ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=(4x+5y)-36x+35y+(8:4-2)^2.$$

Λύση
Η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=(4x+5y)-36x+35y+(8:4-2)^2\\&=4x+5y-36x+35y+(2-2)^2\\&=-32x+40y+0^2=-8(4x-5y)+0=-8\cdot 10=-80.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2$, $\mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8$, $x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Λύση
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αν ισχύει:

$$\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma} \text{ ή } \mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma} \text{ ή } \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow 3x-2=x+12 \text{ ή } 3x-2=2x+8 \text{ ή } 2x+8=x+12$$

$$\Leftrightarrow 2x=14 \text{ ή } x=10 \text{ ή } x=4 \Leftrightarrow x=7 \text{ ή } x=10 \text{ ή } x=4.$$

Από τη λύση των παραπάνω εξισώσεων διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει τιμή του x που να επαληθεύει την ισότητα $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{B\Gamma}$ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Λύση
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}=\alpha\beta$. Μετά την αύξηση του μήκους των πλευρών του τα μήκη των πλευρών του νέου ορθογωνίου είναι:

$$\alpha' = \alpha + \frac{20\alpha}{100} = \alpha + \frac{2\alpha}{10} = \frac{12\alpha}{10} \text{ και } \beta' = \beta + \frac{30\beta}{100} = \beta + \frac{3\beta}{10} = \frac{13\beta}{10}.$$

Έτσι το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου θα είναι:

$$\mathrm{E}' = \frac{12\alpha}{10} \cdot \frac{13\beta}{10} = \frac{156\alpha\beta}{100} = \alpha\beta + \frac{56\alpha\beta}{100} = \mathrm{E} + \frac{56\alpha\beta}{100}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}' - \mathrm{E} = \frac{56\mathrm{E}}{100} \Rightarrow \frac{\mathrm{E}' - \mathrm{E}}{\mathrm{E}} = \frac{56}{100}.$$

Άρα η αύξηση της τιμής του εμβαδού είναι 56% πάνω στην αρχική τιμή του.

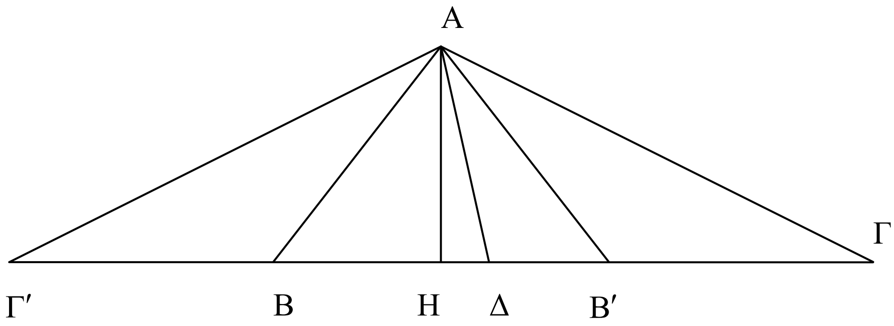
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AB}$) με τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του AH και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$.

(α) Αν $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \Gamma'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους AH, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Λύση



(α) Από την υπόθεση έχουμε $\hat{\mathrm{A}} = 2\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} - 20^0$, οπότε από τη γνωστή ισότητα $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0$ λαμβάνουμε $2\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} - 20^0 = 180^0 \Leftrightarrow 4\hat{\mathrm{B}} = 200^0 \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} = 50^0$.

Άρα έχουμε και $\hat{\mathrm{A}} = 100^0$ και $\hat{\Gamma} = 30^0$.

Λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα ΑΗ, τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{AB}'\Gamma'$ είναι ίσα ($\mathrm{A}' \equiv \mathrm{A}$, αφού το σημείο Α ανήκει στον άξονα συμμετρίας), οπότε θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}'$ και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Gamma}'$. Άρα τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή.

