ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ **ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ** Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1+\eta\mu x}{x}+\frac{1+x^{10}}{6x-\pi}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$

2. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο R με $f(x)\le 0\le g(x)$ και έστω ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$ τέτοια ώστε $f(a)=a$ και $g(\beta)=\beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $f(x_0)+g(x_0)=x_0$.

3. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[-2,2]$ για την οποία ισχύουν $f(1)>0$ και $2x^2+5(f(x))^2=8$ για κάθε $x\in(-2,2)$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,2)$.

4. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ με $f(0)=1$ και $f(1)=2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$$

5. Έστω $\mathrm{f}:[0,1]\to R$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και ισχύει $0<\mathrm{f}(x)<1$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι η C_{f} τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y=x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$

6. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α) $\mathrm{f}(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1,\quad x\in[0,\pi]$ β) $\mathrm{f}(x)=\eta\mu x-x$

7. Δίνεται συνάρτηση f, με τύπο: $f(x)=\begin{cases}x^3-x-2, & -2\le x\le 1\\ x^2-3, & 1<x\le 3\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2,3)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathrm{R}\to R$ για την οποία ισχύει $\mathrm{f}^2(x)=4x\mathrm{f}(x)+4$, για κάθε $x\in R$. Να βρείτε τον τύπο της αν $\mathrm{f}(0)=1$.

ΡΕΝΕΣΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΡΕΜΑΣΤΗΣ

9. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,5]$ για την οποία ισχύει $x^2+\left(f(x)\right)^2=5x$ για κάθε $x\in(0,5)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ρίζες στο $(0,5)$ και διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στο $(0,5)$.

β) Αν $f(1)=-2$ να βρείτε το τύπο της στο $(0,5)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(x)=\begin{cases} x+e^x, & x\le 0 \\ e^{-x}, & x>0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\mathrm{f}(x)=\kappa$, για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in R$.

11. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[-a,a]$ για τις οποίες ισχύουν: f περιττή και g γνησίως φθίνουσα με $g(a)=-a$ και $g(-a)=a$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-a,a)$ τέτοιο ώστε $f\left(g(x_0)\right)+f(x_0)+g(x_0)=0$.

12. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο R για την οποία ισχύει

$$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x},\ x\neq 0.$$

α) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

13. Δίνεται η συνάρτηση g, με τύπο $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x,\ \ x\in(0,1]$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\ln x_0=\frac{1}{x_0}-\frac{3}{2}.$$

14. Δίνεται συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\sqrt{x-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f.

15. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$f^2(x)=1+2f(x)\sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε } x\in R.$$

16. Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:[0,1]\to R$. Αν $A(1,1)\in C_f$ τότε:

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{x}+2,\quad x\in(0,1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x}=1+2f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

17. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει

$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in R$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

18. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν $f(4)=2$ και $f(x)f(f(x))=12$ για κάθε $x\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)=6$.

β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=3$

ΡΕΝΕΣΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΡΕΜΑΣΤΗΣ