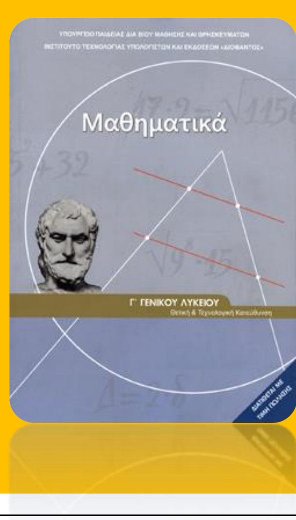
ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΕΜΠΤΗ

06 – 09 – 18

16 :00



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

1η έκδοση

Αντωνόπουλος Νίκος
Κανάβης Χρήστος
Πάτσης Ανδρέας
Σίσκας Χρήστος
Χασάπης Γιώργος
Χατζόπουλος Μάκης

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των μελών της **lisari team**

http://lisari.blogspot.gr/

1η έκδοση: 06 – 08 – 2018 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό **blog**

http://lisari.blogspot.gr

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Επαναληπτικών Πανελλαδικών Εξετάσεων 2018 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.** Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team.** Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

06 – 09 – 2018

lisari *team*

1. *Αντωνόπουλος Νίκος (Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης)*
2. *Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "ΔΙΑΤΑΞΗ" - Ν. Σμύρνη)*
3. *Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "ΒΕΛΑΩΡΑΣ" - Λιβαδειά Βοιωτίας)*
4. *Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)*
5. *Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)*
6. *Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "λύση" - Άρτα)*
7. *Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)*
8. *Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)*
9. *Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)*
10. *Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου" - Σέρρες)*
11. *Κανάβης Χρήστος (Καθηγητής στη Δ.Ε - Αναπληρωτής)*
12. *Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)*
13. *Κουλούρης Ανδρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)*
14. *Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)*
15. *Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)*
16. *Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)*
17. *Δημήτρης Μπαδέμης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)*
18. *Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)*
19. *Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Καταστερίου, Ζάκυνθος)*
20. *Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο - Αγρίνιο)*
21. *Παπαδομανωλάκη Μαρία (Συνιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης "ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ" - Ρέθυμνο)*
22. *Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")*
23. *Πάτσης Ανδρέας (Βόνιτσα - Μαθηματικός)*
24. *Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)*
25. *Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)*
26. *Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)*
27. *Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)*
28. *Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ" - Ηράκλειο Κρήτης)*
29. *Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)*
30. *Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας – Καθηγητής Δ.Ε Κορινθίας)*
31. *Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)*
32. *Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)*
33. *Χαραλάμπους Σταύρος (Θεσσαλονίκη - Μουσικό Λύκειο)*
34. *Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)*
35. *Χατζόπουλος Μάκης (Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης)*

lisari team / Σχολικό έτος 2017 – 18

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΠΤΑ (7)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη, σχολικό βιβλίο σελ. 145

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελ. 15

Α3. Η παράγωγος της συνάρτησης f μπορεί να είναι η Τ και της g η συνάρτηση Η

Α4. α. Ψ

β. Είναι ψευδής η πρόταση αφού αν για παράδειγμα πάρουμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=-\frac{1}{x^2}+1,\ \ g(x)=\frac{1}{x^2}$$

τότε

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty \ \text{και}\ \lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

όμως

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

Α5. (α) Σ (β) Σ (γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $D_f=\mathbb{R}$. Για $x<1$ η f συνεχής ως άθροισμα συνεχών και για $x>1$ η f συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Για να είναι η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της θα πρέπει να είναι και συνεχής στο 1.
Όμως,

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x}=2,\ \ \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha\ \ \text{και}\ \ f(1)=\alpha+1$$

άρα

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow 2=1+\alpha\Leftrightarrow \alpha=1$$

Β2. Είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x}, & x>1\\ x^2+1, & x\le 1\end{cases}$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},4\right]\subseteq\mathbb{R}$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$ με $f'(x)=2x$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ με $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)'=\left(1+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

Ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη και στο 1. Έχουμε,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1+\frac{1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}\underset{\text{d.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-1$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

B3. Είναι $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}, & x>1\\ 2x, & x<1\end{cases}$

Για $x<1$: $f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2x=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{8}$ (δεκτή)

Για $x>1$: $f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2=4\overset{x>1}{\Leftrightarrow}x=2$ (δεκτή)

Επομένως, τα σημεία που η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ είναι τα $A\left(-\frac{1}{8},f\left(-\frac{1}{8}\right)\right)$ και $B(2,f(2))$.