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{\mathrm{B}}' = \mathrm{B} = 50^0 \;,\; \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma} = 30^0,$$

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}' = 180^0 - 2 \cdot 50^0 = 80^0 \text{ και } \Gamma'\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 2 \cdot 30^0 = 120^0.$$

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ έχουμε την ισότητα:

$$\mathrm{H}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 90^\circ - \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{H} \qquad (1)$$

Όμως από το τρίγωνο ΑΒΔ λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 180^0 - \hat{\mathrm{B}} - \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 180^0 - 50^0 - 50^0 = 80^0. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{H}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 90^\circ - 80^0 = 10^0.$$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3.$$

Λύση

Η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3\\ &=\frac{1}{16^2\left(a+2b\right)^2}-\frac{1}{32^3\left(a+2b\right)^3}+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3\\ &=\frac{1}{\left(2^4\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(2^5\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3}+\left[\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3\\ &=\frac{1}{2^{8-2}}-\frac{1}{2^{15-3}}+\frac{1}{2^{4\cdot 3}}=\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{12}}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Λύση

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy$ λαμβάνουμε:

$$x^2+4y^2+2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy+4xy\Rightarrow\left(x+2y\right)^2=\frac{32}{3}xy,$$

$$x^2+4y^2-2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy-4xy\Rightarrow\left(x-2y\right)^2=\frac{8}{3}xy>0,$$

οπότε έχουμε:

$$\mathrm{A}^2=\frac{\left(x+2y\right)^2}{\left(x-2y\right)^2}=\frac{\frac{32}{3}xy}{\frac{8}{3}xy}=4\Leftrightarrow\mathrm{A}=2\ \text{ή}\ \mathrm{A}=-2.$$

Δεύτερος τρόπος

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy$ με διαίρεση των δύο μελών με y^2 και την αντικατάσταση $u=\frac{x}{y}$ λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+4-\frac{20}{3}\left(\frac{x}{y}\right)=0 \Leftrightarrow u^2-\frac{20}{3}u+4=0 \Leftrightarrow \left(u-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{64}{9}=0$$

$$u-\frac{10}{3}=\frac{8}{3} \text{ ή } u-\frac{10}{3}=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow u=6 \text{ ή } u=\frac{2}{3}.$$

Για $u=\frac{x}{y}=6$ λαμβάνουμε $x=6y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{6y+2y}{6y-2y}=2.$

Για $u=\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ λαμβάνουμε $3x=2y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{x+3x}{x-3x}=-2.$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$,που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$ab+4(a+b)=10a+b,$$

όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$ab+4a+4b=10a+b \Leftrightarrow ab-6a+3b=0$$

$$\Leftrightarrow a(b-6)+3(b-6)=-18 \Leftrightarrow (a+3)(b-6)=-18$$

$$\Leftrightarrow (a+3)(6-b)=18.$$

Από την τελευταία εξίσωση, δεδομένου ότι $4\leq a+3\leq 12$, προκύπτει ότι:

$$(a+3,6-b)=(6,3) \text{ ή } (9,2)$$

$$\Leftrightarrow (a,b)=(3,3) \text{ ή } (6,4),$$

δηλαδή οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι 33 και 64.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Λύση

Έστω ότι η ευθεία ΓΜ τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε. Η ΓΕ είναι ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, αν είναι $\Gamma\mathrm{E}\perp \mathrm{A}\Delta$ ή $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta=90^\circ$. Αρκεί να ισχύει: $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta+\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.

Όμως είναι

$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}, \qquad (1)$$

λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία ΓΔ.

Επίσης έχουμε

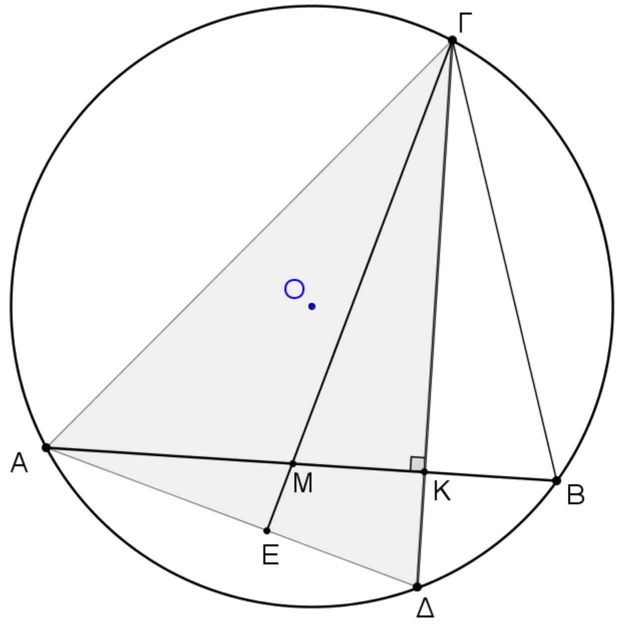
$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K},$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}$, $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}, \qquad (2)$$

ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:



$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = 180^0 - \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = 180^0 - 90^\circ = 90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$ και $\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου ΓΚΒ. Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $\mathrm{AK} \perp \Gamma\Delta$, δηλαδή ΑΚ είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}},$$

όπου m, n ακέραιοι και x, y πραγματικοί αριθμοί με $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ και $xy \neq -1$.

Λύση

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}} = \frac{\left(\frac{x^2y^2 - 1}{y^2}\right)^m \left(\frac{xy+1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(\frac{x^2y^2 - 1}{x^2}\right)^n \left(\frac{xy-1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}}$$

$$= \frac{\left(x^2y^2 - 1\right)^{m-n} \cdot x^{2n}}{y^{2m}} \cdot \frac{(xy+1)^{n-m} \cdot y^{m-n}}{(xy-1)^{m-n} \cdot x^{n-m}} \cdot \frac{y^{m+n}}{x^{m+n}}$$

$$= \frac{(xy+1)^{m-n}(xy-1)^{m-n} \cdot (xy+1)^{n-m}}{(xy-1)^{m-n}} \cdot x^{2n-2n} \cdot y^{2m-2m} = 1.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α , β αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \text{ και } \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37.$$

Λύση

Από την ισότητα $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|\geq 0$ προκύπτει ότι:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2=\left(|\alpha|+|\beta|\right)^2$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$$

$$-\alpha\beta=|\alpha\beta| \Leftrightarrow (\alpha\geq 0 \text{ και } \beta\leq 0) \text{ ή } (\alpha\leq 0 \text{ και } \beta\geq 0).$$

Από τη δεύτερη ισότητα λαμβάνουμε:

$$\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta+2)-(\alpha+\beta+2)=35$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+2)(\alpha^2\beta^2-1)=35,$$

από την οποία έχουμε ότι ο $\alpha^2\beta^2-1$ είναι ένας από τους παράγοντες του 35, δηλαδή έχουμε:

$$\alpha^2\beta^2-1=\pm 1 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 5 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 7 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 35$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=2 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=0 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-4 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=8$$

$$\text{ή } \alpha^2\beta^2=-6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=36 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-34.$$

Οι αποδεκτές περιπτώσεις, αφού $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha^2\beta^2\geq 0$, είναι οι:

- $\alpha^2\beta^2=0$, η οποία οδηγεί στις λύσεις $(\alpha,\beta)=(0,-37)$ ή $(\alpha,\beta)=(-37,0)$.
- $\alpha^2\beta^2=36 \Leftrightarrow \alpha\beta=-6$ (αφού α,β ετερόσημοι), η οποία οδηγεί στο σύστημα:

$$\left.\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha\beta=-6\end{cases}\right\} \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(-3,2) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(2,-3).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\text{ΕΓ}=\text{ΖΔ}=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}$

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α.

Λύση

(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΔΕΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες (ΑΔ = ΔΓ=3α, ΔΖ = ΕΓ = α). Άρα είναι ίσα και έχουν $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ζ}=\text{Ε}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}$. Αν Μ είναι το σημείο τομής ΑΖ και ΔΕ, τότε έχουμε:

$$\text{Μ}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}+\text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Μ}=\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Ζ}+\text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Α}$$

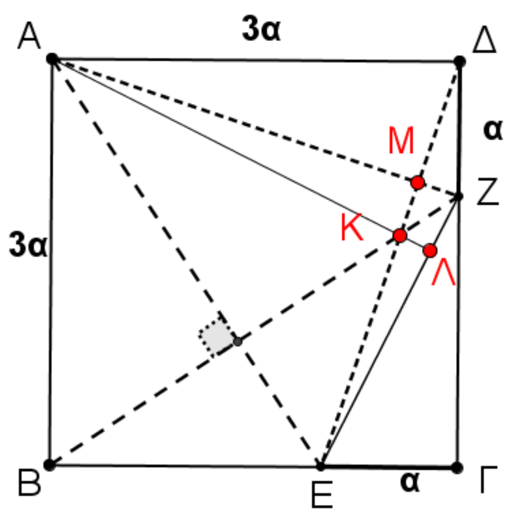
$$=180^0-\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}=180^0-90^\circ=90^\circ.$$

Άρα είναι $\text{ΕΔ}\perp\text{ΑΖ}$ και ομοίως αποδεικνύουμε ότι είναι $\text{ΖΒ}\perp\text{ΑΕ}$, οπότε το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΕΖ.

