Επιμορφωτική συνάντηση εκπαιδευτικών κλ. ΠΕ03 Β΄ Αθήνας

Αίθουσα εκδηλώσεων του 2ου Γυμνασίου και 2ου ΓΕΛ Χαλανδρίου - Τετάρτη 1 Νοεμβρίου 2023

«Η λύση μαθηματικού προβλήματος ως διδακτική προσέγγιση στο Γυμνάσιο»

Δρ Γιώργος Κόσυβας

Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Β΄ Αθήνας

Εισαγωγή

Η σημασία της Λύσης (ή επίλυσης) Μαθηματικού Προβλήματος (ΛΜΠ) είναι γενικά αναγνωρισμένη.

Τα προβλήματα που αναζητούν λύσεις δεν εμφανίζονται μόνο στα Μαθηματικά αλλά και σε όλες τις πτυχές της ζωής των πολιτών.

Διδάσκουμε τη ΛΜΠ:

- ΩΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗ της θεωρίας, αλλά και
- **ΩΣ ΜΕΣΟΝ για τη διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών**

Θα συζητήσουμε ένα διδακτικό παράδειγμα ως έναυσμα για σκέψη στη διδασκαλία της ΛΜΠ.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γυμνασίου (Υπ. Αριθμ. 4362/Δ2, ΦΕΚ 235/20-1-2023)

*Το ΠΣ, [...] υποστηρίζει την ανάπτυξη υψηλού επιπέδου μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικών ικανοτήτων **διατύπωσης και επίλυσης ολοένα και πιο περίπλοκων προβλημάτων**, τη διαμόρφωση στάσεων και πεποιθήσεων που βοηθούν τους/τις μαθητές/-τριες **να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα στα Μαθηματικά, όπως και εκτός αυτών.***

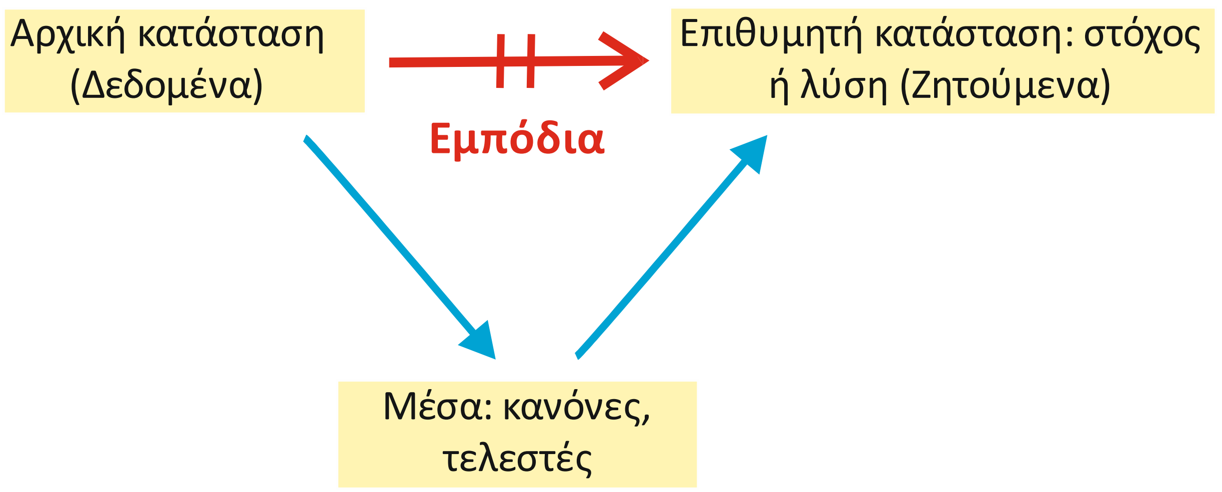
- Υπάρχουν αναφορές στο ΠΣ σε «ρεαλιστικά» προβλήματα, «πραγματικά και μαθηματικά πλαίσια».
- Η λύση προβλήματος συνδέεται με την ενεργητική μάθηση και τη διερεύνηση των μαθητών.

Τι είναι πρόβλημα;

Πρόβλημα στα Μαθηματικά είναι κάθε κατάσταση για την οποία **ο μαθητής δεν γνωρίζει ποια στρατηγική να ακολουθήσει** για να οδηγηθεί στη λύση.

Σύμφωνα με την ετοιμολογία της λέξης, πρόβλημα είναι **ένα εμπόδιο** που προεξέχει και **προβάλλεται** για λύση. Η υπέρβαση της δυσκολίας οδηγεί στον εμπλουτισμό των γνώσεων και εμπειριών του μαθητή.

Προβληματική κατάσταση



- Αν ο δρόμος είναι προφανής, δεν είναι πρόβλημα – είναι απλή εφαρμογή.
- Το πρόβλημα διαφέρει από μια άσκηση στο ότι οι λύτες **δεν έχουν μια μέθοδο ή έναν αλγόριθμο** με τον οποίο θα οδηγηθούν με βεβαιότητα στη λύση.

