ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}.$$

Λύση. Έχουμε :

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{21}{9}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}$$

$$=\left(-\frac{28}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\left(\frac{10}{3}\right)^{2}:\left(\frac{10}{9}\right)^{2}=\frac{100}{9}\cdot\frac{81}{100}=\frac{81}{9}=9.$$

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 350 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: *Οι αριθμοί* $11\frac{1}{9}\%$ *και* $14\frac{2}{7}\%$ *είναι μεικτοί.*

Λύση

Έστω x ευρώ η τιμή πώλησης του ψυγείου, οπότε η τιμή πώλησης του πλυντηρίου θα είναι $3150-x$ ευρώ. Η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $11\frac{1}{9}\%=\frac{100}{9}\%$, οπότε η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $x\cdot\frac{100/9}{100}=\frac{x}{9}$ ευρώ. Επίσης, η έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $14\frac{2}{7}\%=\frac{100}{7}\%$, οπότε η αντίστοιχη έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $(3150-x)\cdot\frac{100/7}{100}=\frac{3150-x}{7}=450-\frac{x}{7}$. Άρα έχουμε

$$\frac{x}{9}+450-\frac{x}{7}=390\Leftrightarrow\frac{x}{9}-\frac{x}{7}=-60\Leftrightarrow\frac{2x}{63}=60\Leftrightarrow x=63\cdot30\Leftrightarrow x=1890.$$

Επομένως, η τιμή πώλησης του ψυγείου ήταν 1890 ευρώ και η τιμή πώλησης του πλυντηρίου ήταν $3150-1890=1260$ ευρώ.

Πρόβλημα 3. Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ είναι το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Λύση

Έστω ότι τα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν τα ποσά $\alpha,\beta,\gamma,\delta,$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\beta=\frac{3\gamma}{4},\ \alpha=\frac{2\beta}{3},\ \delta=\alpha+\gamma\Rightarrow\alpha=\frac{2\beta}{3},\ \gamma=\frac{4\beta}{3},\ \delta=\frac{6\beta}{3}=2\beta$$

$$\frac{3\alpha}{2}=\beta=\frac{3\gamma}{4}=\frac{\delta}{2}\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2/3}=\frac{\beta}{1}=\frac{\gamma}{4/3}=\frac{\delta}{2}\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος το ποσό των 9690 ευρώ πρέπει να διαμεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ οποίοι, όπως διαπιστώνουμε από την τελευταία σχέση είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς $2,3,4$ και 6. Επομένως, αρκεί να διαμερίσουμε το ποσό των 9690 ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2,3,4 και 6. Έτσι, αν διαιρέσουμε τον αριθμό 9690 σε $2+3+4+6=15$ ίσα μέρη έχουμε μερίδιο το ποσό $9690:15=646$ ευρώ. Επομένως, το χωριό Α πλήρωσε $646\cdot2=1292$ ευρώ, το χωριό Β πλήρωσε $646\cdot3=1938$ ευρώ, το χωριό Γ πλήρωσε $646\cdot4=2584$ ευρώ και το χωριό Δ πλήρωσε $646\cdot6=3876$ ευρώ.

Διαφορετικά, από τις ισότητες

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}=\omega\Rightarrow\alpha=2\omega,\ \beta=3\omega,\ \gamma=4\omega,\ \delta=6\omega,$$

οπότε από την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=9690$ με αντικατάσταση λαμβάνουμε:

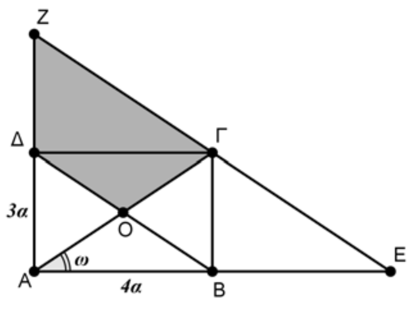
$$2\omega+3\omega+4\omega+6\omega=9690\Leftrightarrow15\omega=9690\Leftrightarrow\omega=646.$$

