Θαλής Β' Γυμνασίου 2001-2002

1. Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

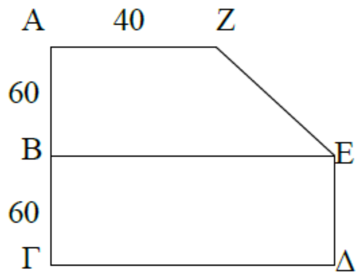
$A = (2^{10}:2^{6})^{2} - 3^{12}:(3^{9}\cdot 3) + 5\cdot(2^{3}+3^{2})$, $B = 5\cdot(2^{3}-1) + 8\cdot(3^{3}-20) - 8\cdot(5^{2}-15)$.

2. Είναι γνωστό ότι το αλεύρι αυξάνει το βάρος του κατά το ζύμωμα κατά 50%,ενώ το ζυμάρι χάνει στο ψήσιμο το 20% του βάρους του.

Να βρείτε πόσα κιλά αλεύρι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την παραγωγή 840 κιλών ψωμιού.

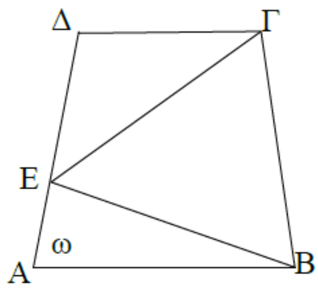
3. Ο αγρός ΑΒΓΔΕΖ στο σχήμα αποτελείται από το τραπέζιο ΑΒΕΖ με $\hat{A}=90^{o}$ και το ορθογώνιο ΒΓΔΕ με ΑΒ=ΒΓ=60m και ΑΖ=40m. Το εμβαδό του αγρού είναι 10.200 m^{2}.

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ.



4. Στο σχήμα το τετράπλευρο είναι τραπέζιο. Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισόπλευρο και τα ΑΒΕ και ΓΔΕ ισοσκελή με ΒΑ=ΒΕ και ΓΔ=ΔΕ.

Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Delta$ = ω.



Θαλής Γ' Γυμνασίου 2001-2002

1. Αν ν θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A=\left[(-1)^{2\nu}+(-1)^{2\nu+1}\right]\cdot\left(3^{12}+2^{10}\right),$$

$$B=(-2)^{-3}:(-2)^{-1}+\frac{(-3)^{-2}-(-2)^{-4}}{(-4)^{-2}}$$

2. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές ΑΒ=λ, ΑΓ=λ+2, ΒΓ=10 και ισχύει:

$$(\lambda+2)^2 - \lambda^2 = 28.$$

Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^o$.

3. Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΓΔΕ, ΑΔΕ και ΑΓΕ.

4. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8.$$

Για ποιες τιμές των α, β λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α;

Θαλής Α' Λυκείου 2001-2002

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι xyz = 1, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=\frac{1}{y+1-\frac{y}{x+1}}+\frac{1}{z+1-\frac{z}{y+1}}+\frac{1}{x+1-\frac{x}{z+1}}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$3(1 + a^2 + a^4)x = (1 + a + a^2)^2x + a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1$$

ως προς x, θεωρώντας το a ως παράμετρο.

3. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και σημείο Β στο εσωτερικό του. Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο μέρος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. Αν οι ΑΕ και ΓΔ τέμνονται στο Ζ, να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}\Delta$.

4. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό Μ, ο οποίος έχει την ιδιότητα: για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β με α + β = 1 ισχύει ότι:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\geq M$$

Θαλής Β' Λυκείου 2001-2002

1. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλευρές ΑΒ = α και ΒΓ = β. Θεωρούμε σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ, αντιστοίχως, έτσι ώστε η περίμετρος του τριγώνου ΕΓΖ να είναι ίση προς α + β και η ΑΖ να είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΖΕ.

α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους α, β.

β) Να βρείτε τη γωνία ΕΑΖ.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 45^o$ και $\hat{B} > 45^o$. Στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τρίγωνο ΑΒΔ ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{\Delta} = 90^o$. Στη συνέχεια, εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΑΓΖ με $\hat{E} = 90^o$ και $\hat{Z} = 90^o$.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο ν που είναι τέτοιος ώστε ο αριθμός

$$\nu^2 + 2004\nu$$

να είναι τέλειο τετράγωνο.

4. Οι μαθητές Χ και Υ παίζουν ένα παιχνίδι ως εξής:

Επιλέγουν εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλο έναν από τους αριθμούς 1 και 2. Αρχίζει ο Χ επιλέγοντας τον αριθμό $X_1 \in \{1,2\}$, συνεχίζει ο Υ επιλέγοντας τον αριθμό $Y_1 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_1 = X_1 + Y_1$. Στη συνέχεια ο Χ επιλέγει τον αριθμό $X_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_2 = \Sigma_1 + X_2$, ενώ ο Υ συνεχίζοντας επιλέγει τον αριθμό $Y_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_3 = \Sigma_2 + Y_2$ κ.ο.κ. Νικητής αναδεικνύεται ο μαθητής που θα καταγράψει σε μια επιλογή του ως άθροισμα τον αριθμό 200.

Να εξηγήσετε γιατί ο μαθητής Χ έχει στρατηγική νίκης.

Ισχύει το ίδιο αν ο νικητής αναδικνύεται όταν το άθροισμα γίνει 300;

Θαλής Γ' Λυκείου 2001-2002

1. Δίνεται η εξίσωση

$$\mu x^2 + \beta x + \nu = 0,$$

όπου μ, ν είναι πρώτοι φυσικοί αριθμοί με $3 < \mu < \nu$ και ο β είναι ακέραιος.

Να προσδιορίσετε τον ακέραιο β συναρτήσει των φυσικών μ, ν έτσι, ώστε η εξίσωση να έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

2. Να προσδιορίσετε το γινόμενο των ν διαδοχικών όρων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ γεωμετρικής προόδου, αν είναι γνωστό ότι ο φυσικός αριθμός ν είναι άρτιος και

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \kappa \ , \quad \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}=\lambda \ ,$$

όπου οι κ, λ είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1 και $\hat{B} = 120^\circ$ υπάρχει σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε να είναι $A\hat{B}\Delta = 90^\circ$ και ΔΓ = ΑΒ. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΔ.

4. Οι μαθητές Χ και Υ παίζουν ένα παιχνίδι ως εξής:

Επιλέγουν εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλο έναν από τους αριθμούς 1 και 2. Αρχίζει ο Χ επιλέγοντας τον αριθμό $X_1 \in \{1,2\}$, συνεχίζει ο Υ επιλέγοντας τον αριθμό $Y_1 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_1 = X_1 + Y_1$. Στη συνέχεια ο Χ επιλέγει τον αριθμό $X_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_2 = \Sigma_1 + X_2$, ενώ ο Υ συνεχίζοντας επιλέγει τον αριθμό $Y_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_3 = \Sigma_2 + Y_2$ κ.ο.κ. Νικητής αναδεικνύεται ο μαθητής που θα καταγράψει σε μια επιλογή του ως άθροισμα τον αριθμό 200.

Να εξηγήσετε γιατί ο μαθητής Χ έχει στρατηγική νίκης.

Ισχύει το ίδιο αν ο νικητής αναδικνύεται όταν το άθροισμα γίνει 300;