτο διαιρέτη, τότε είναι δύναμη του 2, δηλαδή $n=2^{k+1}$, οπότε $A_n=1, B_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^k=\frac{2^{k+1}-2}{2-1}=2^{k+1}-2$ και $B_n-2A_n=2^{k+1}-4$. Άρα $B_n-2A_n=4$, αν και μόνον, αν $k=2$. Επομένως $n=4p$, όπου p πρώτος.

Πρόβλημα 3
Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ικανοποιούν την ισότητα

$$\alpha+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta+\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}=18.$$

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α .

Λύση (1ος τρόπος)
Με κατάλληλη χρήση της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\alpha+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta+\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}=\alpha+\left(\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta+\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}\right)$$

$$\geq\alpha+4\cdot\sqrt[4]{\beta\gamma\cdot\gamma\delta\cdot\delta\beta\cdot\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}}=\alpha+\frac{4}{\sqrt[4]{\alpha}}$$

Αν θέσουμε $x=\sqrt[4]{\alpha}$ και λάβουμε υπόψη τη δεδομένη ισότητα, καταλήγουμε στην ανίσωση

$$x^4+\frac{4}{x}\leq 18,\, x>0 \Leftrightarrow x^5-18x+4\leq 0,\, x>0. \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)=x^5-18x+4$, οπότε καταλήγουμε στην παραγοντοποίηση

$$\mathrm{P}(x)=x^5-18x+4=(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x-2\right),$$

οπότε έχουμε τελικά την ανίσωση:

$$(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x-2\right)\leq 0. \qquad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $x>2$, τότε $(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x-2\right)>0$, οπότε η ανίσωση (2) δεν επαληθεύεται. Επομένως, πρέπει να είναι $0<x\leq 2$.
Παρατηρούμε ότι για $x=2$, είναι $\alpha=16$ και η σχέση (2) ισχύει ως ισότητα. Κατά τα γνωστά από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, αυτό ισχύει όταν

$$\beta\gamma=\gamma\delta=\delta\beta=\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}\Leftrightarrow\beta=\gamma=\delta \text{ και } \beta^2=\frac{1}{16\beta^6}$$

$$\Leftrightarrow\beta=\gamma=\delta \text{ και } \beta^8=\frac{1}{16}\Leftrightarrow\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α είναι το 16.

2ος τρόπος: Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ παίρνουμε:

$$a+bc+cd+db+\frac{1}{ab^2c^2d^2}=\frac{a}{32}+\cdots+\frac{a}{32}+bc+cd+db+\frac{1}{ab^2c^2d^2}\geq$$

$$36\sqrt[36]{\frac{a^{32}}{32^{32}}\cdot bc\cdot cd\cdot db\cdot\frac{1}{ab^2c^2d^2}}=36\sqrt[36]{\frac{a^{31}}{32^{32}}}.$$

Άρα έχουμε $\alpha^{31}\leq\frac{32^{32}}{2^{36}}=2^{124}$ και επομένως $a\leq 2^4=16$, κλπ.

Πρόβλημα 4

Έστω Q_n το σύνολο των n-άδων $x = (x_1, \dots, x_n)$ με $x_i \in \{0, 1, 2\}, i = 1,2, \dots, n.$ Μία τριάδα (x, y, z), όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, διακεκριμένων στοιχείων του Q_n λέγεται *καλή,* αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα συνόλων: $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0,1,2\}$. Ένα υποσύνολο A του Q_n λέγεται *καλό*, αν οποιαδήποτε τρία στοιχεία του A σχηματίζουν μια *καλή* τριάδα. Να αποδείξετε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_n έχει το πολύ $2\left(\frac{3}{2}\right)^n$ στοιχεία.

Λύση

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο επαγωγικά ως προς n. Η περίπτωση $n = 1$ είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_{n-1} έχει το πολύ $2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ στοιχεία.

Έστω $A_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A \ : x_n \neq 0\}$ και ορίζουμε τα σύνολα A_1, A_2 όμοια, δηλαδή $A_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A \ : x_n \neq 1\}$ και $A_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A \ : x_n \neq 2\}$.

Αφού το A είναι *καλό* σύνολο και το A_0 είναι υποσύνολό του, το A_0 είναι επίσης *καλό*. Έτσι, τρία οποιαδήποτε στοιχεία του έχουν μια συντεταγμένη που διαφέρουν ανά δύο. Αυτή η συντεταγμένη δεν μπορεί να είναι η τελευταία, διότι το 0 δεν μπορεί να εμφανιστεί εκεί. Συνεπώς, το σύνολο A_0' που προκύπτει από τα στοιχεία του A_0 διαγράφοντας την τελευταία συντεταγμένη είναι καλό υποσύνολο του Q_{n-1}.

Παρατηρούμε επιπλέον ότι, αν $|A_0| \geq 3$, τότε $|A_0'| = |A_0|$.

Πράγματι, αν ίσχυε το αντίθετο, τότε θα υπήρχε ένα στοιχείο $a \in A_0'$ έτσι ώστε $x, y \in A_0$, όπου τα x, y προκύπτουν από το a προσθέτοντας τα στοιχεία 1 και 2, αντίστοιχα, ως τελευταία συντεταγμένη. Αλλά τότε, αν z είναι ένα οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του A_0, αυτό δεν μπορεί να έχει ως τελευταία συντεταγμένη το 0, οπότε τα x, y, z δεν θα σχημάτιζαν μία καλή τριάδα, άτοπο.

Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$|A_0| \leq \max\{2, |A_0'|\} \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

Ομοίως, παίρνουμε ότι : $|A_1|, |A_2| \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. Όμως, κάθε στοιχείο του A εμφανίζεται σε ακριβώς δύο από τα A_0, A_1, A_2, οπότε:

$$|A| = \frac{1}{2}(|A_0| + |A_1| + |A_2|) \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$