Άρα είναι: $\alpha=2\omega=1292,\ \beta=3\omega=1938,\ \gamma=4\omega=2584,\ \delta=6\omega=3876$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{A}B=\omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

$$AB=4\alpha\ cm,\ A\Delta=3\alpha\ cm.$$



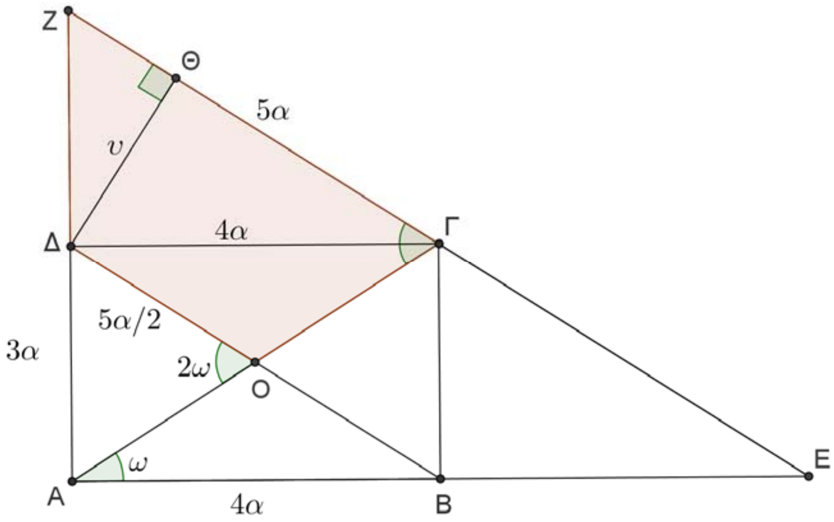
1.Βρείτε τη γωνία $A\hat{\Gamma}Z$ συναρτήσει της γωνίας ω.

2.Αποδείξετε ότι: $A\Gamma=\Gamma Z=\Gamma E$.

3.Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.

Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Λύση



Σχήμα 2

1. Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, έπεται ότι $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με $Ο\hat{Β}Α = \omega = Ο\hat{Α}Β$. Η γωνία $Α\hat{Ο}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΟΒ, οπότε θα είναι $Α\hat{Ο}Δ = Ο\hat{Α}Β + Ο\hat{Β}Α = 2\omega$. Από την παραλληλία $ΕΖ \parallel ΒΔ$, επειδή οι γωνίες $Α\hat{Γ}Ζ$ και $Α\hat{Ο}Δ$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, έχουμε: $Α\hat{Γ}Ζ = 2\omega$.

2. Επειδή $ΕΖ \parallel ΒΔ$ και $ΓΔ \parallel ΑΕ$, $ΒΓ \parallel ΑΖ$, τα τετράπλευρα ΔΒΕΓ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες. Άρα είναι: $ΒΔ = ΓΖ = ΓΕ$ Όμως οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $ΑΓ = ΒΔ$. Επομένως, θα είναι και $ΑΓ = ΓΖ = ΓΕ$.

3. Το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ, οπότε το ύψος του $ΓΔ = ΑΒ = 4\alpha\ cm$ είναι και διάμεσος. Αρα είναι: $ΑΖ = 2 \cdot ΑΔ = 6\alpha\ cm$ και $ΔΖ = 3\alpha\, cm$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 \Rightarrow ΒΔ^2 = (4\alpha)^2 + (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 \Rightarrow ΒΔ = 5\alpha\ cm.$$

Άρα είναι: $ΟΔ = \dfrac{ΒΔ}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$ και $ΓΖ = 5\alpha\, cm$.

Για το ύψος $\upsilon = ΔΘ$ έχουμε ότι:

$$Ε(ΓΔΖ) = \frac{ΔΓ \cdot ΔΖ}{2} = \frac{ΓΖ \cdot ΔΘ}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha \cdot 3\alpha}{2} = \frac{ΓΖ \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{12\alpha}{5}.$$

Επομένως, είναι:

$$Ε(ΔΟΓΖ) = \frac{(ΔΟ + ΓΖ)}{2} \cdot \upsilon = \frac{\left(\dfrac{5\alpha}{2} + 5\alpha\right)}{2} \cdot \frac{12\alpha}{5} = 9\alpha^2\ cm^2.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^3+ax^2+bx+c$, όπου a,b,c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x)=\mathrm{P}(2x)-19\mathrm{P}(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x)=3x(3x+2)^2$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$Q(x)=\mathrm{P}(2x)-19\mathrm{P}(-x)=(2x)^3+a(2x)^2+b\cdot 2x+c-19\left((-x)^3+a(-x)^2+b(-x)+c\right)$$

$$=8x^3+4ax^2+2bx+c+19x^3-19ax^2+19bx-19c=27x^3-15ax^2+21bx-18c.$$

(β) Από την ισότητα $Q(x)=3x(3x+2)^2$ έχουμε:

$$27x^3-15ax^2+21bx-18c=3x(3x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-15ax^2+21bx-18c=3x\left(9x^2+12x+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-15ax^2+21bx-18c=27x^3+36x^2+12x$$

$$\Leftrightarrow \{-15a=36,\ 21b=12,\ -18c=0\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{a=-\frac{12}{5},\ b=\frac{4}{7}, c=0\right\}.$$