Γιατί η ΛΜΠ είναι σημαντική;

Όταν ο μαθητής είναι αντιμέτωπος με ένα πρόβλημα και δεν γνωρίζει καμία φανερή μέθοδο λύσης πρέπει **να εμπλακεί σε μια γνωστική επεξεργασία που ονομάζεται λύση προβλήματος.**

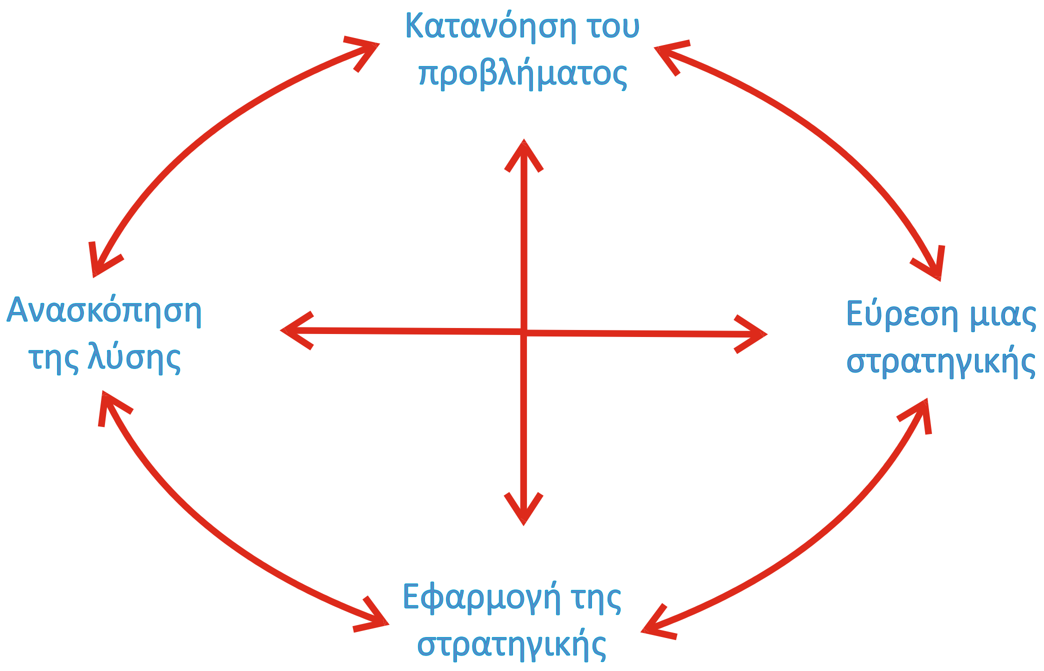
Η ΛΜΠ υποστηρίζει την ανάπτυξη :

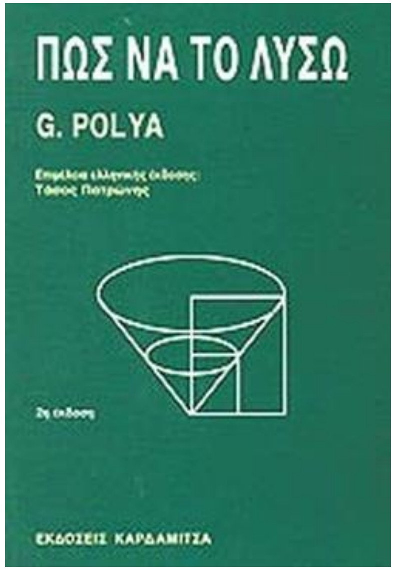
- Της κριτικής και δημιουργικής σκέψης.
- Της ικανότητας δομής και οργάνωσης.
- Της ικανότητας επεξεργασίας πληροφοριών.
- Της πνευματικής πρόκλησης και της χαράς.
- Των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων οι οποίες βοηθούν στη **διερεύνηση και κατανόηση του κόσμου.**

Οι ικανότητες λύσης προβλήματος

- Η ικανότητα ΛΜΠ αποτελεί κεντρικό στόχο στα Προγράμματα Σπουδών πολλών χωρών.
- Η απόκτηση αυξημένων επιπέδων ικανότητας επίλυσης προβλημάτων παρέχει τη βάση για μελλοντική μάθηση και αποτελεσματική συμμετοχή στην κοινωνία.
- Οι πολίτες πρέπει να μπορούν **να εφαρμόζουν όσα έχουν μάθει σε νέες καταστάσεις**, να χρησιμοποιούν τη βασική σκέψη και άλλες γνωστικές προσεγγίσεις για **την αντιμετώπιση προκλήσεων στη ζωή** (Lesh & Zawojewski, 2007).

Οι αρχές του Polya για τη λύση προβλημάτων





Η ΛΜΠ δεν είναι γραμμική αλλά **σύνθετη, αλληλεπιδραστική διαδικασία**. Οι μαθητές κινούνται μπρος και πίσω σύμφωνα με τις φάσεις του Polya.

