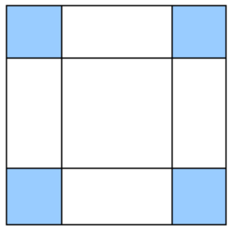
Θαλής Β' Γυμνασίου 2002-2003

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$K = 2\cdot 50 - 40:10 + 5\cdot(100-4\cdot 20)^2 - 92$

2. Ένα τετράγωνο πλευράς 4 διαιρείται με τέσσερις ευθείες παράλληλες ανά δύο προς τις πλευρές του σε σχήματα, έτσι ώστε τα τέσσερα γραμμοσκιασμένα από αυτά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι τετράγωνα πλευράς 1.



Πόσα είναι τα τετράγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και ποιο είναι το άθροισμα των εμβαδών τους;

3. Δίνονται οι αριθμοί: $A=2^{41}$, $B=8^{13}$, $\Delta=4^{21}$ και $\Delta=3^{28}$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς αυτούς είναι ο μεγαλύτερος.

β) Να εκφράσετε το άθροισμα Α+Β+Γ+Δ ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

4. Στις Δημοτικές εκλογές της πρώτης Κυριακής (13 Οκτωβρίου 2002) σε ένα Δήμο συμμετείχαν οι συνδυασμοί Α, Β και Γ.

Ονομάζουμε ν τον αριθμό των εγγεγραμμένων στους εκλογικούς καταλόγους ψηφοφόρων. Συνολικά ψήφισε το 75% του αριθμού ν και όλα τα ψηφοδέλτια ήταν έγκυρα.

Ο συνδυασμός Α ψηφίστηκε από το 39% του αριθμού ν, ενώ ο συνδυασμός Β ψηφίστηκε από το 27% του αριθμού ν. Λευκά ψηφοδέλτια δεν βρέθηκαν.

α)) Να εξετάσετε αν ο αρχηγός του συνδυασμού Α εξελέγη Δήμαρχος από την πρώτη Κυριακή, δηλαδή αν ο συνδυασμός του έλαβε ποσοστό μεγαλύτερο του 50% ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

β) Να βρείτε το ποσοστό των ψήφων του συνδυασμού Δ ως προς τον αριθμό των εγκύρων ψηφοδελτίων.

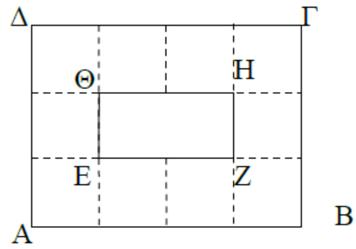
Θαλής Γ' Γυμνασίου 2002-2003

1. Αν α= $-\frac{3}{2}$ και β=3 να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K=\alpha^3-(1+\alpha)^{-2}+4\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}-2004\right)^{2004}\right]^0 .$$

2. Στο σχήμα υπάρχουν 10 ίσα τετράγωνα μεταξύ των ορθογωνίων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.

Να υπολογίσετε την πλευρά των τετραγώνων, αν είναι γνωστό ότι το άθροισμα των εμβαδών τους ισούται αριθμητικά με το άθροισμα των περιμέτρων των ορθογωνίων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.



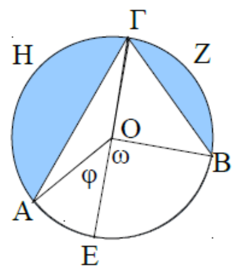
3. Σε μια διοργάνωση σκακιού μέσω διαδικτύου συμμετείχαν 1119 αγόρια και κορίτσια. Το πρώτο κορίτσι έπαιξε με 20 αγόρια, το δεύτερο κορίτσι έπαιξε με 21 αγόρια, το τρίτο κορίτσι έπαιξε με 22 αγόρια κ.ο.κ. μέχρι το τελευταίο κορίτσι που έπαιξε με όλα τα αγόρια.

Να βρείτε πόσα ήταν τα αγόρια και πόσα ήταν τα κορίτσια.

4. Στο σχήμα η ΓΕ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, R), η γωνία $\Gamma\hat{O}B$ =ω είναι τριπλάσια της γωνίας $A\hat{O}E$ =φ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα ΟΑΕΒ ισούται με $\frac{1}{3}\pi R^2$.

α) Να βρείτε τις γωνίες ω, φ.

β) Να βρείτε το λόγο $\frac{E_{\kappa.\tau.}(B Z \Gamma)}{E_{\kappa.\tau.}(A H \Gamma)}$ των εμβαδών των κυκλικών τομέων ΒΖΓ και ΑΗΓ.



