Θαλής Β' Γυμνασίου 1999-2000

1. Πάνω σε μια ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ. Έστω Μ είναι το μέσον του ΑΒ και Ν είναι το μέσον του ΒΓ.

Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΜΝ, όταν:

α) ΑΒ=8cm, ΒΓ=10cm,

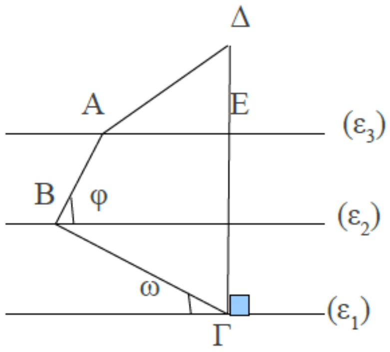
β) ΑΒ=10cm, ΑΓ=18cm.

2. Στο σχήμα δίνεται ότι:

1) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ 2) $\Gamma\Delta \perp \varepsilon_1$

3) ΑΕ=ΕΔ 4) $\omega=30^\circ$, $\varphi=50^\circ$

Να βρεθούν οι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ .



3. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A=(-2)^{1000}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{500}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{998}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{499},\ B=2^{\nu}\cdot 3^{\nu+1}$$, ν-άρτιος φυσικός.

Να συγκριθούν οι αριθμοί $3\cdot A^{\nu}$ και B .

4. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999},\quad B=1+\frac{2}{4}+\frac{4}{6}+\frac{6}{8}+\ldots+\frac{3994}{3996}+\frac{3996}{3998}.$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό $\dfrac{A+B}{2}$.

Θαλής Γ' Γυμνασίου 1999-2000

1. Στο σχήμα έχουμε:

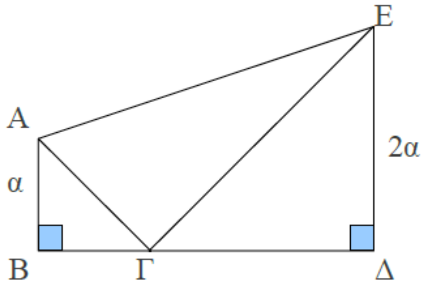
α) ΑΒ//ΕΔ

β) $\hat{B}=90^o$

γ) $B\hat{A}\Gamma=\Gamma\hat{E}\Delta=45^o$

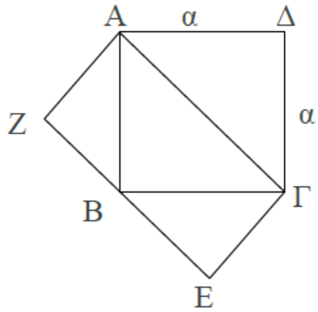
δ) ΑΒ = α, ΔΕ = 2α.

Να υπολογιστεί το μήκος του ΑΕ.



2. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το ΑΓΕΖ ορθογώνιο.

Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A\Gamma EZ)}$.



3. Έστω $A=\frac{(-2)^\nu}{2\nu^2}$, $B=\frac{(-2)^\nu}{2\nu^2+3}$, όπου ν είναι θετικός ακέραιος.

Να βρεθεί ποιος από τους αριθμούς Α, Β είναι μεγαλύτερος.

4. Να βρείτε πόσοι από τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 1999 δε διαιρούνται ούτε με το 5 ούτε με το 7.

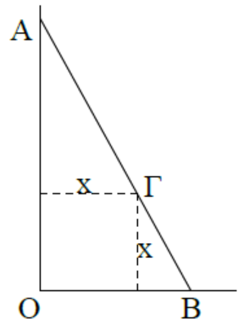
Θαλής Α' Λυκείου 1999-2000

1. Το άθροισμα δυο ακεραίων είναι 26, ενώ αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1.

Να βρεθούν οι αριθμοί.

2. Μια σκάλα ακουμπά στο έδαφος και στον τοίχο. Το σημείο επαφής Α στον τοίχο βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Επιπλέον υπάρχει ένα σημείο της σκάλας που απέχει ίση απόσταση x από τον τοίχο και το έδαφος.

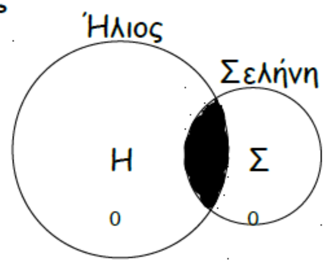
Να βρείτε το μήκος της σκάλας συναρτήσει των h και x.



3. Στην πρόσφατη έκλειψη Ηλίου στη χώρα μας ο δίσκος της Σελήνης κάλυπτε το δίσκο του Ήλιου έτσι ώστε η καλυπτόμενη επιφάνεια να μεγαλώνει σιγά - σιγά.

Το σχήμα μας δείχνει μια φάση της κάλυψης αυτής.

Να αποδείξετε ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή του φαινομένου, η διαφορά μεταξύ των μη επικαλυπτόμενων επιφανειών H_0 - Σ_0 παρέμενε σταθερή.



4. Αν α περιττός ακέραιος, να δειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha^4 + 6\alpha^2 - 7$ είναι πολλαπλάσιο του 128.

Θαλής Β' Λυκείου 1999-2000

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (4a - 7)x + 3a^2 - 17a + 10 = 0$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq -1$.

α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της είναι περιττός ακέραιος.

β) Να υπολογιστεί η τιμή του α έτσι ώστε η μεγαλύτερη ρίζα να είναι τετραπλάσια της μικρότερης.

2. Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ανισότητες

$$|x| \geq |y + z|, \ |y| \geq |z + x|, \ |z| \geq |x + y|.$$

Να δειχθεί ότι $x + y + z = 0$.

3. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο. Έστω Δ το μέσον του τόξου ΒΓ, που περιέχει την κορυφή Α. Αν Ε είναι το ίχνος της κάθετης από το Δ προς την ΑΓ, να αποδειχθεί ότι ΑΒ + ΑΕ = ΕΓ.

4. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και κάθετες πλευρές μήκους 1. Από σημείο Ρ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες ΡΚ, ΡΘ προς τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του Ρ, ένα από τα εμβαδά (ΒΚΡ), (ΡΘΓ) και (ΚΡΘΑ) είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\frac{2}{9}$.

Θαλής Γ' Λυκείου 1999-2000

1. Δίνεται η εξίσωση $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Θεωρείστε στην εξίσωση το α ως άγνωστο, το x ως παράμετρο και βρείτε τις ρίζες της συναρτήσει του x.

β) Βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης με άγνωστο το x συναρτήσει της παραμέτρου α.

2. Δίνεται η τριγωνομετρική εξίσωση:

$$(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\eta\mu 2x = \lambda(\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

β) Να λυθεί η εξίσωση όταν είναι $\lambda = -\frac{2}{3}$.

3. Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$. Σχηματίζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΒΓΔΕ και φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$. Να αποδειχθεί ότι αυτή χωρίζει το τετράγωνο σε δυο ισεμβαδικά τραπέζια.

4. Αν $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ είναι διαφορετικοί ανά δυο μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_{19} \in \{0,1\}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε ο αριθμός $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{19}x_{19}$ να είναι πολλαπλάσιο του 19.