Έχουμε,

$$\varepsilon_A: y-f\left(-\frac{1}{8}\right)=f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)\underset{f'\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{4}}{\overset{f\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{65}{64}}{\Leftrightarrow}}y-\frac{65}{64}=-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$$

$$\varepsilon_B: y-f(2)=f'(2)(x-2)\underset{f'(2)=-\frac{1}{4}}{\overset{f(2)=\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow}}y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+2$$

B4. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Έχουμε,

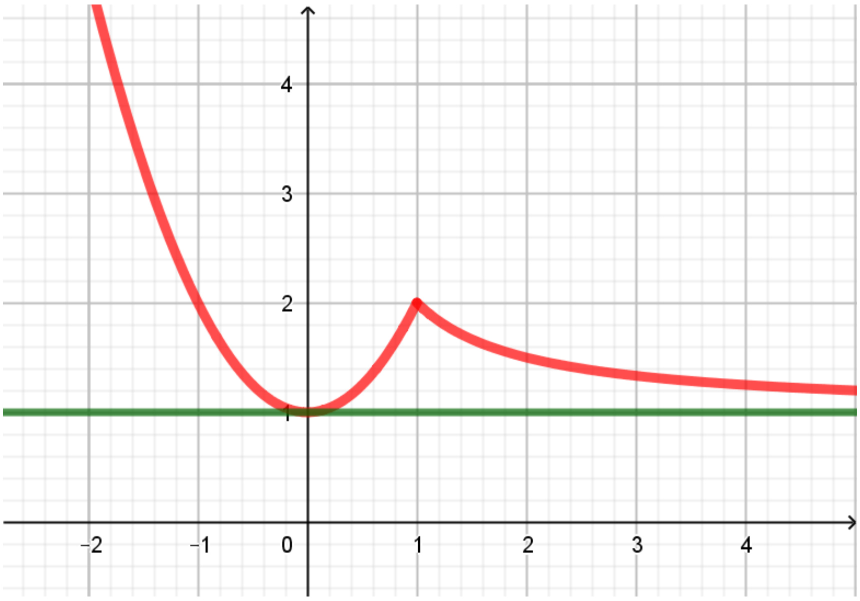
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Στο $-\infty$ η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού άρα δεν έχει πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.Ισχύει $f'(x) = 2συνx - 1$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2συνx - 1 = 0 \Leftrightarrow συνx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$, διότι $x \in [0, \pi]$

Η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ άρα διατηρεί πρόσημο μεταξύ των ριζών της. Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
x_0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x_0)$	$2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-1=\sqrt{2}-1>0$		$2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-1=0-1<0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	↘ $-\pi$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\frac{\pi}{3}$ το $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$, ολικό ελάχιστο στο π το $-\pi$ και τοπικό ελάχιστο στο 0 το 0.

Γ2. Ισχύει $f''(x)=-2\eta\mu x<0$ στο $(0,\pi)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,\pi]$, συνεπώς η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της $x_0\in[0,\pi]$ είναι πάνω από την C_f εκτός του σημείου x_0. Επομένως η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0,f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Γ3. Είναι

$$\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\pi}(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-x\sigma\upsilon\nu x)dx=\int_0^{\pi}2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx-\int_0^{\pi}x\sigma\upsilon\nu x dx=I_1-I_2$$

Για το I_1 θέτουμε $\eta\mu x=u$ τότε $\sigma\upsilon\nu x dx=du$

Για $x=0$, $u_1=0$ και για $x=\pi$, $u_2=0$ τότε $I_1=\int_0^{\pi}2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{0}2udu=0$

Για το I_2 έχουμε:

$$I_2=\int_0^{\pi}x\sigma\upsilon\nu x dx=[x\eta\mu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=[x\eta\mu x]_0^{\pi}+[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=-2$$

Επομένως,

$$\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx=2$$

Γ4. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}-1\right)=2\cdot 1-1=1$

β) Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\cdot \ln x\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(2x)}{x}\cdot x\ln x\right]=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}-2\frac{f(2x)}{2x}\right)\cdot x\ln x\right]=(1-2\cdot 1)\cdot 0=0$$

αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{2x}=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=1$$

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Α΄ τρόπος

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\ln(1+x)>\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow \ln(x+1)>1-\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow \ln(x+1)+\frac{1}{x+1}>1\ (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $r(x)=\ln x+\frac{1}{x},\ x>0$