Η ανάπτυξη της διαδικασίας ΛΜΠ (Polya, 1998)

Στάδια	Οι μαθητές	Ο εκπαιδευτικός
1ο στάδιο: Κατανόηση του προβλήματος	**Μελετούν & αναλύουν τα δεδομένα, αναζητούν σχέσεις & συνδέσεις** μεταξύ των αιτιών-παραμέτρων του θέματος – **κατανοούν τι ακριβώς ζητάει το πρόβλημα**, καθώς δεν είναι δυνατόν κάποιος να απαντήσει σε μια ερώτηση που δεν την έχει κατανοήσει.	Ζητά από τους μαθητές να επαναδιατυπώσουν το πρόβλημα με πιο απλό τρόπο, **να παραστήσουν σχηματικά το πρόβλημα.** ***Τι μας ζητάει, τι μας δίνει. Έχεις συναντήσει παρόμοιο πρόβλημα; Σε τι διαφέρει;***
2ο στάδιο: Επινόηση ενός σχεδίου για τη λύση.	**Εφαρμόζουν διαφορετικές στρατηγικές & προσεγγίσεις** ώστε να καταλήξουν σε ένα αποτελεσματικό σχέδιο λύσης.	Συμβουλεύει, διακριτικά για τη σύλληψη μιας επιτυχούς μεθόδου λύσης, **παροτρύνει τους μαθητές να αξιοποιήσουν προγενέστερες γνώσεις ή εμπειρίες επίλυσης ανάλογων προβλημάτων.** ***Πώς συνδέονται τα δεδομένα; Μπορείς να καταστρώσεις ένα σχέδιο λύσης; Να διατυπώσεις υποθέσεις ή μία γενική ιδέα.***
3ο στάδιο: Εφαρμογή του σχεδίου λύσης	**Ελέγχουν κάθε βήμα** κατά τη διαδικασία εφαρμογής του σχεδίου, ώστε να αποφύγουν την πιθανότητα σφάλματος.	***Είναι σωστός ο υπολογισμός του ζητούμενου, εφαρμόστηκε η κατάλληλη στρατηγική; Λύσε ένα απλούστερο πρόβλημα. Κάνε έναν πίνακα ή ένα διάγραμμα.*** **Επισημαίνει τη διαφορά του «βλέπω» & του «αποδεικνύω».**
4ο στάδιο: Ανασκόπηση της λύσης που βρέθηκε	**Επανεξετάζουν** το αποτέλεσμα & προβαίνουν σε επαλήθευση της λύσης του προβλήματος, **αναπτύσσουν μεταγνωστικές δεξιότητες** αξιοποιώντας την εμπειρία που προέκυψε κατά τη διαδικασία επίλυσης.	***Ξανακοίταξε τη λύση. Έχεις απαντήσει στο ερώτημα, είναι λογικές οι απαντήσεις; Προσπάθησε να βρεις μία εναλλακτική μέθοδο λύσης. Μήπως υπάρχει συντομότερη ή κομψότερη λύση;*** Παρακινεί τους μαθητές να εφαρμόσουν τη μέθοδο επίλυσης **σε παρόμοιες περιπτώσεις.**

Εύρος στρατηγικών, περισσότερες λύσεις…

- Στόχος είναι οι μαθητές να αξιοποιούν **εύρος στρατηγικών** για την επίλυση προβλημάτων και να καταλάβουν ότι **μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις**. Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουν ότι η διαδικασία είναι εξίσου σημαντική, με τη λύση.
- **Κατά τη συζήτηση στην τάξη** οι μαθητές πρέπει να δίνουν σωστές μαθηματικές εξηγήσεις και να αιτιολογούν τις λύσεις τους. Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν τους μαθητές τους **να κοινοποιούν δημόσια τις ιδέες τους προφορικά, ή γραπτά** χρησιμοποιώντας ποικιλία αναπαραστάσεων.
- **Μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη σκέψη των μαθητών τους ως πηγή για περαιτέρω μάθηση.** Οι εν λόγω εκπαιδευτικοί ανταποκρίνονται τόσο στους μαθητές τους όσο και στην επιστήμη των Μαθηματικών.

Στόχοι μιας διδακτικής προσέγγισης ΛΜΠ

Ανάπτυξη **<u>στρατηγικών επίλυσης</u>** προβλήματος:

- Δεξιότητες ανάλυσης/κατανόησης προβλημάτων.
- Ικανότητες διαμόρφωσης και επιλογής στρατηγικών.
- Ικανότητες σχεδιασμού, επίλυσης και εφαρμογής του (αναζήτηση προτύπου, **κατασκευή πίνακα ή διαγράμματος, αναγωγή σε απλούστερη μορφή/περίπτωση, διατύπωση υποθέσεων και επαλήθευσή τους).**
- Ικανότητες ανασκόπησης.
- Ικανότητες αιτιολόγησης.
- Ικανότητες αξιολόγησης της εγκυρότητας της μαθηματικής γνώσης.

Η ΛΜΠ ως διδακτική προσέγγιση

«Οι περισσότερες σημαντικές έννοιες και διαδικασίες των μαθηματικών διδάσκονται καλύτερα μέσω της λύσης προβλημάτων».

- Παραδοσιακή προσέγγιση: **η διδασκαλία ξεκινά από τον εκπαιδευτικό.**
- Προσέγγιση επίλυσης προβλήματος: **η διδασκαλία ξεκινά από τον μαθητή.**

Η ΛΜΠ ως διδακτική προσέγγιση

Η αξία της έγκειται στα ακόλουθα:

- Στροφή στη «μαθηματική κατανόηση».
- Έμφαση σε μαθηματικές διεργασίες: **συλλογιστική σκέψη, επικοινωνία, συνδέσεις και αναπαραστάσεις**.
- **Πηγή πλούσιων δεδομένων** για την ουσιαστική αξιολόγηση του μαθητή και της διδακτικής πράξης.

