Θαλής Β' Γυμνασίου 1995-1996

1. Να χαράξετε κύκλο (Κ,3cm). Με κέντρο το σημείο Λ του κύκλου να χαράξετε δεύτερο κύκλο (Λ,3cm).

Η διάκεντρος ΚΛ τέμνει τον Κ στο Α και τον Λ στο Β, αν προεκταθεί. Να κατασκευάσετε τις ακτίνες ΚΓ, ΛΔ κάθετες στην ΚΛ και προς το αυτό μέρος της ΚΛ.

α) Τη είδους είναι τα σχήματα ΚΛΔΓ, ΑΓΛ, ΑΔΒ, ΑΚΔΓ, ΑΓΔΒ;

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των πέντε αυτών σχημάτων.

2. Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq -1$ να υπολογιστεί το άθροισμα:
$A = \frac{1}{\alpha^{-1995}+1} + \frac{1}{\alpha^{-1994}+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{0}+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{1994}+1} + \frac{1}{\alpha^{1995}+1}$.

3. Ποιος από τους αριθμούς Α, Β είναι μεγαλύτερος;

α) $A=(-1995)^{1996}$, $B=(-1996)^{1995}$.

β) $A = 1 - \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}\right)$, B=0,0100001.

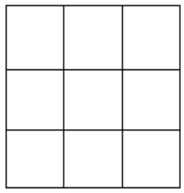
γ) $A = -\frac{5555553}{5555557}$, $B = -\frac{6666665}{6666669}$.

4. Έχουμε 200 αυγά τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε καλάθια κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε καλάθι να περιέχει διαφορετικό αριθμό αυγών.

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός καλαθιών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη διαδικασία;

Θαλής Γ' Γυμνασίου 1995-1996

1. Δύο μαθητές Α, Β χρησιμοποιούν ένα πίνακα 3x3, όπως στο σχήμα, για να παίξουν "τρίλιζα".



Καθένας γράφει σ' ένα τετραγωνάκι της επιλογής του ένα σταυρό ή έναν κύκλο.

(Και οι δύο έχουν δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν και το σταυρό και τον κύκλο, όποιο θέλουν σε κάθε τους κίνηση ανεξάρτητα με τι χρησιμοποίησαν νωρίτερα.)

Θα νικήσει αυτός, ο οποίος πρώτος γράφει ένα σύμβολο που είναι το ίδιο στα τρία τετράγωνα μιας γραμμής ή μιας στήλης ή μιας διαγωνίου του πίνακα.

Για ποιον παίκτη υπάρχει σίγουρη στρατηγική να κερδίσει; Γιατί;

2. Να βρεθεί το πλήθος των αριθμών του συνόλου $A=\{1,11,111,1111,\ldots,\underbrace{11\ldots1}_{1995\,ψηφία}\}$, οι οποίοι είναι πολλαπλάσια του 7.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό 2. Για τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓ ισχύει: $α \geq β \geq γ$. Να δειχτεί ότι $β \geq 2$. Πότε ισχύει το ίσον;

4. Να υπολογιστούν οι αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύει:

$α^2 + β^2 + γ^2 - 2α - 4β - 6γ + 14 = 0.$

Θαλής Α' Λυκείου 1995-1996

1. Δυο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

Τους δίνεται ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος πλευρών, μεγαλύτερο από 6 (π.χ. ένα 100-γωνο). Κάθε παίκτης συνδέει δυο από τις κορυφές του πολυγώνου με ένα τμήμα το οποίο, όμως, να μην τέμνει κανένα από άλλα τέτοια τμήματα που οι παίκτες είχαν φέρει προηγουμένως. Θα χάσει ο παίκτης που πρώτος δε θα μπορέσει να φέρει ένα τέτοιο τμήμα.

Μπορεί ένας παίκτης να ακολουθήσει μια στρατηγική ώστε να νικήσει σίγουρα;

2. Ένα τετράγωνο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ ώστε οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν να βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, και ΔΑ αντίστοιχα. Αν ο λόγος του εμβαδού του ΚΛΜΝ προς το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι λ, να βρείτε το λόγο των μηκών των τμημάτων στα οποία διαιρούνται οι πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ από τις κορυφές του άλλου τετραγώνου.

3. Υπάρχει τρίγωνο με όλες τις πλευρές του και ένα ύψος του να έχουν ακέραια μήκη και η περίμετρός του να είναι 21;

4. Αν α > 0, β > 0 να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\leq\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$.

Θαλής Β' Λυκείου 1995-1996

1. Έστω κύκλος ακτίνας 1, στον οποίο ορίζουμε ένα συγκεκριμένο σημείο A_0.

Στη συνέχεια ορίζουμε τα σημεία A_ν ως εξής:

Το μήκος του τόξου A_0A_ν (όπου αυτό μπορεί να είναι και μεγαλύτερο του 2π) να είναι $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{\nu}$.

Να δείξετε ότι:

α) Δεν υπάρχει σημείο A_ν, $\nu \geq 1$ που να συμπίπτει με το A_0.

β) Δεν υπάρχουν $\mu,\nu \in \mathbb{N}$, $\mu \neq \nu$ ώστε τα σημεία A_μ, A_ν να συμπίπτουν.

2. Αν ΑΒΓΔ είναι ένα τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ, να δείξετε ότι ισχύει: $AB + \Gamma\Delta \geq 4\rho$.

3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ν με την ιδιότητα:

Από το σύνολο $A(\nu) = \{1, 2, ..., \nu\}$ μπορούμε να διαλέξουμε κ αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa$ όπου $\kappa \geq 3$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, έτσι ώστε να ισχύει, $|\alpha_1 - \alpha_2| = |\alpha_2 - \alpha_3| = ... = |\alpha_{\kappa-1} - \alpha_\kappa| = |\alpha_\kappa - \alpha_1|$.

Τι συμβαίνει αν απλά $\kappa \geq 1$;

4. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1$ διαιρείται με το 1930.

Θαλής Γ' Λυκείου 1995-1996

1. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$\Pi(x,y) = xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

με $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

2. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι:

$$f(x - 2) + f(x + 2) = \sqrt{3}\, f(x).$$

Να δείξετε ότι η f είναι περιοδική.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ε μια ευθεία που περνάει από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου και τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $\dfrac{AK}{KB} \geq 4\dfrac{\Gamma\Lambda}{A\Lambda}$.

4. Έστω Α ένα σύνολο ν ακεραίων αριθμών. Από το σύνολο αυτό κατασκευάζουμε όλες τις δυνατές παραστάσεις παίρνοντας ένα ορισμένο πλήθος αριθμών και προσθαφερώντας τους μεταξύ τους. Π.χ. αν $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4} \in A$ τότε μια δυνατή παράσταση είναι η $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} - \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4}$ ή $-\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4}$.

Δύο διαφορετικές παραστάσεις ανεξάρτητα από το αποτέλεσμά τους θα θεωρούνται διακεκριμένες.

Να υπολογιστεί το πλήθος των δυνατών παραστάσεων.