Άρα είναι: $\mathrm{P}(x)=x^3-\dfrac{12}{5}x^2+\dfrac{4}{7}x.$

Πρόβλημα 2. Οι πραγματικοί αριθμοί a,b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b)\neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)}+\frac{b(a+b)}{a(a-b)}=\frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2=b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\dfrac{a}{b}$.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)}+\frac{b(a+b)}{a(a-b)}=\frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}\Leftrightarrow b(a-b)^2+b(a+b)^2=a\left(3ab-b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow b\left[(a-b)^2+(a+b)^2\right]-ab(3a-b)=0\Leftrightarrow b\left(2a^2+2b^2\right)-ab(3a-b)=0$$

$$\Leftrightarrow b\left(2a^2+2b^2-3a^2+ab\right)=0\overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow}2b^2-a^2+ab=0\Leftrightarrow a^2=b(a+2b).$$

(β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$a^2-ab-2b^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-2=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow x^2-1-x-1=0,\quad x=\frac{a}{b}\Leftrightarrow(x-1)(x+1)-(x+1)=0,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0,\ \ x=\frac{a}{b} \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}=-1 \text{ (απορρίπτεται, γιατί } a\neq -b) \text{ ή } \frac{a}{b}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=2.$$

Πρόβλημα 3.

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz}=100x+10y+z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx}=100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyz}=100x+10y+z=43(x+y+z)+9 \qquad (1)$$

$$\overline{zyx}=100z+10y+x=30(x+y+z)+6, \qquad (2)$$

από τις οποίες για τη διαφορά των δύο αριθμών προκύπτει ότι:

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=99(x-z)=13(x+y+z)+3. \qquad (3)$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $10\leq x+y+z\leq 23$, γιατί, αν ήταν $x+y+z\geq 24$, τότε θα είχαμε $\overline{xyz}>43\cdot 24+9=1041$, άτοπο. Επομένως για το δεύτερο μέλος της σχέσης (3) έχουμε:

$$10\cdot 13+3\leq 13(x+y+z)+3\leq 23\cdot 13+3$$

$$\Rightarrow 133\leq 13(x+y+z)+3\leq 302$$

$$\Rightarrow 133\leq 99(x-z)\leq 302,$$

οπότε οι δυνατές τιμές για τη διαφορά των δύο ακραίων ψηφίων είναι 2 ή 3.

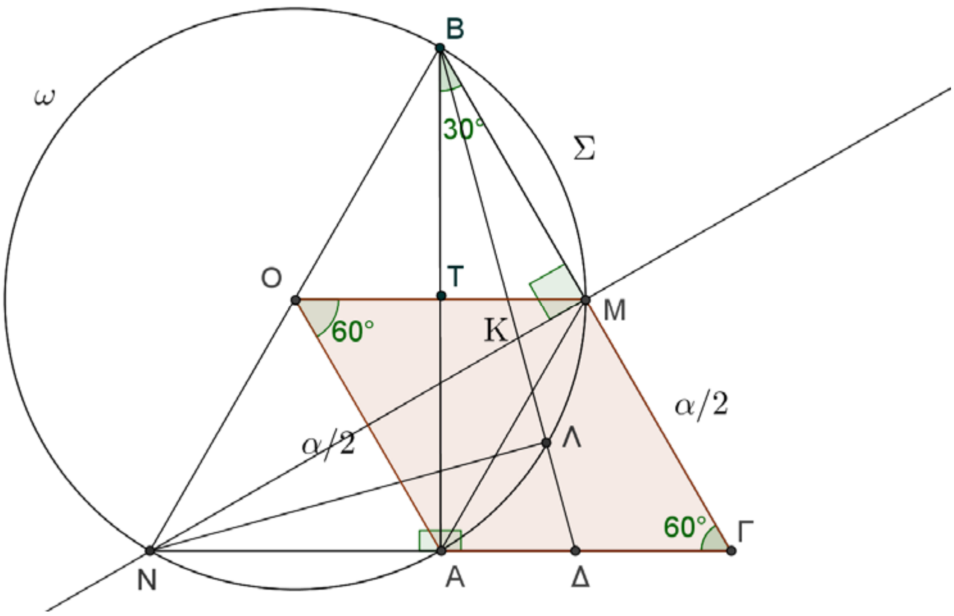
- Για $x-z=2$, από την (3) προκύπτει: $x+y+z=15$ οπότε από τις (1) και (2) λαμβάνουμε $\overline{xyz}=654$ και $\overline{zyx}=456$.
- Για $x-z=3$, από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα των ψηφίων $x+y+z$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=90^\circ, \hat{\Gamma}=60^\circ$ και υποτείνουσα $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον Μ της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ (το Δ είναι σημείο της ΑΓ) στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΔ.

1. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{N\Lambda}\perp \mathrm{B\Delta}$.
2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις ΜΓ, ΑΓ και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδό χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Σημείωση: *Το χωρίο Ε είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.*



Σχήμα 2

Λύση

1. Έστω ότι οι ευθείες $KM, A\Gamma$ τέμνονται στο σημείο N. Τότε

$$N\hat{K}\Delta = B\hat{K}M = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} = 75^\circ.$$

Επίσης η γωνία $N\hat{\Delta}K$ ως εξωτερική του τριγώνου $\Delta\Gamma B$ ισούται με

$$N\hat{\Delta}K = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2} = 60^\circ + \frac{30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Συνεπώς το τρίγωνο $NK\Delta$ είναι ισοσκελές με $NK = N\Delta$. Αφού το Λ είναι μέσον της βάσης $K\Delta$ του ισοσκελούς τριγώνου $NK\Delta$, έπεται ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.

2. Το τρίγωνο $B\Gamma N$ είναι ισοσκελές με $N\Gamma = NB$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο $B\Gamma N$ είναι ισόπλευρο, οπότε $BN = \alpha$. ΟΙ ΒΑ και ΝΜ είναι ύψη και διάμεσοι αυτού, οπότε $A\Gamma = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$ Ο κύκλος διαμέτρου BN έχει κέντρο, έστω Ο και περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Το τρίγωνο ΟΑΜ είναι ισοσκελές και έχει

$$A\hat{O}M = 2 \cdot A\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \left(90^\circ - 60^\circ\right) = 60^\circ.$$

Επίσης $A\hat{O}B = 2 \cdot \Gamma\hat{N}B = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, οπότε $M\hat{O}B = 60^\circ$ και το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ισόπλευρο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΟ είναι ρόμβος που αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, οπότε το ύψος του ΑΤ ισούται με το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, δηλαδή

$$AT = \frac{\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Το εμβαδόν του χωρίου E δίνεται από τη σχέση

$$E\left(\Gamma\overset{\frown}{AM}\right) = E\left(A\Gamma BO\right) - E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(O\overset{\frown}{AM}\right). \qquad (1)$$

Έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma MO}\right)=\left(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\right)\cdot\left(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma\right)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} \qquad (2)$$

Επίσης

$$\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{24} \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\mathrm{E}\left(\Gamma\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right)-\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AM}}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi\alpha^2}{24}=\frac{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)\alpha^2}{24}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{\alpha^2-1}{n^2+\alpha n}\cdot\left(\dfrac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\dfrac{\alpha+n-\alpha n^3-n^4}{1-\alpha^2}$, με α πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n>1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A}=n^2+n+1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο Α να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{(\alpha+n)-n^3(\alpha+n)}{-(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2-n^2+n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{n(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+n)(1-n^3)}{n(n+\alpha)(n-1)(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{n^3-1}{n-1}=n^2+n+1.\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι: $n^2<\mathrm{A}=n^2+n+1<n^2+2n+1=(n+1)^2$, δηλαδή ο ακέραιος Α βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων, οπότε δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου ακέραιου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 40n \quad (1)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 46(n-1) \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = 28(n-1) \quad (3)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} = 32(n-2) \quad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 46 - 6n, \qquad x_n = 12n + 28, \qquad x_1 + x_n = 8n + 64,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

