



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

(α) Να βρεθούν όλα τα μη μηδενικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, με α, β μη αρνητικούς ακέραιους και $\alpha + \beta = 4$.

(β) Για το μικρότερο από τα κλάσματα του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(2 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{6}{7} - 3 \left(\frac{2 \cdot \alpha}{\beta} - \frac{9}{27}\right).$$

Πρόβλημα 2.

Ο θετικός ακέραιος A έχει το γινόμενο των ψηφίων του ίσο με 12, το άθροισμα των ψηφίων του ίσο με 9 και επιπλέον διαιρείται με το 4. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του A .

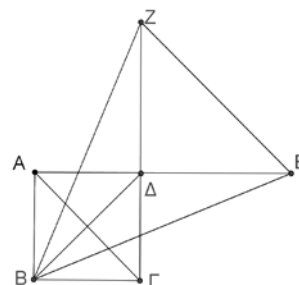
Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α . Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = B\Delta$ και την πλευρά $\Gamma\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = B\Delta$, (δείτε το διπλανό σχήμα).

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Delta\hat{B}E$ και $\Delta\hat{Z}B$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$ και EZ είναι παράλληλες.

Σημείωση: Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.



Πρόβλημα 4

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό A για να πάρει το τρένο στην πόλη B . Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού A από το σταθμό του τρένου στη πόλη B .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

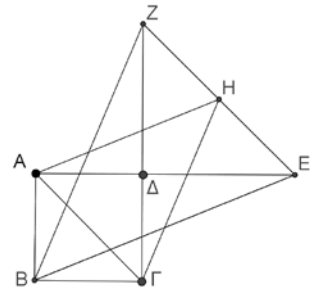
$$A = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}, \beta = \left(-\frac{3}{2}\right)^3, \gamma = -\frac{27}{16}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΒΔ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΒΔ. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:

- (α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.
(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ.
(γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.

Σημείωση: Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.



Πρόβλημα 3

- (α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5 .
(β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5 .

Πρόβλημα 4

Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, διαπιστώνει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$x^2 + 4x - 9 = 4|x|.$$

Πρόβλημα 2

Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\overline{abc} = (a + b + c)^2 + a + b + c$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ώστε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 240^\circ$ και $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται πάνω στην πλευρά ΑΔ.

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι Α και Β ανέλαβαν την εκτέλεση ενός έργου. Ο Β ξεκίνησε να εργάζεται μία ώρα μετά το ξεκίνημα του Α. Τρεις ώρες μετά το ξεκίνημα της εργασίας του Α διαπίστωσαν ότι έχουν ακόμη να εκτελέσουν τα $\frac{9}{20}$ του έργου. Όταν τελείωσε το έργο διαπίστωσαν ότι ο καθένας τους είχε εκτελέσει το μισό του έργου. Να βρείτε σε πόσες ώρες μπορεί ο καθένας από τους δύο φίλους να τελειώσει το έργο, αν εργάζεται μόνος του.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0$, έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + ax + b = a|x|$$

να έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις.

Είναι δυνατόν η εξίσωση να έχει τρεις διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_{2017} + 2017 = 0 \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{2017}^4 = (-x_1)^3 + (-x_2)^3 + \dots + (-x_{2017})^3 \end{array} \right\}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) και τυχόν σημείο Δ της πλευράς AB . Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη στην ακτίνα OA , η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Αν E είναι το μέσο της $A\Delta$ και M το μέσο της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα σημεία B, E, Z και M είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ρητών (a,b) που είναι τέτοια ώστε οι αριθμοί $\frac{ab+1}{a}$

και $\frac{ab+1}{b}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$x^4 - 32x^2 + 257 - \frac{4|x+2|}{x^2 + 4x + 8} = 0.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός $A = \sqrt{n(n+182)}$ είναι ρητός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) και τυχόν σημείο Δ του μικρού τόξου AB . Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την AB στο E , την $A\Gamma$ στο Z και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ (για δεύτερη φορά) στο H . Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου $B\Delta E$ τέμνει την BZ στο K και την $B\Gamma$ στο Λ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_2 του τριγώνου $\Gamma Z H$ τέμνει την $E\Gamma$ στο M και την $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, M, Z, E βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο, στον οποίο εφάπτεται η ευθεία NZ .

Πρόβλημα 4

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την ισότητα

$$f(2xf(y) + y) + f(2x(y+1)) = f(2x+y) + 4xy, \quad (1)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- (i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(a) = 1$.
- (ii) Να βρείτε τον τύπο της f .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!