Άρα θα είναι και

$$\text{ΑΚ}\perp\text{ΕΖ} \text{ ή } \text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}.$$

Δ



(β) Έχουμε ότι

$$(\mathrm{AEZ}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{EZ}\cdot \mathrm{A\Lambda} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot \mathrm{A\Lambda} \text{ και}$$

$$(\mathrm{AEZ}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - (\mathrm{ABE}) - (\mathrm{E\Gamma Z}) - (\mathrm{A\Delta Z}) = 9\alpha^2 - 3\alpha^2 - \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{2} = \frac{7\alpha^2}{2},$$

οπότε λαμβάνουμε: $\mathrm{A\Lambda} = \dfrac{7\sqrt{5}\alpha}{5}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, όπου a, b, c ψηφία, $a > 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2$$

Λύση

Από τη σχέση $100 \le \overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2 < 1000$ προκύπτει ότι:

$$10 \le a + b^2 + c^3 \le 31, \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), δεδομένου ότι $a \in \{1, 2, ..., 9\}$ και $b, c \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$c \in \{0,1,2,3\} \text{ και } b \in \{0,1,2,3,4,5\}. \qquad (2)$$

Επιπλέον η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2 \Leftrightarrow 100a + 10b + c = \left(a + b^2 + c^3\right)^2. \qquad (3)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Για $c = 0$ η εξίσωση (3) γίνεται:

  $$100a + 10b = \left(a + b^2\right)^2, \qquad (4)$$

  από την οποία για $b \in \{0,1,2,3,4,5\}$ δεν προκύπτουν a, b που την επαληθεύουν.

  Πράγματι, τα ψηφία a, b που ικανοποιούν την εξίσωση (4) πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $a + b^2$ να λήγει σε 0. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα

  $$(a,b) = (9,1) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (5,5),$$

  από τα οποία κανένα δεν ικανοποιεί την εξίσωση (4).

- Για $c=1$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+1=\left(a+b^2+1\right)^2,$$
από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός $a+b^2+1$ πρέπει να λήγει σε 1 ή 9. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα
$$(a,b)=(8,0)\text{ ή }(7,1)\text{ ή }(9,1)\text{ ή }(4,2)\text{ ή }(6,2)\text{ ή }(1,3)$$
$$\text{ή }(9,3)\text{ ή }(2,4)\text{ ή }(4,4)\text{ ή }(3,5)\text{ ή }(5,5),$$
από τα οποία προκύπτει μόνο η λύση $(a,b)=(4,4)$ και ο αριθμός $\overline{abc}=441$.
- Για $c=2$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+2=\left(a+b^2+2\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 2.
- Για $c=3$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+3=\left(a+b^2+3\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 3.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες το σύστημα
$$x^2+4y^2=4a^2$$
$$ax-y=2a$$
έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

Λύση

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα
$$\left\{\begin{array}{c} x^2+4y^2=4a^2 \\ ax-y=2a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=ax-2a \\ x^2+4(ax-2a)^2=4a^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=ax-2a \\ \left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0 \end{array}\right\}.$$
Το σύστημα έχει μία μόνο λύση, αν, και μόνον αν, η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή, αν, και μόνον αν, ισχύει:
$$\Delta=16a^2\left(4a^2-3\right)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ή } a=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } a=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
- Για $a=0$, το σύστημα έχει τη λύση $(x,y)=(0,0)$.
- Για $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ γίνεται $4x^2-12x+9=0$ και έχει τη διπλή ρίζα $x=\frac{3}{2}$, οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x+y+z$ και $S_2 = xy+yz+zx$, όπου $x,y,z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)=6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$.

