

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , τέτοια ώστε  $f^5(x) - 2f^4(x) + x = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $6f(x^2) - f^2(x) \geq 9$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν αντιστρέφεται.

3. Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(5,9)$  και  $B(2,3)$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f\left(3 + f^{-1}(x^2 + 2x)\right) = 9$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

β) Να βρείτε την αντίστροφή της  $f$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση  $3^x + 4^x = 5^x$ .

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $3^x + 4^x > 5^x$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2 - \ln(\sqrt{x+2} + 1)$ .

α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφή της  $f$ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(x) = 0$ .

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  και της  $y = x$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και τύπο  $f(x) = 2x^3 + x - 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(x) = f(x)$ .

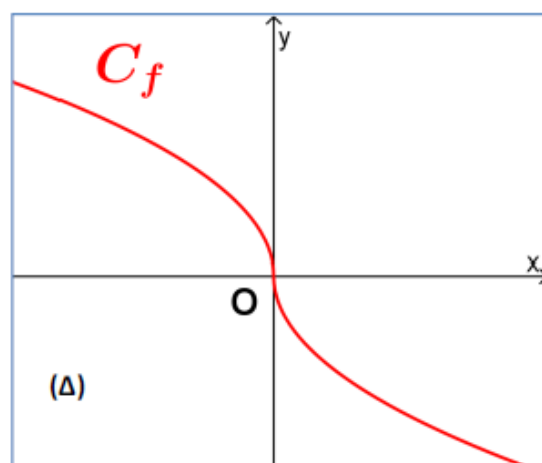
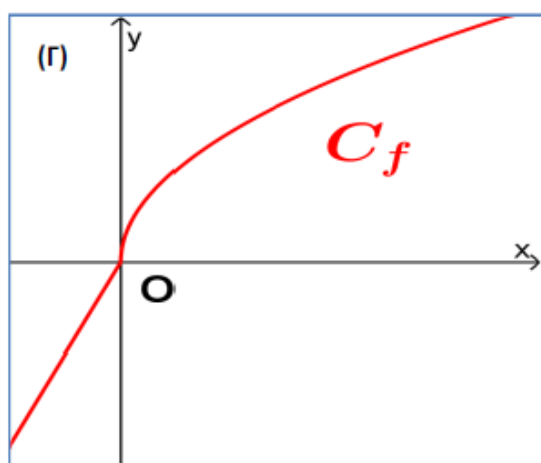
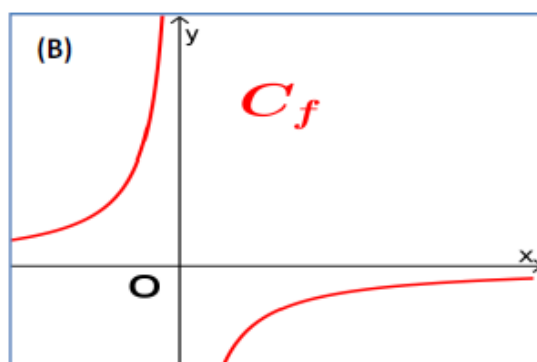
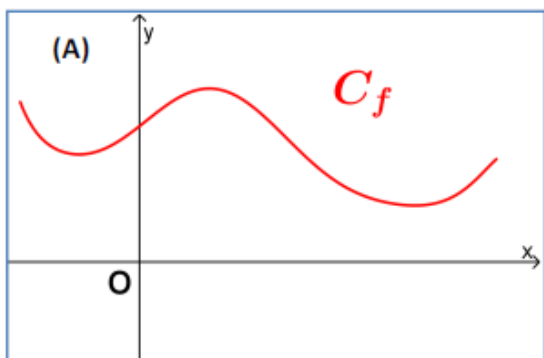
8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 1$ .

α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f$ .

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφή και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ) Να λύσετε τις ανισώσεις: i)  $f^{-1}(\ln x) > x$  ii)  $\ln \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 3} > e^{x^2+2} - e^{3x^2}$

9. Να βρείτε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και για κάθε μια από αυτές να κατασκευάσετε την γραφική της παράσταση:



10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$ .

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(x) = x$ .

11. Δίνονται συναρτήσεις  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ . Δίνεται επίσης ότι και η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι 1-1.

α) Να δείξετε ότι η  $g$  είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση  $g(f(x) + \ln x - 1) = g(f(x) - x)$ .

γ) Αν για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $f(e^{x-2}) = \frac{1}{e^{x-2}} - x + 2$  να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x, x > 0$ .

δ) Να λύσετε την ανίσωση:  $\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1}$

**12.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $\ln \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} < \frac{x^2 - x^4}{(x^2 + 1)(x^4 + 1)}$

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(1, +\infty)$ .

γ) Να αποδείξετε ότι: i) Για κάθε  $x > e$  ισχύει  $f(x) < e^{-1}$ .

ii) Για κάθε  $\alpha > \beta > 1$  ισχύει  $a^\alpha > \beta^\beta$