Η ΛΜΠ επηρεάζεται από συναισθηματικούς και μεταγνωστικούς παράγοντες

- **Θετική διάθεση απέναντι στον «μαθηματικό τρόπο σκέπτεσθαι».**
  - Απόκτηση ή ενδυνάμωση της μαθηματικής αυτοπεποίθησης.
  - Προθυμία πειραματισμού.
  - Διαμόρφωση συνθηκών «απόλαυσης» της ενασχόλησης με τα Μαθηματικά.
- **Μεταγνωστικές συνήθειες σχετικές με την ΛΜΠ (τι, πώς και γιατί;)**
  - Ενθάρρυνση της σημασίας της προσεκτικής παρακολούθησης και της ρύθμισης των στρατηγικών επίλυσης.

Μεταγνωστική επίγνωση κατά τη λύση προβλήματος

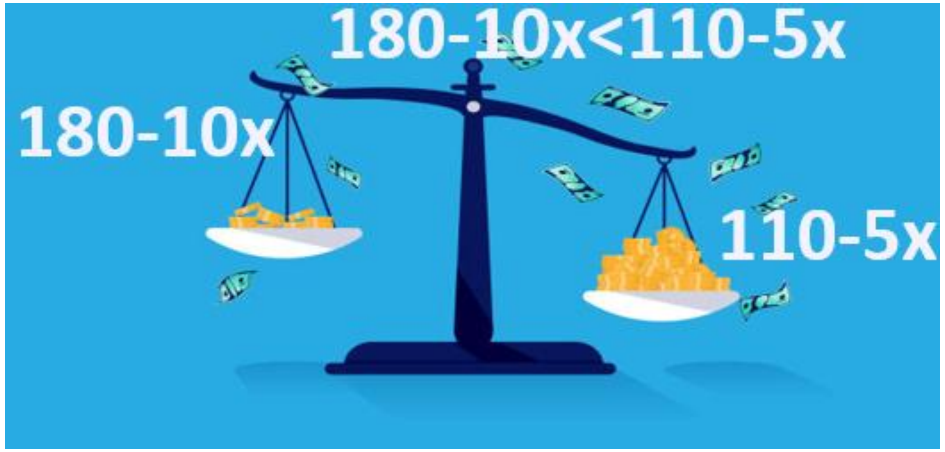
- **Μεταγνώση** είναι η παρακολούθηση και η ρύθμιση **των διαδικασιών της σκέψης** από τον ίδιο τον μαθητή (Schoenfeld, 1985). **Ο μαθητής γνωρίζει πώς μαθαίνει**, λαμβάνει αποφάσεις, σχεδιάζει, διορθώνει τις εργασίες του και συλλέγει πληροφορίες. Επιπλέον, **διαχειρίζεται τον χρόνο του**, διακρίνει τα ουσιώδη ζητήματα από τα επουσιώδη και χρησιμοποιεί τη γνώση στη ζωή του.
- Μπορεί να ασκηθεί στην απόκτηση συνηθειών **εποπτείας και συντονισμού** κατά τη λύση προβλημάτων (π.χ. **επανέλεγχος** της λύσης του προβλήματος, περιγραφή άλλων στρατηγικών, **διόρθωση**, συμπλήρωση και αναγνώριση εσφαλμένων λύσεων του προβλήματος).
- Η αναγκαιότητα της **αναδρομικής διερεύνησης** και επαλήθευσης και ο **αναστοχαστικός αυτοέλεγχος** διασφαλίζουν ότι μαθητής διέτρεξε σωστά όλα τα στάδια της λύσης. Συνιστά και η ίδια μια **μαθησιακή διαδικασία μεταγνωστικής ενημερότητας** με αυτοτελή αξία.
- Ο μαθητής προβαίνει σε **αυτοπαρατήρηση** της προόδου του, αποκτά επίγνωση των γνωστικών ανεπαρκειών του και προχωρά σε **αυτορρύθμιση**.
- Ο εκπαιδευτικός βοηθά στη **διαχείριση των λαθών**, παρακινεί τους μαθητές σε **αυτοαξιολόγηση** και δημιουργεί κλίμα αλληλεπίδρασης, εμπιστοσύνης και ασφάλειας.

Δομή μιας διδακτικής προσέγγισης ΛΜΠ

Τριμερής οργάνωση

- **Πριν**: διανοητική προετοιμασία των μαθητών, αποσαφήνιση των αναμενόμενων αποτελεσμάτων.
- **Κατά τη διάρκεια**: εκχώρηση ευθύνης, αυτονομία.
- **Μετά**: διάλογος, διαμόρφωση «κοινότητας μάθησης».

