



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ  
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δεν θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτευτείται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα**, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. και δεν προβλέπεται Αναβαθμολόγηση (διότι γίνεται εσωτερικά).
9. Ο «**ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ**» θα διενεργηθεί στις **19 Ιανουαρίου 2008** και η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **23 Φεβρουαρίου 2008** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στη **25<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΠΓΔΜ, Μάιος 2008)**, στην **12<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Αλβανία, Ιούνιος 2008)** και στην **49η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Μαδρίτη Ισπανίας, Ιούλιος 2008)**.
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν αφιλοκερδώς στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος  
Καθηγητής Νικόλαος Αλεξανδρής

Ο Γενικός Γραμματέας  
Ιωάννης Τυρλής



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007**

## Β΄ τάξη Γυμνασίου

### Πρόβλημα 1.

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = (200 : 8 + 12 \cdot 100) + [200 : (8 + 2) + 762] \cdot [(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007}]^2.$$

### Πρόβλημα 2.

Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

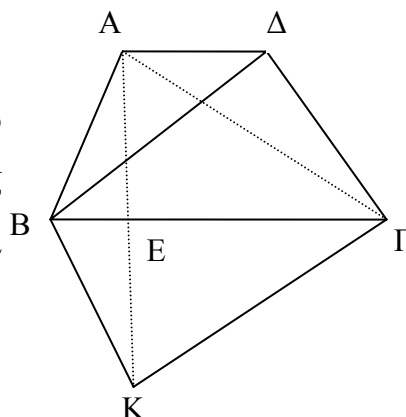
### Πρόβλημα 3.

Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

### Πρόβλημα 4.

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση ΒΓ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΔ. Αν το εμβαδόν του τραpezίου είναι  $300\text{cm}^2$  και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΑΚ), να υπολογίσετε:

- (α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και  
 (β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΓ.



**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
**68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007**  
**Γ΄ τάξη Γυμνασίου**

**Πρόβλημα 1**

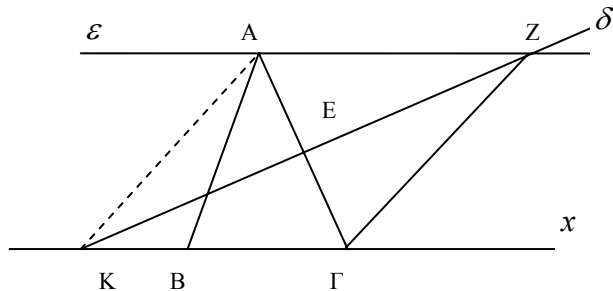
Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad B = -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)].$$

Για ποιες τιμές του  $x$  αληθεύει η ανίσωση:  $A > B$ .

**Πρόβλημα 2**

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$ . Η ευθεία  $\varepsilon$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  και η ευθεία  $\delta$  είναι μεσοκάθετη της πλευράς  $A\Gamma$ .



- (α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $Z\hat{\Gamma}x$ ,  
 (β) Να αποδείξετε ότι  $KA = AZ$ .

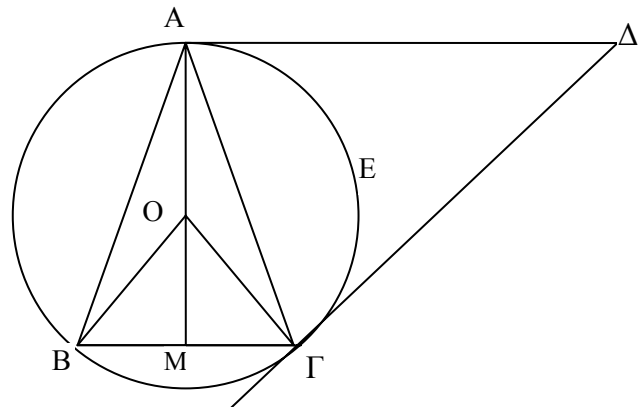
**Πρόβλημα 3**

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο  $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ .

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής  $A = aaabb$ , όπου  $a, b$  ψηφία με  $a \neq 0$ , ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

**Πρόβλημα 4**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ . Η  $A\Delta$  είναι παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  και η  $\Gamma\Delta$  είναι κάθετη προς την  $O\Gamma$ .



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα  $OAE\Gamma$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = a$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = a$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

## Α΄ τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.

Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς  $x$  και  $y$  που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον  $x$  κατά 50 και αυξήσω τον  $y$  κατά 40, τότε το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται.

Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: Αν αυξήσεις τον αριθμό  $x$  κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό  $y$  κατά 20, τότε πάλι το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται;

Ο Γιάννης απαντάει: Πράγματι, αυτό ισχύει.

Η Μαρία καταλήγει: Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

### Πρόβλημα 2

Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με  $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$  τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(\beta - 1)(\beta + 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

### Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 45^\circ$ . Φέρουμε ευθεία  $\varepsilon$  κάθετη προς την  $A\Gamma$  στο  $A$  η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Gamma B$  στο  $E$ . Πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = A\Gamma$  με το σημείο  $A$  να βρίσκεται μεταξύ των  $E$  και  $\Delta$ . Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς  $A\Gamma = \beta$ :

- (α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ ,
- (β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $AE$ .

### Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί  $x, y$  που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

## Β΄ τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y$  που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 - 2y^2 + 2y^4 + 2 = 0.$$

### Πρόβλημα 2

Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των θετικών μονοψήφιων ακεραίων αριθμών  $\kappa, \lambda, \mu$ , για τους οποίους η δευτεροβάθμια εξίσωση  $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$  έχει δύο ακέραιες ίσες λύσεις.

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  και ημιευθεία  $Αx // ΒΓ$  (η  $Αx$  βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο  $Γ$  ως προς την ευθεία  $ΑΒ$ ). Στην ημιευθεία  $Αx$  θεωρούμε τα σημεία  $Δ$  και  $Ε$  έτσι, ώστε το τετράπλευρο  $ΒΓΔΕ$  να είναι ρόμβος (το σημείο  $Ε$  βρίσκεται ανάμεσα στο  $Α$  και στο  $Δ$ ). Στο σημείο  $Δ$  θεωρούμε την κάθετη ευθεία στη  $ΔΓ$  που τέμνει την προέκταση της πλευράς  $ΒΑ$  στο  $Ζ$ .

(α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο  $ΔΕΖ$  είναι ισόπλευρο.

(β) Να αποδειχθεί ότι το  $Ε$  είναι έγκεντρο του τριγώνου  $ΑΓΖ$ .

### Πρόβλημα 4.

Αν  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ , να λυθεί το σύστημα:

$$3x^2y + 2yz^2 = 70xz$$

$$7y^2z + 4zx^2 = 256xy$$

$$5z^2x + 6xy^2 = 52yz.$$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

## Γ' τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 30^\circ$ . Στα σημεία  $A$  και  $\Gamma$  θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$  που τέμνονται στο  $\Delta$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι όμοια.  
(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = a$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

### Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιοριστούν οι παράμετροι  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2 = 0 \text{ και } \mu x^2 - 4x - \lambda - 2 = 0.$$

(β) Για τις τιμές των  $\lambda, \mu$  που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2}{\mu x^2 - 4x - \lambda - 2} = \frac{17}{8}.$$

### Πρόβλημα 3

Αν για τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή.

### Πρόβλημα 4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς  $a, b$  και  $c$ , που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