Μαθηματικα Ομαδας Προσανατολισμου Θετικων Σπουδων & Σπουδων Οικονομιας και Πληροφορικης

Απαντήσεις Θεμάτων Επαναληπτικών Πανελλαδικών Εξετάσεων Ημερησίων και Εσπερινών Γενικών Λυκείων

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

Α.2

α) Ψευδής

β) Θεωρώ $f(x)=x^4$, $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$

Επειδή η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ η f είναι κυρτή στο $\Re$ άρα δεν παρουσιάζει καμπή όμως $f''(0)=12\cdot 0^2=0$.

Α.3 (δ)

Α.4

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β.

Β.1 Εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΖ οπότε $EZ^2=EB^2+ZB^2$. Από υπόθεση $EB=x$, $\Gamma Z=x$, $\Gamma B=2$ άρα $BZ=\Gamma B-\Gamma Z=2-x$ τότε

$$EZ^2=x^2+(2-x)^2 \Rightarrow EZ=\sqrt{x^2+(2-x)^2},\quad x\in[0,2]$$

Κανακάρη 99, Κορίνθου 255 | τηλ. 2610 625360 | email: info@kapalearn.gr

B.2 Το εμβαδόν του ΕΖΗΘ

$f(x) = EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2 = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \le x \le 2$

B.3 $f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad x \in [0,2]$

Η f παραγωγίζεται με $f'(x) = 4x - 4 = 4(x-1) \quad f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$

x	0		1		2
f′(x)		-	0	+	
f(x)		↘		↗	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ (το $f(1)=2$) και μέγιστο για $x=0$ και για $x=2$ (το $f(0)=f(2)=4$)

B.4 Αφού η f έχει ελάχιστο το 2 και μέγιστο το 4 ισχύει $2 \le f(x) \le 4$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Ισχύει $0 \le x_0 \le 2 \overset{e^x \text{γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} e^0 \le e^{x_0} \le e^2 \Leftrightarrow 1 \le e^{x_0} \le e^2 \Leftrightarrow 4 \le 4e^{x_0} \le 4e^2 \Leftrightarrow 5 \le 4e^{x_0} + 1 \le 4e^2 + 1$

δηλαδή ο αριθμός $4e^{x_0} + 1$ δεν βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f το οποίο είναι το $[2,4]$ άρα δεν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$ τέτοιο ώστε το $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ.1

Η f ορίζεται και παραγωγίζεται στο $[0,3]$ άρα είναι συνεχής στο $[0,3]$. Από το δοσμένο σχήμα βλέπω ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[0,3]$ και ότι $f'(0)=0 \quad f'(1)=-3 \quad f'(2)=0$ $f'(3)=9$.

Επειδή η f δεν ικανοποιεί το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο $[0,3]$,όμως είναι συνεχής συμπεραίνω ότι $f(0)=f(3)$. Από υπόθεση $f(0)=2$ άρα $f(3)=2$.

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f'(x)$ και των ευθειών $x=0, x=3$ δίνεται από τον τύπο

$$\int_0^2 (-f'(x))dx + \int_2^3 f'(x)dx \overset{\upsilon\pi o\theta.}{=} 8 \Leftrightarrow -[f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \Leftrightarrow -f(2)+f(0)+f(3)-f(2)=8 \Leftrightarrow$$

$$-2f(2)+f(0)+f(3)=8 \overset{f(0)=f(3)=2}{\Leftrightarrow} -2f(2)+4=8 \Leftrightarrow f(2)=\frac{8-4}{-2}=-2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x} = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1}\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to1} f(x) \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=} f(1)=0 \\ f, \ln x \ \text{παρ/μες κοντά στο } 1 \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} \neq 0 \ \text{κοντά στο } 1 \end{array}\right\} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{(\ln x)'} = \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to1}(xf'(x))$$

$$\overset{f'(x)\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=} 1\cdot f'(1) = -3$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)-2} = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to0}(f(x)-2) \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=} f(0)-2=0 \\ x, f'(x) \ \text{παρ/μες στο } (0,\alpha) \\ (f(x)-2)' = f'(x) \neq 0 \ \text{στο } (0,\alpha) \end{array}\right\} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to0}\frac{(x)'}{(f(x)-2)'} = \lim_{x\to0}\frac{1}{f'(x)} \ \text{επειδή η}$$