TIMSSVIDEO: εισαγωγή στην ανίσωση



- Η διδασκαλία αναφέρεται στη Δευτέρα Γυμνασίου σε σχολείο στην Ιαπωνία.
- Οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί την **επίλυση εξισώσεων** και σκοπός του εκπαιδευτικού είναι **η διδασκαλία της επίλυσης ανισώσεων**.

http://www.timssvideo.com/jp3-solving-inequalities [0:00-54:09]

- **Η ΛΜΠ ως διδακτική προσέγγιση που υιοθεταίται δεν είναι μοναδική.**
- **Αποτελεί αφορμή για συζήτηση και όχι μοντέλο προς μίμηση.**
- **Πώς θα σχεδιάζατε τη διδασκαλία σας;**

1ο Το μαθηματικό πρόβλημα

*Η μητέρα του Ιχίρο είναι στο νοσοκομείο. Ο Ιχίρο αποφάσισε να προσεύχεται κάθε πρωί στον τοπικό ναό με τον μικρό του αδελφό ώστε η μητέρα του να γίνει καλά. Ο Ιχίρο έχει στο πορτοφόλι του **18 κέρματα των δέκα γιεν** και ο αδελφός του έχει **22 κέρματα των πέντε γιεν**. Αποφάσισαν να δίνουν ένα κέρμα από αυτά που έχουν στο πορτοφόλι τους κάθε πρωί στον έρανο και να συνεχίσουν να προσεύχονται μέχρι κάποιο από τα πορτοφόλια να αδειάσει. Μια μέρα, μετά την προσευχή, κοίταξαν στα πορτοφόλια τους και βρήκαν ότι το **ποσό των χρημάτων του μικρότερου αδελφού ήταν μεγαλύτερο** από του Ιχίρο. **Πόσες μέρες από τότε που άρχισαν να προσεύχονται συνέβη αυτό;***

Να λύσετε το πρόβλημα με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.

Μία σύντομη λύση

<u>Ιχίρο</u>: 18 κέρματα των 10 γιεν.

<u>Αδερφός</u>: 22 κέρματα των 5 γιεν.

Έστω ότι **μετά από x μέρες** το ποσό των χρημάτων του μικρότερου αδελφού **έγινε μεγαλύτερο** από του Ιχίρο.

Αδερφός: **$22\cdot5-x\cdot5=110-5x$ γιεν**

Ιχίρο: **$18\cdot10-x\cdot10=180-10x$ γιεν**

$$110-5x>180-10x$$

$$10x-5x>180-110$$

$$5x>70$$

$$\mathbf{x>14}$$

Απάντηση: την **$15^{η}$ ημέρα** μετά την προσευχή το ποσό των χρημάτων του μικρότερου αδελφού ήταν μεγαλύτερο από του Ιχίρο.

2ο Το μαθηματικό πρόβλημα

Αυτή τη στιγμή υπάρχουν 50 χιλιοστόλιτρα (ml) χυμό στο ποτήρι του Ιχίρο και 80 χιλιοστόλιτρα στο ποτήρι του μικρότερου αδερφού. Η μητέρα έριξε κι άλλη ποσότητα με χυμό στο ποτήρι του Ιχίρο και τώρα έχει περισσότερο χυμό. Πόσα χιλιοστόλιτρα έριξε;

Λύση:

$50 + x > 80$

$x > 30.$

Οργάνωση του διδακτικού χρόνου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΟΥ 1ου ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: **2:00-4:00**

ΑΥΤΟΝΟΜΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ: **5:00-18:40**

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ: **20:00-34:00**

- 1η λύση: 20:00
- 2η λύση: 24:19
- 3η λύση: 25:00
- 4η λύση: 26:30 [28: 43 -σύστημα]
- 5η λύση: 30:00 -34:00 [ανίσωση]

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΣΕ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ

(ΑΥΤΟΝΟΜΗ ΕΡΓΑΣΙΑ – ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ): **34:00-45:00**

2ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ

(ΑΥΤΟΝΟΜΗ ΕΡΓΑΣΙΑ – ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ) : **45:00-54:00**

Στοιχεία για το σχολικό πλαίσιο

- Οι Ιάπωνες μαθητές περνούν **240 ημέρες το χρόνο στο σχολείο**. Αντιστοιχούν σε **40 εβδομάδες των 6 ημερών,** δεδομένου ότι τα σχολεία στην Ιαπωνία λειτουργούν μισή μέρα τα **Σάββατα**.
- Η επιλογή μαθημάτων, το ΠΣ και τα σχολικά βιβλία καθορίζονται από το Υπουργείο Παιδείας της Ιαπωνίας.
- Όλοι οι μαθητές της ίδιας τάξης παρακολουθούν τα ίδια μαθήματα. **Τα μαθήματα επιλογής είναι λίγα**.
- **Φορούν ομοιόμορφες ενδυμασίες.** Στο τέλος της σχολικής ημέρας όλοι οι μαθητές συμμετέχουν στην **καθαριότητα του σχολείου.**

