

ΕΥΘΕΙΑ**ΘΕΜΑ 1**

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ϵ του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $\psi = -\chi + 7$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\epsilon_1: \chi - 2\psi - 8 = 0$, $\epsilon_2: 2\chi - 4\psi + 10 = 0$ και το σημείο A της ϵ_1 που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ϵ_1

(Μονάδες 10)

γ) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών ϵ και ϵ_2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του B .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: \chi - 8\psi + 16 = 0$ και $\epsilon_2: 2\chi + \psi + 15 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M .

Αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνουν τον άξονα $\psi'\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M , A και B

(Μονάδες 10)

β) αν K είναι το μέσο του τμήματος AB , να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος \overline{MK}

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 8\chi + \psi - 28 = 0$ και $\varepsilon_2 : \chi - \psi + 1 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα $\chi'\chi$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda\chi - \psi - 3\lambda + 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 5

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \chi - 3\psi + 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3\chi + \psi - 5 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και την αρχή O των αξόνων.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 6

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3\chi + \psi + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : \chi + 2\psi - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο Γ , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ .

(Μονάδες 8)

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ έχει εξίσωση την $3\chi - 4\psi - 12 = 0$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3\chi + \psi + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : \chi + 2\psi - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο Γ , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ .

(Μονάδες 8)

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ έχει εξίσωση την $3\chi - 4\psi - 12 = 0$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 8

Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,6)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1

(Μονάδες 8)

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1 , τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2

(Μονάδες 9)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9

Έστω $M(3,5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1,1)$.

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου B .

(Μονάδες 6)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου K του άξονα $x'x$ έτσι, ώστε να ισχύει $(KA) = (KB)$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y+x=1$ και το σημείο $A(2,-4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε) .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 11

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - \psi - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2: 10x + \psi - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 8x + \psi - 6 = 0$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία AB

(Μονάδες 5)

ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ , να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \chi - 4\psi - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2, 4)$ και $B(2, 6)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi, \psi)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$

ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $\chi - 2\psi - 5 = 0$ και $\chi - 2\psi + 25 = 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 13

Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2 - 6\chi - 6\psi + 8 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\varepsilon_1: \chi + \psi - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: \chi + \psi - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

γ) Αν A είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και B σημείο της ευθείας ε_2 με τεταγμένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B

(Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ να είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + \gamma^2 - 2\chi\gamma - 3\lambda\chi + 3\lambda\gamma + 2\lambda^2 = 0$, με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.

(Μονάδες 12)

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 15

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3\chi + \psi + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : \chi + 2\psi - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο Γ , τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ

(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi, \psi)$ για τα οποία ισχύει $(KBF) = (AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 16

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon : \psi = \chi$, με $A(\chi_1, \psi_1)$, $B(\chi_2, \psi_2)$ και $\chi_1 < \chi_2$

Αν το σημείο $M(3, 5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

(Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi, \psi)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $\chi - \psi - 2 = 0$ και $\chi - \psi + 6 = 0$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 17

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\phi \in [0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία.

Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{a}\vec{b} + 12)\chi + (\vec{a}\vec{b} - 12)\psi - 5 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\phi \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 3)

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $\psi'\psi$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = 3\vec{a}$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = -3\vec{a}$

(Μονάδες 7)

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b} \perp \vec{a}$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 18

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (2\lambda-1)x+y-5=0$, $\varepsilon_2: (\lambda^2+3)x-y-15=0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(2,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται.

(Μονάδες 7)

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A , να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $\lambda=2$ και B, Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 19

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2\kappa\chi - (1+\kappa)\psi + 1 - 3\kappa = 0$ και $\zeta: (1+3\kappa)\chi + (\kappa-1)\psi + 2 - 6\kappa = 0$,

όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 20

Δίνονται τα σημεία $A\left(1, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} και $\overline{B\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu \cdot \overline{B\Gamma} = -\overline{AB}$

(Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma) = 1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 21

Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(2\mu+1,3\mu-2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} και $\overline{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από το μ .

(Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ ;

(Μονάδες 5)