

ΚΥΚΛΟΣ

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\lambda x - 4\mu y + 3\mu^2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$.

β) Να βρείτε τις τιμές των λ, μ ώστε ο παραπάνω κύκλος να διέρχεται από το σημείο $A(-2, 1)$ και να έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$.

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Όταν έχει το κέντρο το $K(2, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.

β) Όταν έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(3, -2)$ και $B(-6, 4)$.

γ) Διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$ και εφάπτεται στον x' στο σημείο $B(-1, 0)$

δ) Διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$ και εφάπτεται στον y' στο σημείο $B(0, -4)$.

3. βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$.

β) Όταν διέρχεται από το σημείο $B(5, 7)$.

γ) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: x + y - 3 = 0$.

δ) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: x + y + 2 = 0$.

4. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2ax + 2y + 2a^2 - 4a + 4 = 0$.

α) Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Για τις τιμές του a που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να δείξετε ότι το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω σε σταθερή ευθεία.

γ) Για ποιες τιμές του a ο κύκλος εφάπτεται στη ευθεία $y = x$.

5. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y - \lambda = 0$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 = 100$.

6. Να βρείτε την σχετική θέση των κύκλων:

$$C_1: x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$$

7. Δίνονται τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(0, 2)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M που ικανοποιούν την σχέση: $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 36$.

8. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x \sin \theta + y \mu \theta = 1 + \sigma \nu \theta$ εφάπτεται του κύκλου

$$C: x^2 + y^2 - 2x = 0. \text{ Για ποια τιμή του } \theta \in [0, 2\pi) \text{ η } (\varepsilon) \text{ σχηματίζει με τον } x'x \text{ γωνία } \frac{\pi}{3}.$$