Περιγραφή της διδασκαλίας

- Το μάθημα των Μαθηματικών της όγδοης τάξης (Β΄ Γυμνασίου) **εστιάστηκε στην εισαγωγή στις ανισώσεις μέσω προβλημάτων** (όχι στην αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης ανισώσεων).
- Η διάρκεια του μαθήματος είναι **50 λεπτά**. Η τάξη είχε **35 μαθητές**.
- Κατά την ωριαία διδασκαλία επιλύθηκαν **2 προβλήματα**. Το πρώτο είχε διάρκεια περίπου **45 λεπτά** και το δεύτερο περίπου **8 λεπτά**.
- Σύμφωνα με στατιστικές μελέτες μία ιαπωνική ωριαία διδασκαλία των Μαθηματικών περιλαμβάνει, κατά μέσο όρο, **τρία ανεξάρτητα προβλήματα με μέση διάρκεια 15 λεπτά.**

Περιγραφή της διδασκαλίας

- Κάθε μαθητής κάθεται στο **ατομικό θρανίο** του και όλοι οι μαθητές είναι τοποθετημένοι με **κατεύθυνση τον πίνακα**.
- Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει **ένα νέο πρόβλημα ημέρας (υψηλής πολυπλοκότητας).** Οι μαθητές εργάζονται ατομικά και ο διδάσκων παρατηρεί τις μεθόδους που χρησιμοποιούν.
- Η ωριαία ιαπωνική διδασκαλία για λόγους οργάνωσης της περιγραφής μπορεί να διαιρεθεί σε **τέσσερις φάσεις:**

Πρώτη Φάση: δημόσια εργασία. Κατανόηση του προβλήματος (4 min)

- Ο εκπαιδευτικός θέτει το πρόβλημα. Έχει μεριμνήσει, έτσι ώστε το φύλλο το οποίο περιέχει το πρόβλημα να βρίσκεται σε όλα τα θρανία **πριν οι μαθητές μπουν στην τάξη.**
- Ο εκπαιδευτικός **διαβάζει την εκφώνηση σε ολόκληρη την τάξη** και οι μαθητές παρακολουθούν με προσοχή την ανάγνωση.

Πρώτη Φάση: δημόσια εργασία. Κατανόηση του προβλήματος (4 min)

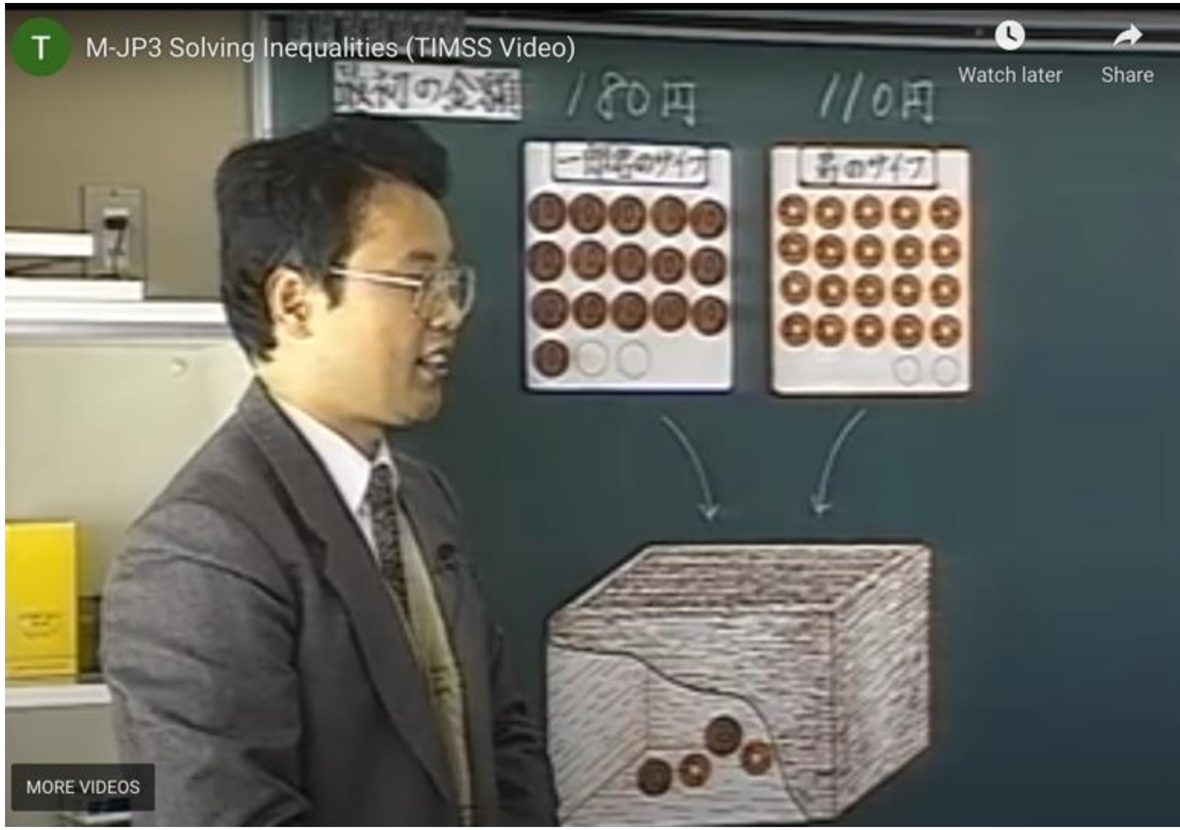
- Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος, η εισαγωγή στους μαθητές έγινε με εικονογράφηση και **χειραπτικά υλικά**.
- Η αφαίρεση ενός κέρματος 10-γιεν και ενός κέρματος 5-γεν και **η μετακίνησή τους στο κουτί προσφοράς (εράνου) κέντρισε το ενδιαφέρον των μαθητών.** Ο εκπαιδευτικός είπε:
- *«Νομίζω ότι υπάρχουν σημεία που είναι δύσκολο να κατανοηθούν μόνο με το κείμενο της εκφώνησης, γι' αυτό θα ήθελα να δείτε αυτό το σχήμα και να το ελέγξετε».*

