Γ' Γυμνασίου 1990-1991

1. Να γραφεί κύκλος που περνά από τα μέσα των τριών πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το τόξο του κύκλου, το εξωτερικό της υποτείνουσας, ισούται με τη διαφορά των εξωτερικών τόξων του κύκλου στις 2 κάθετες πλευρές του τριγώνου.

2. Να αναλυθεί σε γινόμενο η παράσταση $α^7 - α$. Αν το α είναι φυσικός αριθμός, η παράσταση αυτή είναι πάντα διαιρετή με το 42.

3. Υπάρχουν άνθρωποι πάνω στη Γη που έχουν γεννηθεί την ίδια χρονολογία, ημερομηνία, ώρα και λεπτό; Η απάντηση να δικαιολογηθεί και να εξεταστεί αν ισχύει για τους κατοίκους της Ελλάδας (10.000.000).

4. Να παραγοντοποιηθούν τα πολυώνυμα:

$A = x^4 - x^2 +16$

$B = x^4 - 7x^2 + 10$

Α' Λυκείου 1990-1991

1. Έστω α, β, γ τρεις θετικοί αριθμοί. Ο α είναι κ% του β+γ και ο β είναι λ% του γ+α, όπου κ και λ πραγματικοί αριθμοί.

Πόσο % του α+β είναι ο α;

2. Αν x>0, τότε να δείξετε ότι $\frac{x^2+3x+3}{x+1}+\frac{1}{x}>4$.

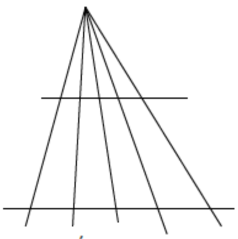
3. Σε μια τάξη υπάρχουν 10 μαθητές που έχουν διαφορετικό ύψος. Ένας από αυτούς, που θα τον ονομάσουμε Α, έχει ύψος ίσο με το μέσο όρο του ύψους των 6 πιο κοντών, ενώ ένας άλλος, που θα τον ονομάσουμε Β, έχει ύψος ίσο με το μέσο όρο του ύψους και των 10 μαθητών. Ποιος είναι πιο κοντός, ο Α ή ο Β;

(Μέσο όρο ν αριθμών ονομάζουμε το πηλίκο του αθροίσματος των αριθμών δια του ν.)

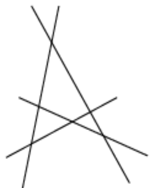
4. α) Στο διπλανό σχήμα α, πόσα τρίγωνα υπάρχουν;

β) Στο διπλανό σχήμα β, υπάρχουν 4 τμήματα που καθένα τέμνει 3 ακριβώς τμήματα.

Μπορούμε να τοποθετήσουμε στο επίπεδο 9 τμήματα ώστε καθένα από αυτά να τέμνει ακριβώς 3 τμήματα από τα δοσμένα;



σχήμα α



σχήμα β

Β' Λυκείου 1990-1991

1. Ευθεία ε τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα και την προέκταση της ΒΓ στο Ζ.

Αν $\frac{A\Delta}{\Delta B}=\kappa$ και $\frac{\Gamma E}{EA}=\lambda$, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{Z\Gamma}{ZB}$.

2. Έστω f μια συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}$.

Να βρείτε το μέγιστο πεδίο ορισμού της f και τα διαστήματα στα οποία η f είναι σταθερή.

3. Να λύσετε την εξίσωση $x^4 + 4x^3 - 8x = \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα που το αριστερό του άκρο το έχουμε συμβολίσει με 0 και το δεξί του με 1. Χωρίζουμε με σημεία το τμήμα αυτό σε μικρότερα τμήματα και τα συμβολίζουμε με τυχαίο τρόπο με τους αριθμού; 0 και 1. Καθένα από τα μικρά τμήματα που τα άκρα του έχουν αριθμούς 0, 1 τα ονομάζουμε "καλά", ενώ αυτά που έχουν αριθμούς 0, 0 ή 1, 1 "κακά".

Να δείξετε ότι όπως και να τοποθετήσουμε τους αριθμούς 0 και 1 στα άκρα των μικρών τμημάτων, το πλήθος των καλών τμημάτων είναι περιττό.

Γ' Λυκείου 1990-1991

1. Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και σημείο Ο στο εσωτερικό του. Από τυχαίο σημείο Μ θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{M\Gamma}$. Αν κ· $\overrightarrow{MA}$ +λ· $\overrightarrow{MB}$ +μ· $\overrightarrow{M\Gamma}$ = $\overrightarrow{MO}$, όπου κ+λ+μ=1, να δείξετε ότι κ>0, λ>0, μ>0.

2. Έστω η ακολουθία α_ν με $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $\frac{2}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\alpha_{\nu-1}}+\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}$, με $\nu \geq 2$.

Να υπολογίσετε το $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu$.

3. Έστω Α ένας ν×ν πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς που ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - A + I = 0$, όπου Ι και 0 είναι ο μοναδιαίος και ο μηδενικός ν×ν πίνακας αντίστοιχα.

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $B_\lambda = A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος και να υπολογιστεί ο αντίστροφός του.

4. Έστω α_ν ακολουθία φυσικών αριθμών, με $\alpha_1=2$, $\alpha_{\nu+1}=(\nu+1)\alpha_\nu+1$, με ν = 1, 2, ... Στο επίπεδο δίνονται $\alpha_\nu+1$ διαφορετικά σημεία, που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Τα τμήματα που συνδέουν 2 από τα σημεία αυτά, τα χρωματίζουμε με ν διαφορετικά χρώματα.

Να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει τρίγωνο με κορυφές τα σημεία αυτά, που οι πλευρές του έχουν το ίδιο χρώμα.