Θαλής Α' Λυκείου 2002-2003

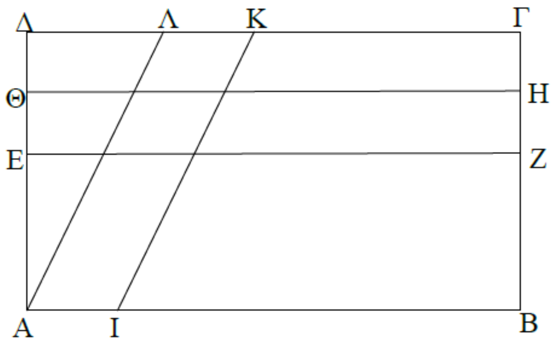
1. Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς α, με α>1. Το τετράγωνο που έχει πλευρά κατά 1 μικρότερη του α, έχει περίμετρο ίση αριθμητικά προς το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου.

Να βρεθεί η πλευρά α.

2. Οι αριθμοί x, y, z, w έχουν την ιδιότητα:

Αν προσθέσουμε τρεις οποιουσδήποτε από αυτούς και από το άθροισμα που θα προκύψει αφαιρέσουμε τον αριθμό 5, προκύπτει πάντοτε ο αριθμός 2002.

Να υπολογίσετε το άθροισμα $x + y + z + w$.



3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου με πλευρές ΑΒ = α και ΒΓ = β. Από το οικόπεδο θα κοπούν δυο δρόμοι ΕΖΗΘ και ΑΙΚΛ. Ο δρόμος ΕΖΗΘ σχήματος ορθογωνίου έχει πλάτος ΖΗ = ψ, ενώ ο δρόμος ΑΙΚΛ σχήματος παραλληλογράμμου έχει πλευρά ΑΙ = χ.

α) Να εκφράσετε το εμβαδό του οικοπέδου που απομένει μετά την αποκοπή των δυο δρόμων, ως συνάρτηση των α, β, χ και ψ.

β) Να εκφράσετε το πλάτος d του δρόμου ΑΙΚΛ ως συνάρτηση του χ, αν είναι γνωστό ότι $\Delta\hat{A}\Lambda = 30^o$.

4. Μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό 2002 ως άθροισμα ενός τριψήφιου αριθμού και του κύβου του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού αυτού;

Θαλής Β' Λυκείου 2002-2003

1. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ.

Αν η ΑΓ τέμνει τη ΒΕ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι η ΔΖ περνάει από το μέσον της ΒΓ.

2. Να προσδιορίσετε όλους τους διψήφιους αριθμούς που είναι ίσοι με το γινόμενο που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα ψηφία τους αυξημένα κατά 2.

3. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 - 4\beta x + 4\gamma = 0$, $\alpha>0$ έχει δυο ρίζες στο διάστημα $[2,3]$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha \le \beta \le \gamma < \alpha + \beta$

β) $\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}+\dfrac{\beta}{\beta+\alpha}>\dfrac{\gamma}{\gamma+\beta}$

4. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Τα σημεία Ε, Ζ κινούνται πάνω στις πλευρές ΒΓ, ΓΔ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $E\hat{A}Z=45^\circ$. Οι ΑΕ και ΑΖ τέμνουν τη ΒΔ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Οι ΕΛ και ΖΚ τέμνονται στο Η και η ΑΗ τέμνει τη ΖΕ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ευθεία ΑΜ είναι κάθετη προς τη ΖΕ.

β) Η γωνία ΒΜΔ είναι σταθερή, δηλαδή είναι ανεξάρτητη της θέσης των Ε, Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ ,ΓΔ αντίστοιχα.

Θαλής Γ' Λυκείου 2002-2003

1. α) Να προσδιορίσετε το σύνολο C_α των σημείων Μ του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z = x + yi με x, y $\in \mathbb{R}$ και ικανοποιούν την ισότητα

$$i(z+\bar{z}-\alpha)+z-\bar{z}=0 \text{ , όπου } \alpha \in \mathbb{R} .$$

β) Αν $A\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) \in C_\alpha$, να προσδιορίσετε σημείο Β $\in C_\alpha$ τέτοιο ώστε η μεσοκάθετος του ΑΒ να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου K_β με εξίσωση

$$|z + 1 - 3i| = \beta,\ \beta>0.$$

Για ποια τιμή του β ο κύκλος K_β εφάπτεται του C_α;

2. Από σημείο Ρ εκτός κύκλου φέρουμε τις εφαπτόμενες ΡΑ, ΡΒ και τυχαία τέμνουσα ΡΓΔ προς τον κύκλο. Αν ισχύει 2(ΡΑΓ) = 3(ΡΒΓ), να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(A\Delta\Gamma)}$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > 90^\circ$ και πλευρά ΒΓ = R, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αν Ε είναι το εμβαδό του τριγώνου και μ_α είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ, να αποδείξετε ότι

$$\mu_\alpha^2=\frac{1}{4}R^2+2E\sqrt{3}$$

4. Αν x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι με

$$\text{ΜΚΔ}(x, y, z) = 1 \text{ και } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z},$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός x + y είναι τέλειο τετράγωνο.