ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016

Λύσεις των θεμάτων

Έκδοση 1η (20/05/2016, 16:00)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=54335

Συνεργάστηκαν οι:

*Ανδρέας Βαρβεράκης, Σπύρος Βασιλόπουλος, Βασίλης Κακαβάς,
Γιώργης Καλαθάκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καρδαμίτσης,
Νίκος Κατσίπης, Χρήστος Κυριαζής, Στάθης Κούτρας, Γρηγόρης Κωστάκος,
Θάνος Μάγκος, Βαγγέλης Μουρούκος, Ροδόλφος Μπόρης
Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Γιώργος Ρίζος,
Γιώργος Ροδόπουλος, Μπάμπης Στεργίου, Σωτήρης Στόγιας,
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Κώστας Τηλέγραφος, Χρήστος Τσιφάκης*

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν A και A' είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι για τις πιθανότητές τους ισχύει $P(A')=1-P(A)$.

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α3. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ τότε για τις πιθανότητές τους ισχύει $P(A) \le P(B)$.

β) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 151

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 87

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 14 (β΄περίπτωση)

Α4. **α)** **Σωστό,** Σχολικό Βιβλίο σελ.151, Θεώρημα 4

β) **Λάθος**, Σχολικό Βιβλίο σελ. 87

γ) **Σωστό,** Σχολικό Βιβλίο σελ. 31

δ) **Σωστό,** Σχολικό Βιβλίο σελ. 67

ε) **Λάθος**, Σχολικό Βιβλίο σελ. 40

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 9

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

Μονάδες 8

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f'(x)-12}{x+1}$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

B1. Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=x^2-5x+6$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

Είναι $f'(x)<0\Leftrightarrow 2<x<3$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x<2$ ή $x>3$

Συνεπώς για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(2)=0, f'(x)>0$ στο $(-\infty,2)$ και $f'(x)<0$ στο $(2,3)$ άρα η f παρουσιάζει για $x=2$ τοπικό μέγιστο.

Όμοια, αφού $f'(3)=0, f'(x)<0$ στο $(2,3)$ και $f'(x)>0$ στο $(3,+\infty)$ άρα η f παρουσιάζει για $x=3$ τοπικό ελάχιστο.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

B2. Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $(0,f(0))$. Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της με $x=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(0)=6$. Επομένως η εξίσωσή της είναι $y=6x+\beta$. Επειδή όμως το σημείο $(0,f(0))$, δηλαδή το $(0,-1)$, ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε $-1=6\cdot 0+\beta\Leftrightarrow\beta=-1$ Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=6x-1$.

B3. $$\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-6)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-6)=-7$$

ΘΕΜΑ Γ

Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησής τους.

Γ1. Να προσδιορίσετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος χρησιμοποιώντας ένα δενδροδιάγραμμα.

Μονάδες 4

Γ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους, τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι»

Β: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών»

Γ: «τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου»

Μονάδες 6

Γ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$$\Delta = A \cap B,\ E = A \cup B,\ Z = \Gamma - E$$

(μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

Η: « δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B »

Θ: « πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B »

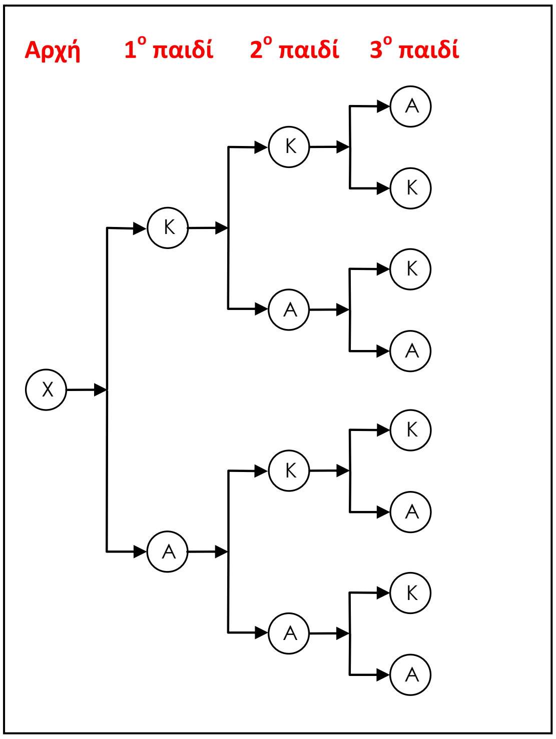
(μονάδες 6)

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ:

