Θαλής Β' Γυμνασίου 1996-1997

1. Έστω οι αριθμοί α, β με $\frac{1}{2}\alpha+2{,}5\beta+1{,}5\alpha-\frac{1}{2}\beta=-6$.

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=\frac{114-3(\alpha-\beta)-2(\alpha-2\beta)-5+3[5\alpha-(-\beta+1)]}{-2(2\alpha-\beta)-4(3\beta-1)-2(-2\alpha-5\beta)}$.

2. Κάποιος μαθητής έβαλε στο νου του πέντε αριθμούς διαφορετικούς μεταξύ τους ακεραίους, θετικούς και αρνητικούς, που το γινόμενό τους ήταν 20. Να βρεθούν οι διαφορετικοί αυτοί ακέραιοι.

3. Στην ημιευθεία Οε θεωρούμε σημεία Α, Β, Γ ώστε (ΟΑ)=2m, (ΟΒ)=6m, (ΟΓ)=12m. Έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε τα (ΔΖ), (ΕΓ). Τι παρατηρείτε;

4. Ένα τετράγωνο λέγεται "μαγικό" όταν το άθροισμα των αριθμών σε κάθε οριζόντια γραμμή είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη και επίσης ίσο με το άθροισμα των αριθμών σε κάθε μια από τις δύο διαγώνιες.

Π.χ.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

εδώ έχουμε 2+7+6=9+5+1=...=15.

Σε κάποιο μαγικό τετράγωνο οι αριθμοί έσβησαν και έμειναν μόνο το 7 και το 13 όπως στο

		7
13		

Να δειχτεί ότι απαραιτήτως σε κάποια θέση του μαγικού αυτού τετραγώνου υπάρχει ο αριθμός 1, ανεξάρτητα από τα ποια είναι τα υπόλοιπα νούμερά του.

Θαλής Γ' Γυμνασίου 1996-1997

1. Έστω $A=\sqrt{\sqrt{81}}+3\sqrt{8}:\sqrt{2}+8\sqrt{3}:\dfrac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

Να υπολογιστεί η τιμή του $B=3(-1)^{A}+2(-1)^{A+1}$.

2. Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και από την κορυφή Α παίρνουμε μια τυχαία ευθεία που τέμνει την ΓΒ στο Ε. Από το Δ φέρνουμε μια ευθεία παράλληλη προς την ΑΕ και επ' αυτής παίρνουμε ένα σημείο Ζ.

Να δειχτεί ότι το παραλληλόγραμμο με πλευρές ΑΕ και ΑΖ έχει εμβαδό ίσο με το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

3. Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει ακέραιος ν που να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\nu(\nu-1)+(\nu-1)(\nu+1)+\nu(\nu+1)+3\nu^5=3.000.000.$$

4. Η Άννα έχει 48 σπίρτα και τα χώρισε σε 3 σωρούς.

Μετά πήρε τόσα σπίρτα από τον πρώτο σωρό όσα υπήρχαν στον δεύτερο και τα έβαλε στον δεύτερο.
Κατόπιν πήρε τόσα σπίρτα από τον δεύτερο σωρό όσα υπήρχαν στον τρίτο και τα έβαλε στον τρίτο.

Τέλος πήρε τόσα σπίρτα από τον τρίτο σωρό όσα υπήρχαν στον πρώτο και τα έβαλε στον πρώτο.

Τότε παρατήρησε ότι οι τρεις σωροί είχαν ίσο αριθμό σπίρτων.

Πόσα σπίρτα είχε αρχικά ο κάθε σωρός;

Θαλής Α' Λυκείου 1996-1997

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου Α η ορθή γωνία, έχουμε ΑΒ=600m. Πάνω στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε ΑΔ=150m. Να βρεθεί το μήκος ΓΔ αν είναι ΑΒ+ΑΔ=ΓΔ+ΒΓ.