Πρώτη Φάση: δημόσια εργασία για την κατανόηση του προβλήματος (4 min)

Ο εκπαιδευτικός συνέχισε να προσομοιώνει το πρόβλημα παίρνοντας ένα-ένα κέρμα από κάθε πορτοφόλι και βάζοντάς τα στο κουτί προσφοράς. Ρωτά:

«Πόσα χρήματα έχει κάθε πορτοφόλι και ποιος αδερφός έχει περισσότερα;»

Σε δημόσια σύντομη συζήτηση συζητά την εκφώνηση **με σκοπό την κατανόησή της από όλους τους μαθητές** και τις μαθήτριες. Φροντίζει να μην παρέχει ιδέες ή πληροφορίες που «προδίδουν» τη λύση ή τις στρατηγικές επίλυσης.



Δεύτερη Φάση: ατομική εργασία (13 min)

- Στη δεύτερη φάση οι μαθητές εργάζονται ατομικά πάνω στο πρόβλημα. Στο ενδιάμεσο, ο εκπαιδευτικός απευθύνει σε ολόκληρη την τάξη την ακόλουθη παρότρυνση:

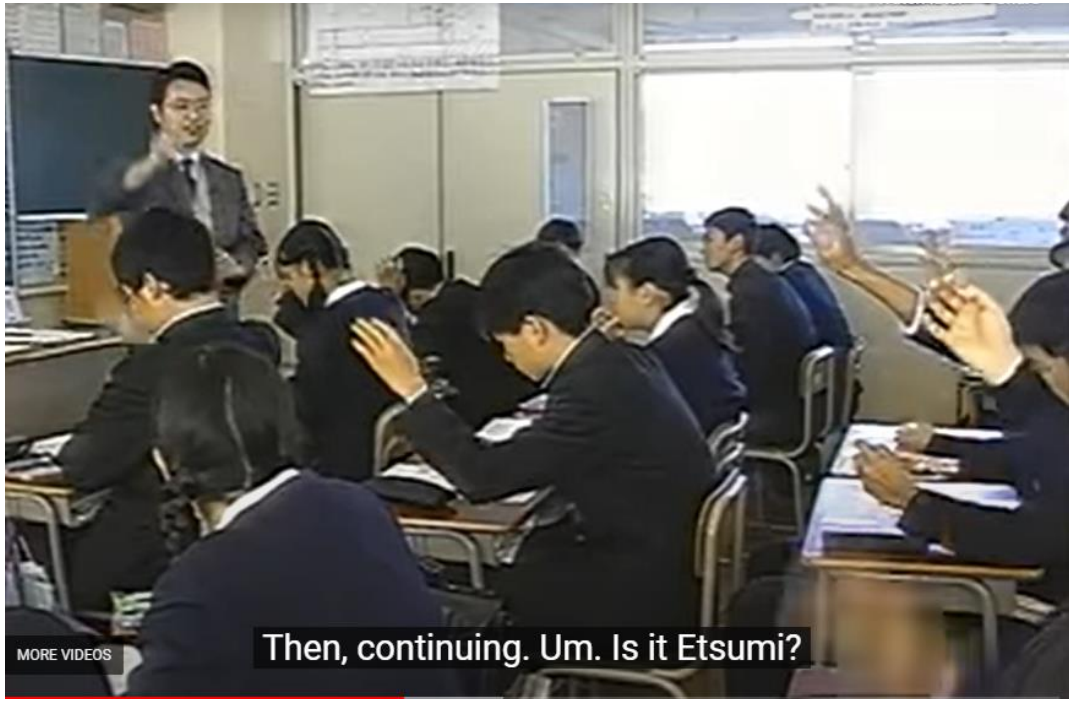
«Αν βρήκατε την απάντηση με μια μόνο μέθοδο, να προσπαθήσετε να την βρείτε και με μια άλλη μέθοδο».

- Καθώς κυκλοφορεί στην αίθουσα, **μιλά με αρκετούς μαθητές για τις μεθόδους λύσης τους** και τους ενημερώνει ότι αργότερα θα τους ζητήσει να τις παρουσιάσουν σε ολόκληρη την τάξη.
- Αφού παρατηρήσει την εργασία των μαθητών θέτει προτροπές για περαιτέρω σκέψη και διερεύνηση. Λέει για παράδειγμα σε έναν μαθητή:

«Σκεφτείτε εκ των προτέρων γιατί σχηματίσατε μια εξίσωση όπως αυτή».

