1. Ρωτήσαμε 50 μαθητές μιας τάξης για τον αριθμό των αδελφών τους. Οι απαντήσεις που πήραμε είναι: 0,1,2,3,4,5. Αν $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ είναι οι αντίστοιχες συχνότητες τους και γνωρίζετε επίσης ότι:

- Η πιθανότητα να έχουν 5 αδέλφια είναι 0,1
- Ο αριθμός v_3 αντιστοιχεί σε γωνία 72° σε κυκλικό διάγραμμα
- Ο αριθμός v_4 ισούται με το $\lim_{x \to 4} \dfrac{2(x-4)}{\sqrt{x}-2}$
- Η διάμεσος και η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι 2,5.

α) Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.
β) Ποια η πιθανότητα αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή η οικογένειά του να έχει 2 παιδιά.
γ) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας του παραπάνω δείγματος.

2. Έστω Α, Β δύο μη ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με μη μηδενικές πιθανότητες $P(A), P(B)$ αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύουν:

$P[(A-B) \cup (B-A)] = \dfrac{1}{5}$ και $P(A) + P(B) = \dfrac{1}{x^2+1}, x \in R$.

α) Να ορίσετε την συνάρτηση $g(x) = P(A \cap B)$.
β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της g ως προς x, όταν x=0.
γ) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της $P(A \cap B)$.
δ) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ: «πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α, Β ή δεν πραγματοποιείται κανένα από αυτά», όταν η $P(A \cap B)$ παίρνει την μέγιστη τιμή της.

3. Ο παρακάτω πίνακας δίνει ορισμένα από τα αποτελέσματα πρόσφατης έρευνας που έγινε σε δείγμα ελληνικών νοικοκυριών, σχετικά με το ύψος των οφειλών τους (σε Ευρώ) σε καταναλωτικά δάνεια.

Οφειλές σε κλάσεις [-)	v_i	$f_i\%$
0 - 5.000	350	
5.000 - 10.000		
10.000 - 15.000	500	
15.000 - 20.000		
20.000 - 25.000		
Σύνολο		

Αν ισχύουν:
i) Το πλήθος των νοικοκυριών που οφείλουν μέχρι 5.000€ αντιστοιχεί στο κυκλικό διάγραμμα σε κυκλικό τομέα γωνίας 63°.
ii) Η συχνότητα v_5 είναι ίση με την μέγιστη τιμή της συνάρτησης f, με

$f(x) = \dfrac{-45 \cdot (x^2 - 15)}{e^{3-x}}, x > 0$.

iii) Το 35% των νοικοκυριών οφείλει τουλάχιστον 13.000€, τότε:
α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
β) Να βρείτε την διάμεσο των οφειλών.
γ) Το ποσοστό των νοικοκυριών που οφείλουν τουλάχιστον 9.000€ αλλά το πολύ 17.000€.

4. Τα ημερήσια έξοδα 10 μαθητών, σε Ευρώ είναι:

$$x^3-10,\ 50-12x,\ x^2-3, 27-2x^2, 45-3x^2, 20, 30-4x, x^3-7, 30-2x^2, 22-2x$$

με $x \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x για τον οποίο η μέση τιμή των εξόδων των μαθητών γίνεται ελάχιστη.
β) Για x=3 να υπολογίσετε:
i) Τη μέση τιμή των εξόδων.
ii) Τη διάμεσο των εξόδων.
iii) Την τυπική απόκλιση των εξόδων.
iv) Την μεταβολή του συντελεστή μεταβολής των ημερήσιων εξόδων των μαθητών αν αυτά αυξηθούν κατά 10%.

5. Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A, B \neq \varnothing$, $A \cap B \neq \varnothing$ και η συνάρτηση και P η συνάρτηση πιθανότητας που ορίζεται στον δειγματικό χώρο Ω. Δίνεται επίσης η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = P(A-B)\cdot x^2 - 3P(A\cap B)\cdot x + 1, x \in R$ που παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{3}{2}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

α) Να εξετάσετε αν $A \subseteq B$.
β) Να αποδείξετε ότι $P(A\cup B) \leq 2P(B)$.
γ) Ποιος ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των τιμών $t_1, t_2, ..t_\kappa$ της μεταβλητής Τ με μέση τιμή $\bar{t} = 20P(B)$ και τυπική απόκλιση $S = \frac{1}{2}P(A\cup B)$. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

6. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = \begin{cases} 5x & , \quad 0 \leq x < 2 \\ x+8 & , \quad 2 \leq x < 4 \\ 12 & , \quad 4 \leq x < 6 \\ -3x+30 & , \quad 6 \leq x < 10 \end{cases}$$

που η γραφική της παράσταση είναι το πολύγωνο συχνοτήτων της βαθμολογίας στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ μιας ομάδας φοιτητών ομαδοποιημένη σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.