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x,y,z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)=6 \Leftrightarrow x\left(xy+xz\right)+y\left(yz+yx\right)+z\left(zx+zy\right)=6$$

$$\Leftrightarrow x\left(S_2-yz\right)+y\left(S_2-zx\right)+z\left(S_2-xy\right)=6$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)S_2-3xyz=6 \Leftrightarrow 3xyz=S_1S_2-6.$$

(β) Για $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$ έχουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ xyz=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \text{ ή } z=0 \end{matrix}\right\},$$

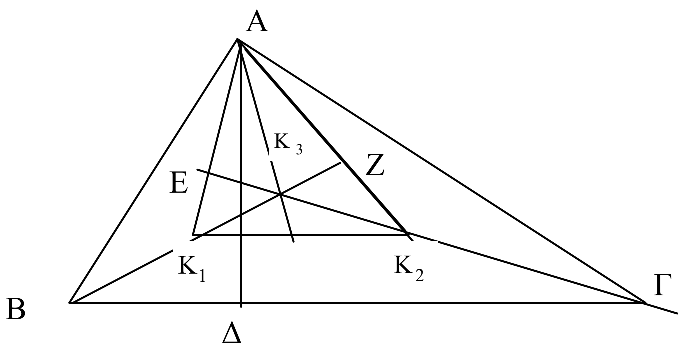
από το οποίο εύκολα προκύπτουν οι λύσεις

$$\left(x,y,z\right)=\left(2,1,0\right) \text{ ή } \left(1,2,0\right) \text{ ή } \left(2,0,1\right) \text{ ή } \left(1,0,2\right) \text{ ή } \left(0,2,1\right) \text{ ή } \left(0,1,2\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ, ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Λύση



Τα σημεία K_1 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, ενώ τα σημεία K_2 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. Έτσι έχουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_3\Gamma = 180^0 - \left(\frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2}\right) = 180^0 - 45^\circ = 135^\circ$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_1\mathrm{A} = 135^\circ \text{ και } \Gamma\hat{\mathrm{K}}_3\mathrm{A} = 135^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{K_1\hat{K}_3E = K_3\hat{K}_1E = K_3\hat{K}_2Z = Z\hat{K}_3K_2} = 45^0,$$

ως παραπληρώματα κάποιας γωνίας 135^0. Επομένως τα τρίγωνα $\mathrm{AEK_3}$, $\mathrm{K_3EK_1}$ και $\mathrm{K_3ZK_2}$ είναι ορθογώνια ισοσκελή, οπότε το σημείο $\mathrm{K_3}$ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AK_1K_2}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AK_3E}$ και $\mathrm{K_2EK_1}$ είναι ίσα, γιατί έχουν $\mathrm{EK_3 = EK_1}$ και $\mathrm{K_1\hat{K}_2E = E\hat{A}K_3}$, αφού έχουν τις πλευρές τους κάθετες. Άρα είναι $\mathrm{AK_3 = K_1K_2}$

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1<k<30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0, n \geq 1$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = k a_n \Leftrightarrow k = 3^n.$$

Επειδή είναι $1<k<30$ οι μόνες δυνατές τιμές του n είναι οι $n=1$ ή $n=2$ ή $n=3$.

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\left(x-3^n\right)P(3x) = 3^n(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Για $n=1$ η (1) γίνεται $(x-3)P(3x) = 3(x-1)P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την οποία για $x=1$ προκύπτει $P(3)=0$. Άρα είναι $P(x) = a_1(x-3)$.

Για $n=2$ η (1) γίνεται $\left(x-3^2\right)P(3x) = 3^2(x-1)P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3)=0$ και $P(9)=0$. Άρα είναι $P(x) = a_2(x-3)(x-9)$.

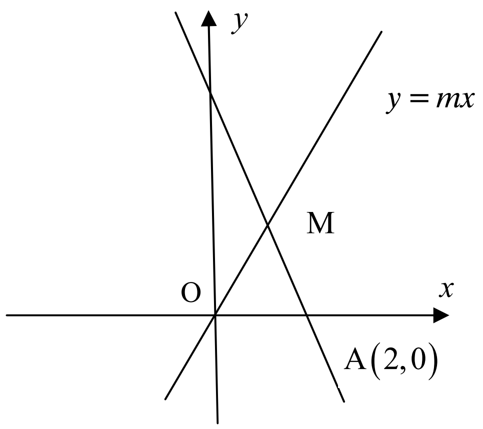
Για $n=3$ η (1) γίνεται $\left(x-3^3\right)P(3x) = 3^3(x-1)P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3)=0$, $P(9)=0$ και $P(27)=0$. Άρα είναι $P(x) = a_3(x-3)(x-9)(x-27)$.

