**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**
**82ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**
**5 Νοεμβρίου 2021**

**Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)**
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)(x-3y)+2=6(x-3y) \end{array}\right\}.$$

**Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)**
Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους ακέραιους

$$\mathrm{N}=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta,\quad 0<\alpha<\beta,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)$, στο οποίο αθροίζουμε όλους τους ακεραίους από τον $\alpha$ μέχρι και τον $\beta+1$.

**Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)**
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$. Πάνω στην ευθεία ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BE}=\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma=\Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{A}$.

**Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες**
**Καλή επιτυχία!**

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**
**82ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"**
**5 Νοεμβρίου 2021**

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)**
Να βρεθούν οι τριάδες $(x, y, z)$ θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$2x^3 - 7y^2 + 4z = -4$$
$$2y^3 - 7z^2 + 4x = -4$$
$$2z^3 - 7x^2 + 4y = -4$$

**Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)**
Να προσδιορίσετε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους

$$\mathrm{N} = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta,\ \ 0 < \alpha < \gamma,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος

$$(\alpha-1)^2 + \alpha^2 + \cdots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2,$$

στο οποίο αθροίζουμε όλα τα τετράγωνα των μη αρνητικών ακεραίων από τον $\alpha-1$ μέχρι και τον $\gamma+1$.

**Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)**
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{B\Gamma}$. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{B}$. Αν η κάθετη στο σημείο Δ προς την ευθεία ΔΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο μέσο της, να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Gamma} = 3\cdot \mathrm{B\Gamma}$.

**Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες**
**Καλή επιτυχία!**

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**
**82ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**
**5 Νοεμβρίου 2021**

**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)**
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους το σύστημα:

$$4\alpha^2 = 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$$
$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34.$$

**Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)**
Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(2f(x)+y) = f(f(y)+x)+x. \quad (*)$$

**(α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ υπάρχει $z\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(z)=\alpha$ και ότι η $f$ είναι 1-1.

**(β)** Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f$ που ικανοποιούν τη σχέση (*).

**Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)**
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $C$ με κέντρο $O$ και ακτίνα $R$. Θεωρούμε τα μέσα $M, K, \Lambda$ των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$, αντίστοιχα, καθώς και τους κύκλους $C_M(M, MA), C_K(K, KB), C_\Lambda(\Lambda, \Lambda\Gamma)$ με κέντρα τα σημεία $M, K, \Lambda$ και ακτίνες $MA, KB, \Lambda\Gamma$, αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο $C$ στα σημεία $\Delta, E, Z$, αντίστοιχα. Αν $T, P, \Sigma$ είναι οι ορθές προβολές των κορυφών $A, B, \Gamma$, αντίστοιχα, του τριγώνου $AB\Gamma$ προς τις απέναντι πλευρές του, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\Delta T$, $EP$ και $Z\Sigma$ συντρέχουν.

**Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες**
**Καλή επιτυχία!**