

1. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$  και  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ .

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .

Μονάδες 8

β) Αν τα διανύσματα  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του  $k$ .

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

Μονάδες 7

2. Σε τρίγωνο ABΓ είναι:  $\vec{AB} = (-4, -6), \vec{AG} = (2, -8)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{AM}$ , όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι οξεία.

Μονάδες 10

γ) Αν στο τρίγωνο ABΓ επιπλέον ισχύει  $A(3,1)$ , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ.

Μονάδες 8

3. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{AB} = (k^2 - 6k + 9, k - 3)$  και  $\vec{AG} = (1, 6)$ , όπου  $k \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ .

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές του  $k$ , ώστε τα διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{AG}$  να είναι κάθετα.

Μονάδες 9

γ) Για  $k=1$  να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{BG}$ .

Μονάδες 8

4. Έστω  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  δύο διανύσματα με  $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$  και  $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ .

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$ .

Μονάδες 16

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{u}$ .

Μονάδες 9

5. Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν:  $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$ ,  $2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ .

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  και το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ .

Μονάδες 13

6. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$   $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ . Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  και κατόπιν την τιμή της παράστασης:  $\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta})$ .

Μονάδες 10

β) Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}$ .

Μονάδες 15

7. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, \sqrt{3})$  και  $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$ . Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

Μονάδες 10

β) το διάνυσμα  $\vec{u} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{\alpha}$

Μονάδες 15

8. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, 3)$  και  $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό  $x$  για τον οποίο τα διανύσματα  $\vec{u}$  και  $\vec{v} = (x^2, x - 1)$  είναι κάθετα.

Μονάδες 13

9. Έστω δυο διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν:  $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{7}, 1\right)$  και  $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} = (\mu + 2, 7 - 2\mu)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

α) Να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  ως συνάρτηση του  $\mu$ .

Μονάδες 10

β) Αν  $\mu = 2$ , τότε:

i. να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} = (3, -4)$  και ότι το  $\vec{\alpha}$  είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$ .

Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Μονάδες 5

10. α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  ισχύει:  $|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$ .

Μονάδες 12

β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{AD} = \vec{\beta}$ . Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος  $\sqrt{3}$ , να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.

Μονάδες 13

11. Δίνονται τα διανύσματα  $\overline{OA} = (4, -2)$  και  $\overline{OB} = (1, 2)$ , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\overline{OA}$  και  $\overline{OB}$  είναι κάθετα.

Μονάδες 4

β) Αν Γ (α, β) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:

i) να αποδείξετε ότι:  $\overline{AB} = (-3, 4)$  και  $\overline{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

Μονάδες 5

ii) να αποδείξετε ότι:  $4\alpha + 3\beta = 10$

Μονάδες 6

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα  $\overline{OG}$  και  $\overline{AB}$  είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Μονάδες 10

12. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$ ,  $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$  και

$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{a} - \vec{\beta}$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 3

β) Αν ισχύει  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι:  $\kappa = -2$

Μονάδες 6

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$

Μονάδες 8

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $3\vec{a} + 2\vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$  είναι κάθετα.

Μονάδες 8

13. α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες:  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$  και  $|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$ .

Μονάδες 10

β) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:  $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$  και  $\frac{|\vec{a}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$

i) Να αποδείξετε ότι:  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

Μονάδες 8

ii) Να αποδείξετε ότι:  $7\vec{a} + 3\vec{\gamma} = 0$

Μονάδες 7