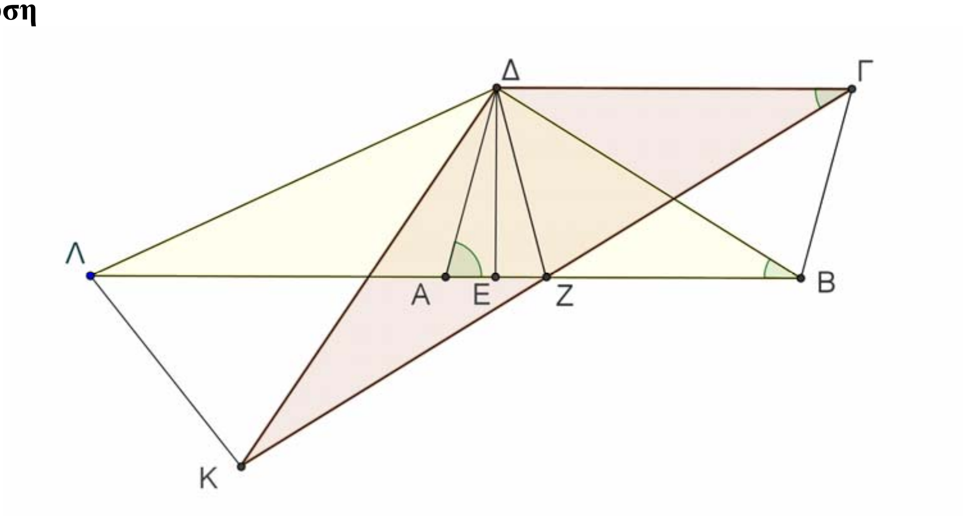
$$x_1 + x_n = (46 - 6n) + \left(12n + 28\right) = 8n + 64 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 16$ και $x_5 = 88$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $ΑΒ = ΓΔ = ΒΔ$. Φέρουμε το ύψος του $ΔΕ$, όπου Ε σημείο της πλευράς ΑΒ. Έστω Ζ το συμμετρικό της κορυφής Α ως προς κέντρο το σημείο Ε. Έστω επίσης Κ το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Ζ και Λ το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς κέντρο το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε $ΔΖ = ΔΑ$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους ΔΕ. Επίσης είναι $ΔΑ = ΒΓ$, από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Επομένως θα είναι $ΔΖ = ΒΓ$. Επιπλέον

$$Δ\hat{Ζ}Β = 180^\circ - Δ\hat{Ζ}Α = 180^\circ - Δ\hat{Α}Β = Α\hat{Β}Γ.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΖΒΓ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΔΖ = ΒΓ και ΖΒ κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $ΔΒ = ΖΓ \Rightarrow ΑΒ = ΖΓ \Rightarrow 2 \cdot ΑΒ = 2 \cdot ΖΓ \Rightarrow ΒΛ = ΓΚ$

- $Z\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{Z}B \Rightarrow Z\hat{B}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}Z$, αφού από $\Delta\Gamma \parallel ZB$ ισχύει ότι: $\Gamma\hat{Z}B = \Delta\hat{\Gamma}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα ΔΒΛ και ΔΓΚ έχουν: $\Delta B = \Delta\Gamma$, ΒΛ=ΓΚ και $\Delta\hat{\Gamma}K = \Delta\hat{B}\Lambda$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους ΔΛ και ΔΚ ίσες.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyzw}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w = 327(x + y + z + w) + 14 \qquad (1)$$

$$\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x = 227(x + y + z + w) + 16, \qquad (2)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\overline{xyzw} - \overline{wzyx} = 999(x - w) + 90(y - z) = 100(x + y + z + w) - 2. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $17 \le x + y + z + w \le 30$, οπότε

$$1698 \le 100(x + y + z + w) - 2 \le 2998$$

$$\Rightarrow 1698 \le 999(x - w) + 90(y - z) \le 2998.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $x - w \in \{1, 2, 3\}$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x - w = 1$ πρέπει $y - z \in \{8, 9\}$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.
- Για $x - w = 2$, από την (3) λαμβάνουμε:

  $$9(y - z) = 10(x + y + z + w - 20) = \text{πολλαπλάσιο του} 10,$$

  οπότε πρέπει: $y - z = 0$ και $x + y + z + w = 20$. Τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

  $$\overline{xyzw} = 6554 \text{ και } \overline{wzyx} = 4556.$$

- Για $x - w = 3$ πρέπει $y - z = 0$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-1} = 3.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Για $x \in \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ έχουμε:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-1}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}-1+\frac{2}{x-2}-1+\frac{3}{x-1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{x-3}+\frac{4-x}{x-2}+\frac{4-x}{x-1}=0 \Leftrightarrow (4-x)\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4-x=0 \text{ ή } \frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0$$

$$\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{12\pm\sqrt{12}}{6} \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