Γ1. Το παραπάνω πείραμα τύχης περιλαμβάνει 3 στάδια (όσα και τα παιδιά που έχει η οικογένεια). Κατασκευάζουμε το διπλανό δενδροδιάγραμμα και διαβάζοντας κάθε μία από τις διαδρομές κάθε «κλαδιού» προσδιορίζουμε τον δειγματικό χώρο Ω.

$$\Omega = \{ΚΚΑ, ΚΚΚ, ΚΑΚ, ΚΑΑ, ΑΚΚ, ΑΚΑ, ΑΑΚ, ΑΑΑ\}$$



Γ2. Το ενδεχόμενο Α: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι » είναι το

$$A = \{ΚΚΑ, ΚΚΚ, ΚΑΚ, ΚΑΑ\}$$

Το ενδεχόμενο Β: « ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών » είναι το

$$B = \{ΚΚΑ, ΚΚΚ, ΚΑΚ, ΑΚΚ\}$$

Τέλος, το ενδεχόμενο Γ: « τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου » είναι το

$$\Gamma = \{ΚΚΑ, ΚΚΚ, ΑΑΚ, ΑΑΑ\}$$

Γ3.

α) Είναι $\Delta = A \cap B = \{KKA, KKK, KAK\}$ με $P(\Delta) = \dfrac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$

Είναι $E = A \cup B = \{KKA, KKK, KAK, KAA,\ AKK\}$ και $P(E) = \dfrac{N(E)}{N(\Omega)} = \dfrac{5}{8}$

Είναι $Z = \Gamma - E = \{AAK,\ AAA\}$ και $P(Z) = \dfrac{N(Z)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

β) Το ενδεχόμενο Η: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B» είναι το $H = (A \cup B)'$, άρα

$$P(H) = P\left[(A \cup B)'\right] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Το ενδεχόμενο Θ: « πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B» είναι το $\Theta = (A - B) \cup (B - A)$ και επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε

$$P(\Theta) = P\left[(A-B) \cup (B-A)\right] = P(A-B) + P(B-A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

διότι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν ν υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως στον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος σε λεπτά	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i
[8,.....)		20
[.....,.....)	14	15
[.....,.....)		10
[.....,.....)		ν_4
ΣΥΝΟΛΟ		$\nu = ...$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $c = 4$.

Μονάδες 4

Δ2. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x} = 14$, να αποδείξετε ότι $\nu_4 = 5$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ3. Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι $s=4$ και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Δ5. Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

Μονάδες 4

ΛΥΣΗ:

Δ1. Οι δύο πρώτες κλάσεις είναι οι

$$[8,\, 8+c),\ [8+c,\, 8+2c) \text{ και } x_2 = \frac{8+c+8+2c}{2} = \frac{16+3c}{2},$$

οπότε

$$14 = \frac{16+3c}{2} \Leftrightarrow 28 = 16+3c \Leftrightarrow 3c = 28-16 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4 .$$

Δ2.

Κλάσεις [,) Χρόνος (σε λεπτά)	**Κεντρική τιμή** x_i	**Συχνότητα** ν_i	$x_i\nu_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	ν_4	$22\nu_4$
ΣΥΝΟΛΟ		50	$590+22\nu_4$

Ισχύει ότι: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i}{\nu}$, οπότε

$$14 = \frac{10\cdot 20+14\cdot 15+18\cdot 10+22\cdot \nu_4}{20+15+10+\nu_4} \Leftrightarrow 14 = \frac{200+210+180+22\nu_4}{45+\nu_4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14(45+\nu_4) = 590+22\nu_4 \Leftrightarrow 630+14\nu_4 = 590+22\nu_4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40 = 8\nu_4 \Leftrightarrow \nu_4 = 5 .$$

Συνεπώς ο πίνακας συχνοτήτων είναι ο παρακάτω:

Κλάσεις [,) **Χρόνος (σε λεπτά)**	**Κεντρική τιμή x_i**	**Συχνότητα** ν_i	$x_i \nu_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	5	110
ΣΥΝΟΛΟ		50	700

Δ3. Οι υπολογιστές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά ανήκουν στο διάστημα $[9,12)$ και στις κλάσεις $[12,16)$, $[16,20)$, $[20,24)$.

