

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi) = \eta$. (11 Μ)

A2. Να αντιστοιχίσετε κάθε όριο της στήλης Α με ένα από τα αποτελέσματα της στήλης Β.

(10Μ)

ΣΤΗΛΗ (Α)	ΣΤΗΛΗ (Β)
1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 5x}{x}$	A) $-\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$	B) 0
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)$	Γ) -5
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$	Δ) $+\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$	E) 5

A3. Να συμπληρώσετε με Σ ή Λ στα παρακάτω

α) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

β) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ισχύουν : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ τότε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

είναι καλά ορισμένο και είναι ίσο με το 0.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα Δ και ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

δ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$, τότε θα ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$

(4 Μ)

Θ Ε Μ Α Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. (5 Μ)

B2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$. (5 Μ)

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα. (7 Μ)

B4. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ και την ανίσωση $f^{-1}(x) > x - 1$. (8 Μ)

Θ Ε Μ Α Γ

Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 3 \text{ και } 2\eta\mu(x-1) \leq (x-1)f(x) \leq x^2 - 1 \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Γ1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = f(x) - \ln x - 3$, $x \in (0,1)$. (9 Μ)

Γ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = e^{f(x)-3}$ τέμνει τη διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων σε ένα μόνο σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$. (8 Μ)

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\alpha+3} = e^{f(x)}$ στο διάστημα $(0,1)$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. (8 Μ)

Θ Ε Μ Α Δ

Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$ και η συνεχής συνάρτηση, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύουν: $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$ και $|f(x)| < 2012$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x = f(\beta)\eta\mu x + f(\alpha)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, \alpha + \beta)$. (5 Μ)

Δ2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \alpha + \beta$. (5 Μ)

β) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την $y = 2x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$. (5 Μ)

Δ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)\eta\mu 4x}{x^2 + 1}$. (5 Μ)

Δ4. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) - h(x) = 2004x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ακόμη ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις ετερόσημες ρ_1, ρ_2 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) . (5 Μ)