

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{x \in N : 2 < x \leq 10\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{3\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$, $\Gamma = \{3, 5, 8, 10\}$. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) $P(A)$ β) $P(A \cup B)$ γ) $P(B \cap \Gamma)$ δ) $P(A \cap \Gamma)$

2. Αν A, B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$,

$P(B') = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$, να βρείτε τις παρακάτω πιθανότητες:

α) $P(A)$ και $P(B)$ β) $P(A \cap B')$ και $P(A' \cap B)$

3. Σε μια πόλη κυκλοφορούν δύο περιοδικά A και B . Το 25% των κατοίκων διαβάζει το A , το 85% δεν διαβάζει το B , ενώ το 38% των κατοίκων διαβάζει τουλάχιστον το ένα από τα δύο περιοδικά. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

- α) Ένας κάτοικος να διαβάζει και τα δύο περιοδικά.
 β) Ένας κάτοικος να μην διαβάζει κανένα περιοδικό.
 γ) Ένας κάτοικος να διαβάζει μόνο το A περιοδικό.
 δ) Ένας κάτοικος να διαβάζει μόνο ένα από τα δύο περιοδικά.

4. Θεωρούμε την συνάρτηση f , με $f(x) = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x - 5$, $x \in R$ και A, B δύο

ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A), P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της f , με $P(A) < P(B)$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) Τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) $\frac{2}{3} \leq P(A \cup B) \leq 1$

γ) $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$

5. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:

$P(A - B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ και $P(B' - A) = \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$.

β) Να αποδείξετε ότι $P(B) = \frac{1}{4}$.

γ) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B .

6. Σε ένα τουρνουά τένις μετέχουν 2 Γάλλοι και 3 Έλληνες. Αν η πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά ένα Γάλλος είναι διπλάσια από το να κερδίσει ένας Έλληνας και η πιθανότητα ανάμεσα σε παίκτες της ίδιας χώρας είναι η ίδια, να βρεθεί η πιθανότητα να κερδίσει Έλληνας το τουρνουά.

7. Έστω δειγματικός χώρος Ω και τα μη κενά ενδεχόμενα του A, B ώστε:

$P(A \cup B) - P(A) = P(A \cap B) + P(B)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους.

β) $P(B) \leq P(A)$

γ) Αν $P(A) + P(B) = \frac{5}{6}$ και $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$

8. Σε μια τάξη με 30 μαθητές 16 έχουν ποδήλατο και 10 έχουν μηχανή. Υπάρχουν μαθητές που έχουν και τα δύο ή κανένα από αυτά. Αν γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει και τα δύο ή δεν έχει τίποτα» είναι 40%, να βρεθεί:

α) Πόσοι μαθητές έχουν ποδήλατο και μηχανή.

β) Πόσοι μαθητές έχουν μόνο ποδήλατο.

γ) Πόσοι μαθητές έχουν μόνο μηχανή.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - P(A)x - P(A')$ και το ενδεχόμενο A ενός

δειγματικού χώρου Ω . Αν είναι γνωστό ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $-\frac{25}{49}$ να

υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου A .

10. Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια, $x > 0$.

α) Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο να λάβει μέρος σε μία εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

β) Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα

από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

γ) Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής.

(ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2005- 2006)

11. Έστω A και B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε να ισχύουν:

i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A και B είναι $\frac{7}{8}$.

ii) Οι πιθανότητες $P(B), P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \left\{ \kappa, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$.

όπου $\kappa = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$.

α) Να βρεθεί το κ .

β) Να βρεθούν τα $P(B), P(A \cap B)$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες:

1. Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A .

2. Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A .

(ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2004- 2005)