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x+6$, $g(x) = mx,\ m \in \mathbb{R}$ και τον άξονα των x ισούται με 3.

Λύση



Από το σύστημα $y = mx, y = -3x+6$ προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $\left(\dfrac{6}{m+3}, \dfrac{6m}{m+3}\right)$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{OAM}) = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \left|\frac{6m}{3+m}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{6m}{3+m} = 3 \text{ ή } \frac{6m}{3+m} = -3 \Leftrightarrow m = 3 \text{ ή } m = -1.$$

Πρόβλημα 2

Έστω Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο οξυγωνίου τριγώνουΑΒΓ. Έστω ακόμη Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1, E_1 και Z_1 έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$, με $\lambda > 1$.. Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το Η τέμνει την ευθεία ΒΓ στα σημεία A_1 και A_2. Όμοια, οι κύκλοι $C_\beta(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_1\mathrm{H})$ και $C_\gamma(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\mathrm{H})$ ορίζουν τα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2 στις ευθείες ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1 και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Λύση

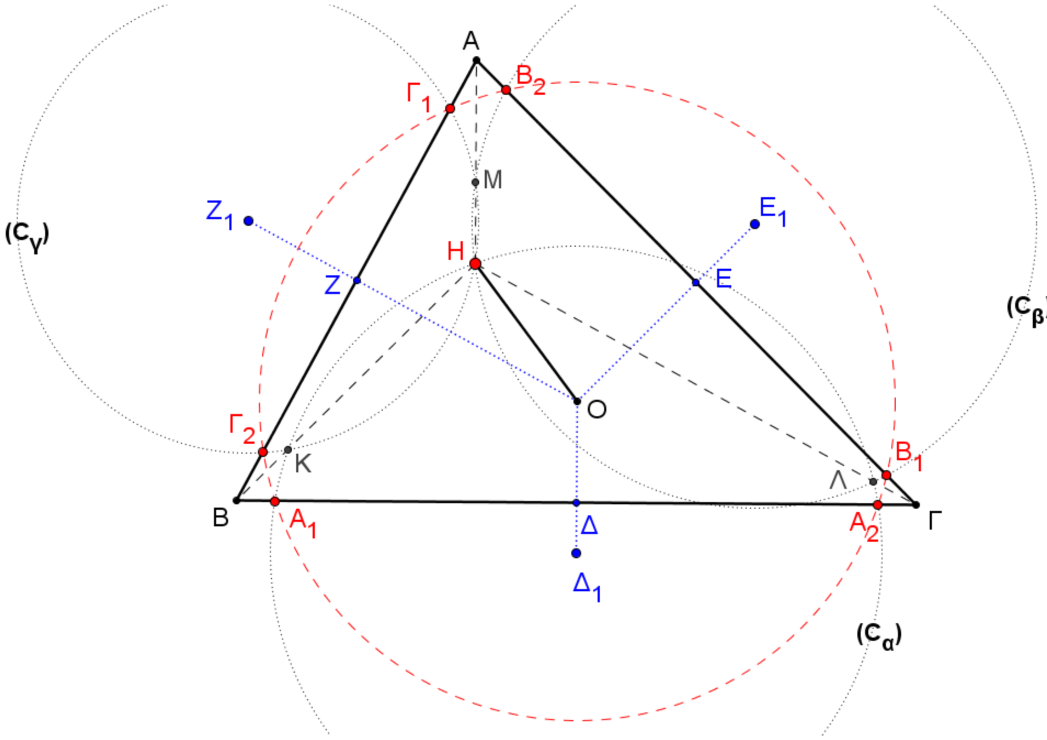
Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Τα τρίγωνα ΔΕΖ και $\Delta_1\mathrm{E}_1\mathrm{Z}_1$ έχουν επίσης τις πλευρές τους παράλληλες, γιατί

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}.$$

Η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής ΚΗ των κύκλων C_α και C_γ. Επειδή η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι παράλληλη με την ΑΓ, έπεται ότι ΚΗ $\perp$ ΑΓ.