$f'(x)$ είναι συνεχής στο $[0,3]$ άρα και στο 0 ισχύει $\lim\limits_{x\to0} f'(x) = f'(0) = 0$ επιπλέον $f'(x)<0$ στο $(0,\alpha)$ άρα $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{f'(x)} = -\infty$.

Γ.2 Βλέπω από το σχήμα ότι $f'(x)<0$ στο $(0,\alpha)$, η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

$f'(x)>0$ στο $(2,3]$, η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$.

Οπότε παρουσιάζει στο 0 τοπικό μέγιστο το $f(0)=2$, στο 2 τοπικό ελάχιστο το $f(2)=-2$ και στο 3 τοπικό μέγιστο το $f(3)=2$.

Η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$,η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,1]$.

Η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$, η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ άρα η f είναι κυρτή στο $[1,3]$. Οπότε στο 1 παρουσιάζει καμπή και το σημείο καμπής είναι το $(1,f(1))=(1,0)$.

Γ.3 Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \Re$. Αν $f(x_0) \neq 0$ τότε υπάρχει το

$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Για να μην υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$ θα πρέπει $f(x_0) = 0$ και η f εκατέρωθεν του x_0 να αλλάζει πρόσημο.

Αρχικά πρέπει να αποδείξω ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$

$\left.\begin{matrix} f(2) = -2 \\ f(3) = 2 \end{matrix}\right\}$ άρα $f(2)f(3) < 0$ οπότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$ άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

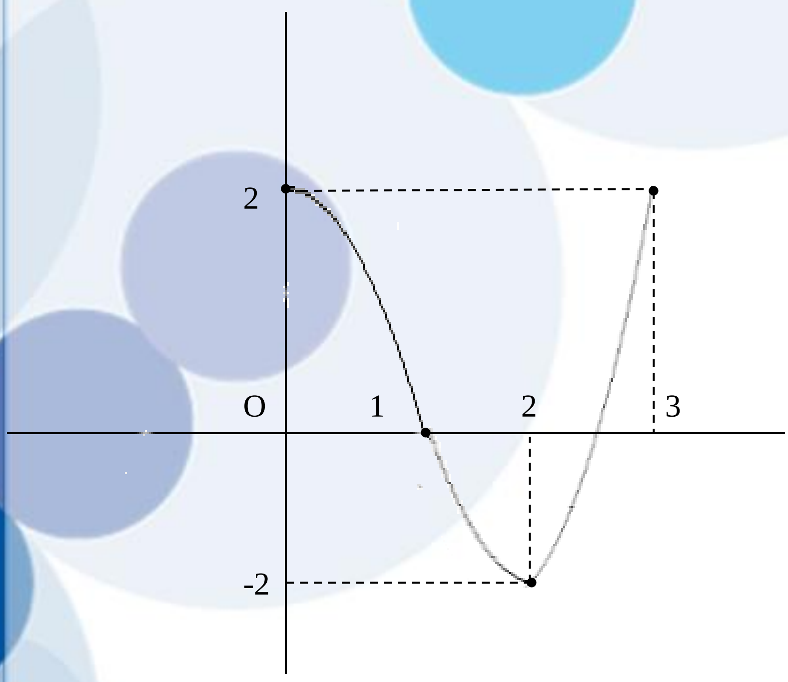
Για τα $x, x_0 \in (2,3)$ με $2 < x < x_0 \overset{f\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0)$ δηλαδή $f(x) < 0$ στο $(2, x_0)$

$x, x_0 \in (2,3)$ με $x_0 < x < 3 \overset{f\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Rightarrow} f(x_0) < f(x)$ δηλαδή $f(x) > 0$ στο $(x_0, 3)$.