2^{ος} τρόπος

Για $x \in \mathbb{R}-\{1,2,3\}$ με απαλοιφή παρανομαστών έχουμε:

$$3(x-1)(x-2)(x-3)=(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-3)+3(x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=x^2-3x+2+2\left(x^2-4x+3\right)+3\left(x^2-5x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-18x^2+33x-18=6x^2-26x+26 \Leftrightarrow 3x^3-24x^2+59x-44=0$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι: $\pm1,\pm2,\pm4,\pm11,\pm22,\pm44$, από τις οποίες μόνο το 4 ικανοποιεί την εξίσωση. Έτσι με το σχήμα Horner έχουμε

$$3x^3-24x^2+59x-44=(x-4)\left(3x^2-12x+11\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-4=0 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$ θετικοί ακέραιοι που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δίνεται επίσης ότι το άθροισμά τους είναι τέλειος κύβος και το άθροισμα των 5 μεσαίων όρων $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$, είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του όρου α_4.

Λύση

Έστω x ο τέταρτος στη σειρά αριθμός. Τότε οι δεδομένοι αριθμοί θα έχουν τη μορφή:

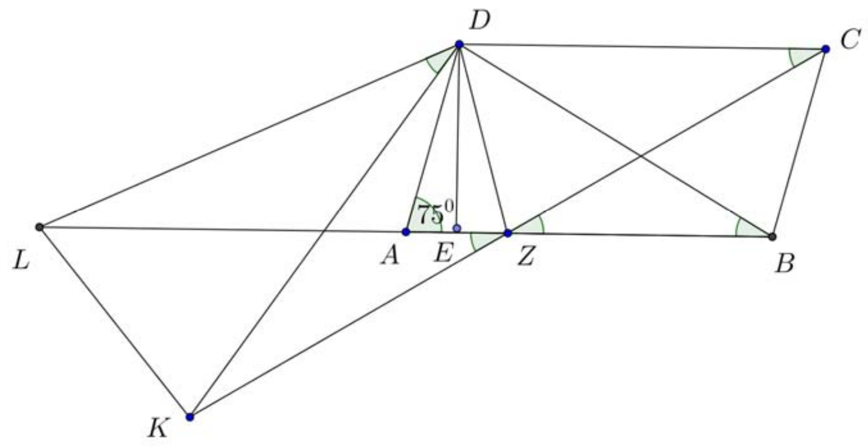
$$\alpha_1=x-3d,\alpha_2=x-2d,\alpha_3=x-d,\alpha_4=x,\alpha_5=x+d,\alpha_6=x+2d,\alpha_7=x+3d.$$

Επομένως το άθροισμά τους ισούται με $7x$ και το άθροισμα των 5 μεσαίων ισούται με $5x$. Επομένως, θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο φυσικό αριθμό x που είναι τέτοιος, ώστε ο $7x$ ναι είναι τέλειος κύβος και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο.
Για να είναι ο $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 7^2, ενώ για να είναι και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 5. Για να παραμείνει όμως το $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει το x να είναι πολλαπλάσιο του 5^3. Τελικά, το x πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5^3\cdot7^2$, οπότε η ελάχιστη τιμή του όρου α_4 είναι $5^3\cdot7^2$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABCD$ τέτοιο ώστε $AB=BD=CD$ και με τη γωνία $\hat{A}=75^\circ$. Φέρουμε το ύψος του DE, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E. Έστω επίσης K το συμμετρικό της κορυφής C ως προς κέντρο το σημείο Z και L το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $K\hat{D}L$.