Επειδή στην κλάση $[8,12)$ οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, το πλήθος των υπολογιστών στο διάστημα $[9,12)$ είναι ίσο με $\frac{3}{4}\nu_1$. Επομένως έχουμε:

$$\frac{3}{4}\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\frac{3}{4}\cdot 20+15+10+5=15+15+10+5=45,$$

δηλαδή 45 υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Δ4. Ισχύει ότι:

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\nu_i}{\nu},$$

οπότε

$$s^2=\frac{(10-14)^2\cdot 20+(14-14)^2\cdot 15+(18-14)^2\cdot 10+(22-14)^2\cdot 5}{20+15+10+5}=$$

$$=\frac{4^2\cdot 20+0\cdot 15+4^2\cdot 10+8^2\cdot 5}{50}=\frac{320+160+320}{50}=\frac{800}{50}=16,$$

άρα $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{16}=4$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{4}{|14|}=\frac{2}{7}>\frac{1}{10},$$

αφού $\frac{2}{7}>\frac{1}{10}\Leftrightarrow 2\cdot 10>7\cdot 1 \Leftrightarrow 20>7$ που ισχύει.

Συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Εάν x_i είναι οι αρχικοί χρόνοι επεξεργασίας του προγράμματος και y_i οι αντίστοιχοι νέοι χρόνοι μετά την αντικατάσταση του επεξεργαστή με ταχύτερο, τότε για τους νέους χρόνους ισχύει:

$$y_i=0,8x_i$$

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, για τη νέα μέση τιμή $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση s_y των χρόνων y_i ισχύει

$$\bar{y}=0,8\bar{x} \text{ και } \quad s_y=|0,8|s=0,8s,$$

οπότε ο αντίστοιχος συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV_y=\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{0,8s}{0,8\bar{x}}=\frac{s}{\bar{x}}=CV=\frac{2}{7}>\frac{1}{10}.$$

Επομένως και το νέο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Β2. Από τον τύπο $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ που διδάσκεται στα Μαθηματικά Προσανατολισμού, η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y-(-1)=6x \Leftrightarrow y=6x-1$

Β3. Παρατηρούμε ότι $f'(-1)=12$ και επειδή η συνάρτηση $f'(x)=x^2-5x+6$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, άρα το ζητούμενο όριο που γράφεται $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)-f'(-1)}{x-(-1)}$, είναι η δεύτερη παράγωγος της f στο -1. Επειδή $f''(x)=2x-5$ άρα $f''(-1)=-2-5=-7$, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με -7.

Γ3. β) Μπορούμε να υπολογίσουμε τα ενδεχόμενα H και Θ με αναγραφή των στοιχείων τους και έτσι να βρούμε την αντίστοιχη πιθανότητα να πραγματοποιηθούν.

Πράγματι, επειδή $H=(A\cup B)'=\{ΚΚΑ, ΚΚΚ, ΚΑΚ, ΚΑΑ, ΑΚΚ\}'=\{ΑΚΑ, ΑΑΚ, ΑΑΑ\}$ άρα $P(H)=\frac{N(H)}{N(\Omega)}=\frac{3}{8}$ και επειδή $\Theta=(A-B)\cup(B-A)=\{ΚΑΑ\}\cup\{ΑΚΚ\}=\{ΚΑΑ, ΑΚΚ\}$ άρα $P(\Theta)=\frac{N(\Theta)}{N(\Omega)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Δ4. Για την εύρεση του s μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu}\nu_i x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}\nu_i x_i\right)^2}{\nu}\right]$$

και τον παρακάτω βοηθητικό πίνακα

Κλάσεις [,)	**Κεντρική τιμή x_i**	**Συχνότητα ν_i**	**$\nu_i x_i$**	**$\nu_i x_i^2$**
[8, 12)	10	20	200	2000
[12, 16)	14	15	210	2940
[16, 20)	18	10	180	3240
[20, 24)	22	5	110	2420
ΣΥΝΟΛΟ		50	700	10600

Έτσι, είναι

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu}\nu_i x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}\nu_i x_i\right)^2}{\nu}\right]=\frac{1}{50}\left[10600-\frac{(700)^2}{50}\right]=\frac{1}{50}\left[10600-\frac{490000}{50}\right]=$$

$$=\frac{1}{50}\left[10600-\frac{49000}{5}\right]=\frac{10600-9800}{50}=\frac{800}{50}=16$$

απ' όπου s = 4.

Δ4. **Π**ίνακας για τον υπολογισμό του $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\nu_i}{\nu}$:

Κλάσεις [,)	**Κεντρική τιμή x_i**	**Συχνότητα ν_i**	$x_i-\bar{x}$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu_i$
[8, 12)	10	20	-4	16	320
[12, 16)	14	15	0	0	0
[16, 20)	18	10	4	16	160
[20, 24)	22	5	8	64	320
ΣΥΝΟΛΟ		50			800