Είναι, $r'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$ και ο πίνακας προσήμων της $r'(x)$ και η μονοτονία της συνάρτησης r φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$r'(x)$	$-$		$+$
r	$\searrow$		$\nearrow$

άρα για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$x+1>1\Rightarrow r(x+1)>r(1)\Rightarrow \ln(x+1)+\frac{1}{x+1}>1$$

Β΄ τρόπος

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει :

$$\ln x<x-1\overset{e^x\nearrow}{\Rightarrow} x<e^{x-1}\Rightarrow e^x>ex$$

Για $x>0$ έχουμε $0<\frac{1}{1+x}<1$ και έτσι έχουμε:

$$e^{\frac{1}{1+x}}>e\frac{1}{x+1}\overset{\ln x\nearrow}{\Rightarrow}\ln e^{\frac{1}{1+x}}>1+\ln\frac{1}{x+1}\Rightarrow \ln(x+1)>1-\frac{1}{x+1}\Rightarrow \ln(x+1)>\frac{x}{x+1}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}<0 \text{ αφού } \frac{x}{x+1}-\ln(x+1)<0$$

όπως είδαμε στο $\Delta 1$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ άρα «$1-1$» και συνεπώς αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f όμως η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ συνεπώς:

$$f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to0^+} f(x)\right)=(0,1)$$

διότι:

- $$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x+1}=1$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

Δ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$f(x)+1>2^{f(x)}\Leftrightarrow \ln\left(f(x)+1\right)>f(x)\ln 2\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}\frac{\ln\left(f(x)+1\right)}{f(x)}>\ln 2\Leftrightarrow f\left(f(x)\right)>f(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<1$$

που ισχύει.

Δ4. Θεωρούμε τη πολυωνυμική συνάρτηση:

$$h(x)=x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi) \text{ με } x\in\mathbb{R}, 0<\alpha<1$$

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και:

- $h(0)=2\eta\mu(\alpha\pi)>0$ αφού $0<\alpha<1\Rightarrow 0<\alpha\pi<\pi$
- $h(1)=-f(\alpha)<0$ αφού $0<f(x)<1$ για κάθε $x>0$

Επομένως η εξίσωση

$$h(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi)=0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική και :

- $h(1)<0$
- $h(2)=f^{-1}(\alpha)>0$ αφού το σύνολο τιμών της αντίστροφης είναι το πεδίο ορισμού της f δηλαδή το $(0,+\infty)$.

Επομένως η εξίσωση

$$h(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi)=0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Όμως η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-1}+\dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\dfrac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0$ και η εξίσωση

$x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi)=0$ στο $(0,1)\cup(1,2)$ είναι ισοδύναμες.

Η δεύτερη όμως είναι δευτέρου βαθμού αφού $f(\alpha)+f^{-1}(\alpha)+\eta\mu(\alpha\pi)>0$ (ως άθροισμα συντελεστών του x^2) άρα έχει το πολύ δυο ρίζες.

Συνεπώς έχουμε δυο ακριβώς ρίζες ως προς x, από μία στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,2)$.

Δ5. Η F είναι συνεχής στο $[1,e]$ παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ με $F'(x)=f(x)$ γνησίως φθίνουσα.

Άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(e)-F(1)}{e-1}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{F(e)-F(1)}{e-1}$$

Ισχύει $1<\xi<e\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(1)>f(\xi)>f(e)\Rightarrow \ln 2>\dfrac{e\ln 2-F(1)}{e-1}>\dfrac{\ln(e+1)}{e}$

$$\Rightarrow (e-1)\ln 2>e\ln 2-F(1)>\frac{(e-1)\ln(e+1)}{e}$$

$$\Rightarrow (e-1)\ln 2-e\ln 2>-F(1)>\frac{(e-1)\ln(e+1)-e^2\ln 2}{e}$$

$$\Rightarrow \ln 2<F(1)<\frac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}<\ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)\Leftrightarrow\frac{e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)}{e}<\ln 2^{e+1}-\ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)<e\ln 2^{e+1}-e\ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow e^2\ln 2-(e-1)\ln(e+1)<e(e+1)\ln 2-e\ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e+1)<e\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(e+1)<\ln 2^e$$

$$\Leftrightarrow e+1<2^e \text{ που ισχύει}$$