Λύση



Σχήμα 4

Έχουμε $DZ = DA$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους DE. Επίσης είναι $DA = BC$, από το παραλληλόγραμμο $ABCD$. Επομένως θα είναι $DZ = BC$. Επιπλέον

$$D\hat{Z}B = 180^\circ - D\hat{Z}A = 180^\circ - D\hat{A}B = A\hat{B}C.$$

Επομένως τα τρίγωνα DZB και ZBC έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($DZ = BC$ και τη ZB κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $DB = ZC \Rightarrow AB = ZC \Rightarrow 2 \cdot AB = 2 \cdot ZC \Rightarrow BL = CK$
- $Z\hat{B}D = CZB \Rightarrow Z\hat{B}D = D\hat{C}Z$, αφού από $DC \parallel ZB$ ισχύει ότι: $C\hat{Z}B = D\hat{C}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα DBL και DCK έχουν: $DB = DC$, $BL = CK$ και $D\hat{C}K = D\hat{B}L$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους DL και DK ίσες και επιπλέον $D\hat{L}B = D\hat{K}C$, οπότε το τετράπλευρο $DLKZ$ είναι εγγράψιμο. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} K\hat{D}L = K\hat{Z}L = B\hat{Z}C & \quad \text{(ως κατά κορυφή)} \\ = Z\hat{B}D & \quad \text{(από τα ίσα τρίγωνα } DZB \text{ και } ZBC\text{)} \\ = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ & \quad \text{(από το ισοσκελές τρίγωνο } ABD\text{).} \end{aligned}$$

Σημείωση. *Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι με το μετασχηματισμό στροφής με κέντρο το σημείο D κατά γωνία $B\hat{D}C = 30^\circ$, το τρίγωνο CDK θα συμπέσει με το τρίγωνο BDL, οπότε $K\hat{D}L = 30^\circ$.*

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 4x^2 + kx + m$ και υποθέτουμε ότι οι ρίζες του είναι διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους k, m δεν είναι ακέραιος.

Λύση

Έστω $0 < x_1 < x_2 < 1$ οι ρίζες του $f(x)$. Τότε:

$$f(x) = 4(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1).$$

Υποθέτουμε ότι οι k, m είναι ακέραιοι. Τότε οι αριθμοί $f(0) = m$ και $f(1) = 4 + k + m$ είναι ακέραιοι . Αφού το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του 4 εκτός των ριζών και οι αριθμοί 0 και 1 είναι εκτός των ριζών, έπεται ότι $f(0) > 0$ και $f(1) > 0$, οπότε, αφού είναι ακέραιοι, θα είναι $f(0) \geq 1$ και $f(1) \geq 1$. Από την (1) για $x = 0$ και $x = 1$ παίρνουμε: $4x_1x_2 \geq 1$ και $4(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 1$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \geq 1 . \qquad (2)$$

Όμως ισχύουν:

$$4x_1(1 - x_1) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)^2 \geq 0 \text{ και } 4x_2(1 - x_2) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_2 - 1)^2 \geq 0 \quad (3)$$

οπότε με πολλαπλασιασμό των δύο τελευταίων κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \leq 1 . \qquad (4)$$

Επομένως πρέπει να έχουμε ισότητα:

$$16x_1\left(1 - x_1\right)x_2\left(1 - x_2\right) = 1 , \qquad (5)$$

η οποία, λόγω των (3), ισχύει μόνον όταν $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς υποθέσαμε ότι οι ρίζες είναι διακεκριμένες.

Επομένως, δεν είναι δυνατόν να είναι και δύο αριθμοί k και m ακέραιοι.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 56. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 40, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 50n \qquad (1)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 56(n - 1) \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = 40(n - 1) \qquad (3)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} = 45(n - 2) \qquad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 56 - 6n, \qquad x_n = 10n + 40, \qquad x_1 + x_n = 5n + 90 ,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

$$x_1 + x_n = (56-6n) + (10n+40) = 5n+90 \Leftrightarrow n = 6,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 20$ και $x_6 = 100$.

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b+a} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{3}{2},$$

να αποδειχθεί ότι: $a = b$.

Λύση

Θέτουμε $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = x$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x = 1$. Η δοσμένη σχέση τότε γίνεται:

$$\frac{1}{1+x^3} + x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 + 2x(x^3+1) = 3(x^3+1) \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4 - x^3) - (x^3 - x) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3 - x^2 - x + 1) = 0$$

Όμως $2x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 + (x^3 - x^2) - (x-1) = x^3 + (x-1)^2(x+1) > 0$. Επομένως πρέπει $x = 1$ και άρα $a = b$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Ο αριθμός 2018 γράφεται ως άθροισμα k τετραγώνων διαφορετικών ακεραίων.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο μεγαλύτερος τέτοιος k είναι ο n και $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους ακέραιοι ώστε $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 2018$. Τότε

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ οπότε } 2018 \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 18$ η τιμή της παράστασης στο δεξί μέλος ισούται με 2109 επομένως $n \leq 17$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι το 2018 γράφεται ως άθροισμα 17 τετραγώνων, διαφορετικών ανά δύο ακεραίων.