Άρα η f μηδενίζεται μόνο για $x = x_0$ και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο.

Επομένως $\lim_{x\to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, ενώ $\lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, άρα δεν υπάρχει $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Γ.4



ΘΕΜΑ Δ

Δ.1

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\eta\mu x}{x}+\alpha & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ 2 & x=0 \\ x^3-3x^2+2, & x>0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $(0,2]$ ως πολυωνυμική

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3-3x^2+2\right)=2=f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο 0. Άρα τελικά είναι συνεχής στο $[0,2]$. Η f παραγωγίζεται στο $(0,2)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων, άρα ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Δ.2 Αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της είναι συνεχής στο 0 οπότε ισχύει

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=2 \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\eta\mu x}{x}+\alpha\right)=-1+\alpha\overset{(1)}{=}2\Leftrightarrow \alpha=3$$

Κανακάρη 99, Κορίνθου 255 | τηλ. 2610 625360 | email: info@kapalearn.gr

Δ.3 Για $\alpha = 3$

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\eta\mu x}{x}+3 & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ 2 & x=0 \\ x^3-3x^2+2, & x>0 \end{cases}$$

Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ η f παραγωγίζεται ως πηλίκο με

$$f'(x)=\left(-\frac{\eta\mu x}{x}\right)'=-\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}=\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2} \quad \text{με } g(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$$

Παρατηρώ ότι $g(0)=0$.

$$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-(\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)=x\eta\mu x>0 \quad \text{στο } \left[-\frac{\pi}{2},0\right)$$

αφού $x<0$ στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ και $\eta\mu x<0$ στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$

Επιπλέον η g είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ οπότε

για τα $x,0\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ με $-\frac{\pi}{2}\le x<0 \overset{\text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} g(x)<g(0)$ δηλαδή $g(x)<0$ στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$

τότε $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}<0$ στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$

Η f συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

Για $x>0$ η f παραγωγίζεται με

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 3x(x-2)\ge 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$$

Άρα $f'(x)>0$ στο $(2,+\infty)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

$f'(x)<0$ στο $(0,2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	0	+	
$f(x)$	Τ.Μ.	$\searrow$				$\nearrow$	

Δ.4

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2}\left(x^3 - 3x^2 + 2\right)dx =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right]_0^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \frac{16}{4} - 8 + 4 - 0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$$

Τότε η προς απόδειξη σχέση $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$ γίνεται $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$

Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ άρα λόγω Θεωρ. Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής έχει μέγιστο και ελάχιστο. Επειδή είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ έχει ελάχιστο το $f(0) = 2$ και μέγιστο το $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\frac{\pi}{2}} + 3 = -\frac{2}{\pi} + 3$ άρα ισχύει $2 \le f(x) \le -\frac{2}{\pi} + 3$ για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

άρα $f(x) - 2 \ge 0$ για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1 -1 η $f(x) - 2$ δεν είναι παντού 0 επομένως ισχύει

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(f(x) - 2\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2dx \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx > 2\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx > \pi \quad (1)$$

Επίσης $-\frac{2}{\pi}+3-f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1 -1 δεν είναι παντού 0 ισχύει

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\frac{2}{\pi}+3-f(x)\right)dx>0\Leftrightarrow\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\frac{2}{\pi}+3\right)dx>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{\pi}+3\right)\left(0+\frac{\pi}{2}\right)>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx\Leftrightarrow$$

$$-1+\frac{3\pi}{2}>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx \quad (2)$$

$$(1),(2)\to\pi<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx<\frac{3\pi}{2}-1$$

Δ.5

1ος τρόπος:

