

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ Ε Μ Α 1

A1. Η δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (I) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 .

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της (I) δίνεται από το τύπο: $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$.

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το σημείο $M(x,y)$ με $x > 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.

β. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει δυο άνισες ρίζες όταν $\Delta \leq 0$.

γ. Η εξίσωση $x^v = \alpha$, με v περιττό και α αρνητικό είναι αδύνατη.

δ. Για οποιουδήποτε ομόσημους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

ε. Αν δυο αριθμοί x_1, x_2 έχουν άθροισμα S και γινόμενο P , τότε η εξίσωση

δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 είναι η: $x^2 - Sx + P = 0$.

Θ Ε Μ Α 2

Έστω τα ενδεχόμενα A και B δειγματικού χώρου Ω . Αν γνωρίζουμε ότι $|3P(A) - 2| + |2P(B) - 1| = 0$ τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{2}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

Γ3. Αν $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, να βρείτε:

α) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup B$ και $(A \cap B)'$.

β) Την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιείται το A και να μην πραγματοποιείται το B .

Θ Ε Μ Α 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\lambda - 2)x^2 - 2|\lambda|x + \lambda + 2$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$.

Δ1. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η συνάρτηση να έχει ελάχιστο στο $x_0 = 2$

Δ2. Για $\lambda = 4$:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$ και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $|f(x)| = 2x - 2$.

γ) Ναδειχτεί ότι ο αριθμός $A = \frac{\sqrt[4]{f(5)}}{\sqrt{f(4)-1}} - \frac{2}{\sqrt{f(0)+1}}$ $A=$, είναι ρητός.

δ) Για ποιες τιμές του x , με $x \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων.

Θ Ε Μ Α 4

Έστω οι αριθμοί 4, $x - 1$, $3x - 11$ οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda \neq 1$.

Γ1. Να υπολογιστεί το x και το λ της προόδου.

Γ2. Αν ο τέταρτος όρος της είναι το 4 τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

β) Να υπολογιστεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

γ) Να αποδείξετε ότι $\kappa^{\frac{3}{16}} = 2\sqrt{2}$, όπου $\kappa = \alpha_{10}$.

Θ Ε Μ Α 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Δ2. Να απλοποιηθεί η συνάρτηση $h(x) = [f(x)]^2 \cdot (4 - x^2)$.

Δ3. Αν $h(x) = \frac{2+x}{x-4}$, να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1 = h(3)$ και

$$x_2 = \frac{1}{h(3)}.$$

Θ Ε Μ Α 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \kappa^2 \sqrt{9 - x^2}$, $\kappa \in \mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Γ2. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{5}, 8)$, να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ .

Γ3. Για $\kappa = 2$ να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Θ Ε Μ Α 7

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{6 - |3 - x|}$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Δ2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{f(-1)}{f(0) - f(-1)} + \frac{f(0)}{f(0) + f(-1)} = 5.$$

Θ Ε Μ Α 8

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - (\lambda - 2)x - \lambda - 3$, $\lambda \in R$, $x \in R$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει 2 κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

Δ2. Αν x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ , ώστε να ισχύει $x_1 + x_2 = 1$.

Δ3. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (ii), να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.

Θ Ε Μ Α 9

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (\mu - 2)x - 2\mu + 1$. $\mu \in R$, $x \in R$.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού μ , ώστε η ευθεία (ε) να σχηματίζει γωνία $\varphi = 45^\circ$ με τον άξονα $x'x$.

Γ2. Αν $\lambda = 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τους άξονες.

β) Την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την (ε) και διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$

Θ Ε Μ Α 10

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x - 2} + \frac{1}{x - 4}$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

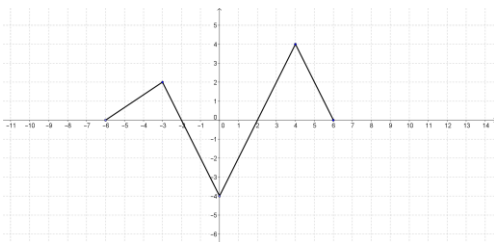
Δ2. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην γραφική παράσταση της f :

$$A(3, 1), B\left(6, \frac{5}{2}\right), \Gamma(5, \sqrt{3} + 1) \text{ και } \Delta\left(7, \frac{3\sqrt{5} + 2}{2}\right)$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{8} \cdot \sqrt{f(5)} \cdot \sqrt{f(5) - 2} = 4$

Θ Ε Μ Α 11

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B2. Να βρείτε τις τιμές: $f(-3)$, $f(4)$, $f(0)$, $f(-6)$ και $f(3)$.

B3. Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = 2$, $f(x) = 0$ $f(x) = 5$

B4. Να λύσετε τις ανισώσεις: $f(x) > 0$ και $f(x) > 2$.

Θ Ε Μ Α 12

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2\lambda x + 2 - \lambda = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Γ2. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε:

α) Να βρεθούν συναρτήσει του λ το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών.

β) Να βρείτε το λ ώστε να ισχύει η σχέση: $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = -4$.

Θ Ε Μ Α 13

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3$.

B1. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $A = |x - 2| - 3$.

B2. Να λύσετε την εξίσωση: $A = 2$.

B3. Να λύσετε την ανίσωση: $A < 0$.