Έχουμε ότι $1^2 + \ldots + 19^2 = 2470$, οπότε αν βρούμε δύο τετράγωνα με άθροισμα $2470 - 2018 = 452$, τότε το 2018 θα γράφεται ως το άθροισμα των υπόλοιπων 17 τετραγώνων. Γράφουμε:

$$452 = 2^2 \cdot 113 = 2^2 \cdot (8^2 + 7^2) = 16^2 + 14^2,$$

οπότε $2018 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 13^2 + 15^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2$, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4

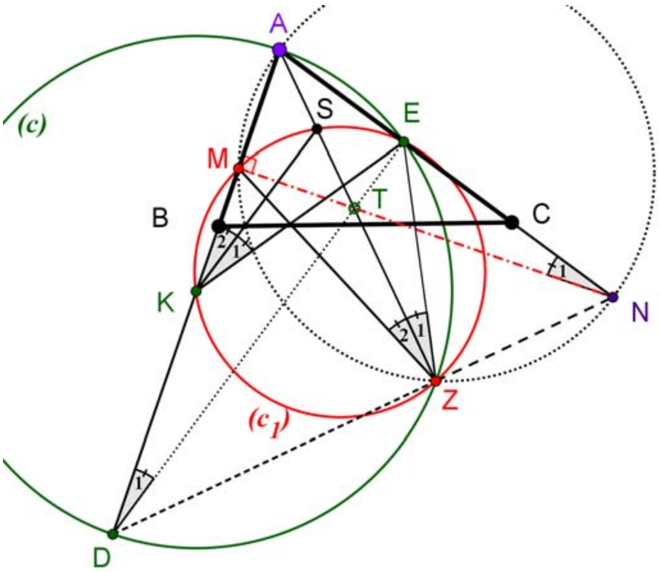
Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < \mathrm{A}C < BC$. Στη προέκταση της AB (προς το μέρος του B), θεωρούμε σημείο K και στη συνέχεια θεωρούμε τον κύκλο $c(K, KA)$ (με κέντρο το K και ακτίνα KA). Ο κύκλος (c) τέμνει την ευθεία AB στο σημείο D και την ευθεία AC στο σημείο E. Σε τυχόν σημείο M εσωτερικό της πλευράς AB θεωρούμε κάθετη προς την ευθεία AB η οποία τέμνει την ευθεία AC στο σημείο

N. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KME (έστω (c_1)) τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Έστω ότι η AZ, τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο S. Από τα ορθογώνια τρίγωνα AED και AMN έχουμε:

$$A\hat{D}E = \hat{D}_1 = \hat{N}_1 = 90^o - \hat{A}. \quad (1)$$



Σχήμα 5

Οι γωνίες $\hat{D}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο AE, άρα: $$\hat{D}_1 = \hat{Z}_1 \quad (2)$$

Οι γωνίες $\hat{K}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SE, άρα: $$\hat{K}_1 = \hat{Z}_1 \quad (3)$$

Από τις ισότητες $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_1 = 90^o - \hat{A}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο KAE ($KA = KE$ ως ακτίνες του κύκλου (c)) έχουμε:

$$A\hat{K}E = \hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 180 - 2\hat{A}.$$

Επειδή όμως $\hat{K}_1 = 90^\circ - A$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_2 = 90^\circ - A$.

Οι γωνίες $\hat{K}_2$ και $\hat{Z}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SM, άρα: $$\hat{K}_2 = \hat{Z}_2. \quad (4)$$

Τελικά συμπεραίνουμε ότι $\hat{Z}_2 = \hat{N}_1$, οπότε το τετράπλευρο $AMZN$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια $A\hat{Z}N = A\hat{M}N = 90^\circ$.

Η τελευταία ισότητα ($A\hat{Z}N = 90^\circ$) σε συνδυασμό με την ισότητα $A\hat{Z}D = 90^o$ (η γωνία $A\hat{Z}D$ βαίνει στη διάμετρο AD του κύκλου (c)), αποδεικνύει ότι τα σημεία D, Z, N είναι συνευθειακά.

Οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν), διότι είναι ύψη του τριγώνου ADN.