α) Να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος καθώς και τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας των φοιτητών.
β) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν φοιτητή, ποια η πιθανότητα να έχει γράψει βαθμό τουλάχιστον 4,5;
γ) Αν ο καθηγητής αυξήσει την βαθμολογία κάθε φοιτητή κατά 0,30 μονάδες, να βρείτε το ποσοστό των φοιτητών που θα περάσουν το μάθημα, λόγω της αύξησης αυτής.
δ) Αν η τυπική απόκλιση της αρχικής βαθμολογίας είναι $S = 2$, να ελέγξετε αν ο καθηγητής μπορεί να κάνει το δείγμα ομοιογενές αυξάνοντας την βαθμολογία κάθε φοιτητή.
(Θεωρήστε σαν βάση της βαθμολογίας το 5)

7. Έστω $t_1, t_2, .. t_\nu$ οι τιμές μιας μεταβλητής x ενός δείγματος μεγέθους ν. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}[(t_1 - x)^3 + (t_2 - x)^3 + \ldots + (t_\nu - x)^3]$.

α) Να δείξετε ότι: $S^2 = \frac{f'(\bar{x})}{\nu}$, όπου S^2 η διασπορά και $\bar{x}$ η μέση τιμή των τιμών της x.

β) Αν ισχύει $f''(2\bar{x}) = 2006$, να βρείτε το άθροισμα: $\sum_{i=1}^{\nu} t_i$

γ) Αν $\sum_{i=1}^{\nu} t_i^3 = 6018$, να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι: $y = \nu(S^2 + \bar{x}^2)x - 2006$.

8. Εξετάζουμε ένα δείγμα ως προς την ηλικία. Η κατανομή είναι περίπου κανονική. Αν η διάμεσος είναι 10 και το 47,5% του δείγματος έχει ηλικία 10-14.
α) Να βρείτε τη μέση τιμή της ηλικίας, την τυπική απόκλιση και το εύρος του δείγματος.
β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
γ) Μετά από 18 μήνες να βρείτε τη μεταβολή του συντελεστή μεταβολής.
δ) Αν οι 32 μαθητές είναι το πολύ μέχρι 8 ετών, να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος.

9. Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ' τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.
α) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπολοίπων μαθητών.
β) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV).

10. Έστω $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \kappa x^2 + 4x + 2$, όπου $\kappa \in \Omega$.
Αν $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$, τότε να βρείτε:
α) Τις πιθανότητες $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6)$.
β) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β, όπου:
Α: «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»
Β: «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός»
γ) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ, όπου:
Γ: «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R».

11. Η μέση τιμή του βάρους των μαθητών της τάξης ενός λυκείου είναι 60 kg και ο συντελεστής μεταβολής είναι CV=20%. Επίσης είναι γνωστό ότι $\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i$ =355680.

Να βρείτε:
α) Την τυπική απόκλιση .
β) Τον αριθμό των μαθητών της τάξης.
γ) Τον μικρότερο πραγματικό αριθμό λ>0, που πρέπει να προσθέσουμε στο βάρος κάθε μαθητή ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(P(A))^2 x^3-(7P(A)-3)x-x\ln x+P(B)$, με $x>0$ και $P(A),P(B),$ οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω.
α) Να βρείτε την $f'(x)$.
β) Αν ξέρετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει , για $x=1$ εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε την $P(A)$.
γ) Αν $P(A)=\frac{1}{3}$ και $f(1)=\frac{55}{36}$, να αποδείξετε ότι $P(B)=\frac{3}{4}$ και ότι τα ενδεχόμενα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.
δ) Δείξτε ότι $\frac{1}{12}\le P(A\cap B)\le\frac{1}{3}$.

(ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε 2002- 2003)

13. Μελετήσαμε ένα δείγμα 800 οικογενειών ως προς το πλήθος των παιδιών στην οικογένεια. Οι 160 οικογένειες έχουν 3 παιδιά, το 50% των οικογενειών έχουν 2 παιδιά, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα το ποσοστό των οικογενειών που έχουν 1 παιδί αντιστοιχεί σε γωνία 72°.
α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών x_i	**Αριθμός οικογενειών ν_i**	**Σχετική συχνότητα f_i**	**Επίκεντρη γωνία ω_i**	**Αθροιστική συχνότητα N_i**	**Σχετ. αθροιστ. συχν. F_i**
0					
1			72^o		
2		0,50			
3	160				
Σύνολα	800	1	360^o	-	-

β) Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: «Η οικογένεια έχει τουλάχιστον 2 παιδιά»
Β: «Η οικογένεια έχει το πολύ 2 παιδιά»
γ) Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί από τις οικογένειες του δείγματος. Μα βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Γ: «Το παιδί έχει μόνο έναν αδερφό»
Δ: «Το παιδί έχει τουλάχιστον έναν αδερφό»
Ε:: «Το παιδί έχει το πολύ έναν αδερφό»

14. Οι ηλικίες $t_1,t_2,..t_\nu$, ν μαθητών (ν θετικός ακέραιος) έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_x=15\%$. Οι αντίστοιχες ηλικίες των ίδιων μαθητών πριν ένα έτος ακριβώς είχαν συντελεστή μεταβολής $CV_y=16\%$.
α) Να βρείτε την μέση ηλικία $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση S των μαθητών.
β) Μετά από πόσα έτη οι ηλικίες των μαθητών θα αποτελούν ομοιογενές δείγμα;
γ) Αν $t_1{}^2+t_2{}^2+...+t_\nu{}^2=26176$, να αποδείξετε ότι ν=100.
δ) Η ηλικία ενός μαθητή από λάθος μετρήθηκε 17 αντί της πραγματικής 15 έτη. Ποια η πραγματική διασπορά των ηλικιών του δείγματος;

15. Σε ένα αγώνα Μαραθωνίου οι 190 από τους 200 αθλητές που συμμετέχουν, κάνουν την διαδρομή (42 χλμ) σε χρόνο μεταξύ 130 και 170 λεπτών. Η κατανομή των χρόνων είναι περίπου κανονική.
α) Να βρείτε το μέσο χρόνο και την τυπική απόκλιση του χρόνου.
β) Να βρεθεί το ποσοστό των αθλητών που θα κάνουν χρόνο από 130 έως 150 λεπτά.
γ) Να βρεθεί το ποσοστό των αθλητών που θα κάνουν χρόνο από 2 ώρες έως 160 λεπτά.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+3x^2-9x+a^2-a$, όπου $a\in R$.
α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.
β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε το τοπικό μέγιστο να είναι τριπλάσιο του τοπικού ελαχίστου.
γ) Να βρείτε, αν υπάρχει, τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f να είναι ελάχιστος.
δ) Αν g μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R για την οποία ισχύει $g(x)=f\left(\sigma\upsilon\nu 2x\right)$ να βρεθεί η $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

17. Ο διπλανός πίνακας δείχνει την κατανομή των τιμών 100 αυτοκινήτων σε χιλιάδες Ευρώ μιας αντιπροσωπείας μεταχειρισμένων αυτοκινήτων.

Τιμές x_i	f_i%
4	40
6	
8	
10	10
Σύνολο	

α) Αν η μέση τιμή είναι 6 χιλ. ευρώ, να συμπληρώσετε τον πίνακα.
β) Να βρείτε το εύρος ,τη διάμεσο, και την τυπική απόκλιση των τιμών.
γ) Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και τυπική απόκλιση αν γίνει έκπτωση 20% και πρόσθεση εξόδων μεταβίβασης που είναι 500 ευρώ για κάθε αυτοκίνητο;
δ) Πόσα ευρώ πρέπει να αυξήσουμε τις τιμές κάθε αυτοκινήτου ώστε το νέο δείγμα να γίνει ομοιογενές;

18. Έστω δειγματικός χώρος Ω και Α, Β δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα με P(B)>0 και η συνάρτηση $f(x)=\frac{P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})}{3}x^3-P(\mathrm{A})x^2+P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})x+2007,\ x\in R$.
α) Να βρείτε την παράγωγο της f.
β) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=2P(\mathrm{B})$.
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
δ) Δείξτε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο $x=1$, είναι παράλληλη προς την ευθεία $y-\left[P(\mathrm{B}-\mathrm{A})+P(\mathrm{B})\right]\cdot x=3$

19. Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
[0 - …)	…	20
[… - …)	6	40
[… - …)	…	45
[… - …)	…	30
[… - …)	…	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση S

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

Α: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά».

Δίνεται ο τύπος $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2}\nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right]$

20. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση s.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{300s^2}\left(t - \overline{x}\right)^3$ $t \in R$ και $s \neq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t = \overline{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

Δ3. Αν $f'(0)=1$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \ldots, f'(t_\nu)$ είναι ίση με $\frac{1}{100}$.