2. Αν α, β και γ τα μήκη πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)^2 \leq 4\beta^2\gamma^2 .$$

3. α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός n τέτοιος ώστε ο n^3+3n να είναι περιττός.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$5x^3-4y^2-6xy+15x+6y-5=0$$

4. Επτά πόλεις Α1, Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7 βρίσκονται, με αυτή τη διάταξη, πάνω σε μία ευθεία. Πού πρέπει να κτιστεί ένα εργοστάσιο, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τις επτά πόλεις να είναι το ελάχιστο δυνατό;

Θαλής Β' Λυκείου 1995-1996

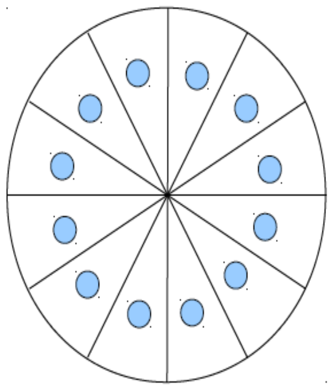
1. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \leq \gamma^2$.

2. Αν x και y ακέραιοι με $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 100$, να λυθεί η εξίσωση:

$$|x + y - 2| + |3x - 2y + 1| + 3x - 2y + 1 = 0.$$

3. Σ' ένα κύκλο είναι εγγεγραμμένο ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, τέτοιο ώστε η ΑΒ είναι παράλληλη προς την ΕΔ και η ΑΕ προς τη ΒΓ. Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Α είναι παράλληλη προς τη ΓΔ.

4. Ένας δίσκος έχει χωριστεί σε 12 ίσους τομείς με ακτίνες που ξεκινούν από το κέντρο του. Στον καθένα από τους δώδεκα τομείς τοποθετούμε ένα κέρμα. Κάνουμε τώρα την εξής κίνηση: μετακινούμε ένα οποιοδήποτε κέρμα από την θέση του στον αμέσως επόμενο τομέα (κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού) και συγχρόνως μετακινούμε ένα δεύτερο κέρμα από τη θέση του στον αμέσως επόμενο τομέα.



Δείξτε ότι όποια διαδοχή κινήσεων και αν κάνουμε, δεν είναι δυνατόν να έρθουν όλα τα κέρματα σε ένα και τον αυτό τομέα. Αντιθέτως δείξτε ότι αν οι τομείς ήταν δεκατρείς, τότε με κατάλληλη επιλογή κινήσεων, μπορούμε να φέρουμε όλα τα κέρματα σε ένα τομέα.

Θαλής Γ' Λυκείου 1996-1997

1. Έστω A ένας μη μηδενικός ν×ν πίνακας. Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός ν×ν πίνακας B με $(AB)^2 = (AB)$.

2. Δίνεται ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$999f(\pi - x) + 998f(x - \pi) = 1996\sigma\upsilon\nu x \, .$$

Δείξτε ότι ικανοποιεί και την

$$f^2(\pi + x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{1996}{1997}\right)^2 .$$

3. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ της προέκτασης της ΑΓ ώστε ΑΓ = ΒΖ = ΔΖ. Αν Ε το συμμετρικό του Ζ ως προς το Γ, να υπολογιστεί η γωνία ΓΒΕ.

4. Δίνονται στο επίπεδο m+n σημεία μη συνευθειακά ανά τρία, όπου m, n μεγαλύτερα ή ίσα του 3. Τα m σημεία είναι χρωματισμένα κόκκινα και n είναι χρωματισμένα μπλε.

α) Δείξτε ότι αν m=n, τότε υπάρχει τρόπος να συνδεθούν ορισμένα από αυτά τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δυο συνθήκες:

i) κάθε σημείο να ανήκει σε ακριβώς τρία ευθύγραμμα τμήματα

ii) τα άκρα κάθε ευθύγραμμου τμήματος να είναι διαφορετικού χρώματος

β) Δείξτε ότι, αντίστροφα, αν υπάρχει τρόπος να συνδεθούν ορισμένα από αυτά τα σημεία με τμήματα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες i) και ii), τότε m=n.