Ισχύει $0\leq x\leq 1\Leftrightarrow 0\geq-\frac{\pi}{2}x\geq-\frac{\pi}{2}$ δηλαδή $-\frac{\pi}{2}x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

$$0\leq x\leq 1\Leftrightarrow -1\leq -x\leq 0\overset{e^x\,\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow}\frac{1}{e}\leq e^{-x}\leq e^0\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e}\geq-\frac{\pi}{2}e^{-x}\geq-\frac{\pi}{2}\text{ ή}$$

$$-\frac{\pi}{2}\leq-\frac{\pi}{2}e^{-x}\leq-\frac{\pi}{2e}<0 \text{ άρα } -\frac{\pi}{2}e^{-x}\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$$

Θέτω $h(x)=f\left(-\frac{\pi}{2}x\right)-f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)$ που είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

$$h(0)=f(0)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2-\left(-\frac{2}{\pi}+3\right)=-1+\frac{2}{\pi}=\frac{2-\pi}{\pi}<0$$

$h(1)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)-f\left(-\frac{\pi}{2e}\right)>0$ διότι:

βρίσκω το πρόσημο της διαφοράς $-\frac{\pi}{2e}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\pi+\pi e}{2e}=\frac{\pi(e-1)}{2e}>0$

Άρα $-\frac{\pi}{2e}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)>0\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2e}>-\frac{\pi}{2}$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ άρα

$$f\left(-\frac{\pi}{2e}\right)<f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right)-f\left(-\frac{\pi}{2e}\right)>0$$

επομένως ισχύει $h(0)h(1)<0$ άρα λόγω Θεωρήματος Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον λύση ρ_1 στο $(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(\rho_1)=0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\rho_1\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-\rho_1}\right)$ (1)

Έστω ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα $\rho_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$h(\rho_2)=0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\rho_2\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-\rho_2}\right)$ (2)

$f\left(-\frac{\pi}{2}\rho_1\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-\rho_1}\right)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1 -1 στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ οπότε

$-\frac{\pi}{2}\rho_1=-\frac{\pi}{2}e^{-\rho_1} \Leftrightarrow \rho_1=e^{-\rho_1}$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\rho_2\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-\rho_2}\right)$ και επειδή η f είναι 1 -1 $-\frac{\pi}{2}\rho_2=-\frac{\pi}{2}e^{-\rho_2} \Leftrightarrow \rho_2=e^{-\rho_2}$

Δηλαδή υπάρχουν 2 λύσεις της $e^{-x}-x=0$ Αδύνατο διότι η $g(x)=e^{-x}-x$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1 -1, ($g'(x)=-e^{-x}-1<0$ στο $\Re$)

2ος τρόπος:

Ισχύει $0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\ge -\frac{\pi}{2}x\ge -\frac{\pi}{2}$ δηλαδή $-\frac{\pi}{2}x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

$0\le x\le 1 \Leftrightarrow -1\le -x\le 0 \overset{e^x\text{γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{e}\le e^{-x}\le e^0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e}\ge -\frac{\pi}{2}e^{-x}\ge -\frac{\pi}{2}$ ή

$-\frac{\pi}{2}\le -\frac{\pi}{2}e^{-x}\le -\frac{\pi}{2e}<0$ άρα $-\frac{\pi}{2}e^{-x}\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$, οπότε και 1-1

$f\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \Leftrightarrow f^{-1}\left(f\left(-\frac{\pi}{2}x\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}x=-\frac{\pi}{2}e^{-x} \Leftrightarrow$
$x=e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x}-x=0$

Άρα αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $e^{-x}-x=0$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$

Θέτω $g(x)=e^{-x}-x$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$

Κανακάρη 99, Κορίνθου 255 | τηλ. 2610 625360 | email: info@kapalearn.gr

$$\left.\begin{array}{r} g(0)=e^{-0}-0=1>0 \\ g(1)=e^{-1}-1=\dfrac{1}{e}-1=\dfrac{1-e}{e}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)\cdot g(1)<0$$

άρα ισχύει για την g το Θεώρ. Bolzano στο $[0,1]$, επομένως η $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. Επειδή $g(x)=e^{-x}-x$ είναι γνησίως φθίνουσα

($g'(x)=-e^{-x}-1<0$ στο $\Re$) άρα 1 -1, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.