Επειδή όμως ισχύει και ότι ΒΗ $\perp$ ΑΓ καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι τα σημεία Β, Κ, Η είναι συνευθειακά.

Με όμοιο τρόπο, αν ΜΗ, ΛΗ είναι η κοινή χορδή των κύκλων C_β, C_γ και C_α, C_β, αντίστοιχα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{H}$ και τα σημεία $\Gamma, \Lambda, \mathrm{H}$ είναι συνευθειακά.



Από τη δύναμη του σημείου B ως προς τους κύκλους C_α και C_γ, έχουμε:

$$\mathrm{BK}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{BA}_1\cdot\mathrm{BA}_2=\mathrm{B\Gamma}_1\cdot\mathrm{B\Gamma}_2,$$

οπότε τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ είναι ομοκυκλικά στο κύκλο με κέντρο το O, που είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των τμημάτων $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ και $\Gamma_1\Gamma_2$.

Όμοια εργαζόμαστε και με τα άλλα ζευγάρια σημείων, οπότε τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1 και Γ_2 βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$, n βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x)=k(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0, n\geq 1$, το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = k a_n \Leftrightarrow k=3^n.$$

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$(x-3^n)P(3x)=3^n(x-1)P(x), n\geq 1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Από την (1) για $x=1$ προκύπτει ότι $P(3)=0$, οπότε στη συνέχεια για $x=3$ προκύπτει $P(3^2)=0$. Συνεχίζοντας έτσι λαμβάνουμε τις σχέσεις $P(3^k)=0$, για $k=3,\ldots n-1$.

Επίσης από την (1) για $x = 3^n$ λαμβάνουμε:

$$0 = 3^n\left(3^n - 1\right)P\left(3^n\right) = 0 \Leftrightarrow P\left(3^n\right) = 0.$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο n βαθμού έχει τις n ρίζες 3^k, $k = 1, 2, ..., n$, οπότε

$$P(x) = a_n(x-3)\left(x-3^2\right)\cdots\left(x-3^n\right),\ a_n \in \mathbb{R}.$$

. **Πρόβλημα 4**

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\left(f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\right)$. Αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση:

$$f\left(f\left(f(x)\right) - f(y)\right) = f(x) - f\left(f(y)\right), \qquad (1)$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f, είναι περιττή.

Λύση

Θέτουμε στη δεδομένη σχέση όπου y το $f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} f\big(f\big(f(x)\big) - f\big(f(x)\big)\big) &= f(x) - f\big(f\big(f(x)\big)\big) \\ \Leftrightarrow f(0) &= f(x) - f\left(f\left(f(x)\right)\right) \\ \Leftrightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right) &= f(x) - f(0) \\ \Leftrightarrow \left(f \circ f \circ f\right)(x) &= f(x) - f(0) \qquad (2). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε τις ισότητες

$$\left.\begin{aligned} \left(f \circ f \circ f \circ f\right)(x) &= f\big(f(x) - f(0)\big) \\ \left(f \circ f \circ f \circ f\right)(x) &= f\big(f(x)\big) - f(0) \end{aligned}\right\},$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$f\big(f(x) - f(0)\big) = f\big(f(x)\big) - f(0). \qquad (3)$$

Από την (3) για $x = 0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f\big(f(0) - f(0)\big) &= f\big(f(0)\big) - f(0) \\ \Leftrightarrow f(0) &= f\left(f(0)\right) - f(0) \\ \Leftrightarrow f\left(f(0)\right) &= 2f(0) \qquad (4). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) για $x = y = 0$ και σε συνδυασμό με τη σχέση (4), έχουμε:

$$\begin{aligned} f\big(f\big(f(0)\big) - f(0)\big) &= f(0) - f\big(f(0)\big) \\ \Leftrightarrow f\left(2f(0) - f(0)\right) &= f(0) - 2f(0) \\ \Leftrightarrow f\left(f(0)\right) &= -f(0) \qquad (5). \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε: $f(0) = 0$.

Αν τώρα στη σχέση (1) θέσουμε $x = 0$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} f\big(f\big(f(0)\big) - f(y)\big) &= f(0) - f\big(f(y)\big) \\ \Leftrightarrow f\left(-f(y)\right) &= -f\left(f(y)\right). \end{aligned}$$

Επειδή όμως σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(y) = x$.

Άρα έχουμε $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι περιττή.