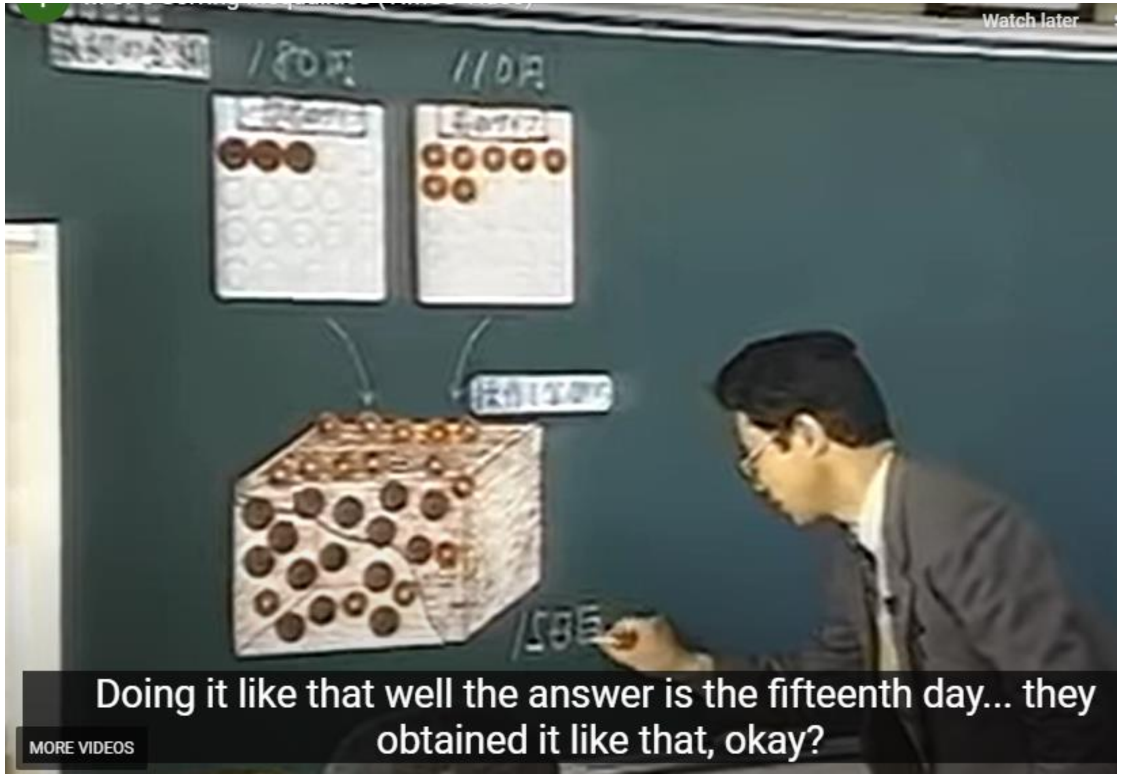
Τρίτη Φάση: δημόσια παρουσίαση των λύσεων των μαθητών στην τάξη (24 min)

Οι μαθητές παρουσίασαν τις λύσεις τους σε ολόκληρη την τάξη. Ο εκπαιδευτικός **όρισε πέντε (5) μαθητές να εκθέσουν τις λύσεις** τους με την ακόλουθη σειρά και να τοποθετήσουν έναν τίτλο για κάθε λύση. Μετά από την κοινοποίηση κάθε λύσης ρωτούσε: **«*Πόσοι άλλοι την έλυσαν με τον ίδιο τρόπο;*»**



M1 (χειρισμός χειραπτικών αντικειμένων)

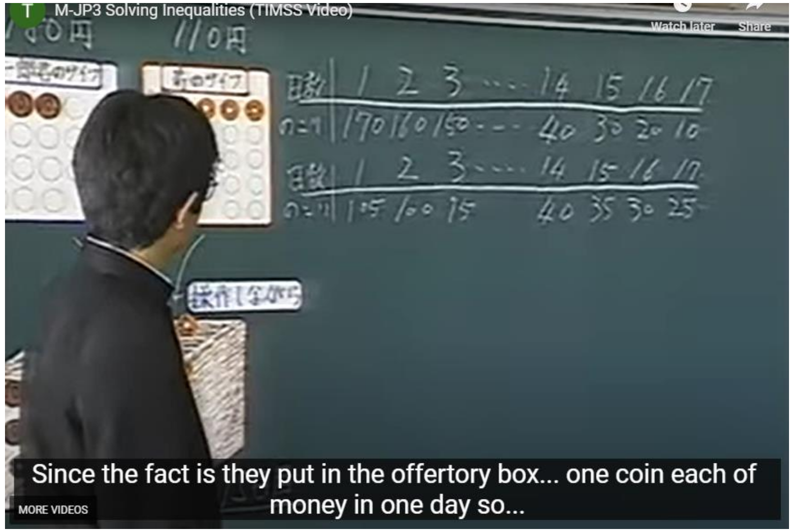
Παίρνουμε ένα νόμισμα από κάθε πορτοφόλι και το βάζουμε στο κουτί της προσφοράς μέχρι το πορτοφόλι του Ιχίρο να περιέχει λιγότερα χρήματα από το πορτοφόλι του αδελφού του. Εναλλακτικά διαγράφουμε ένα νόμισμα από κάθε πορτοφόλι μέχρι το πορτοφόλι του αδελφού να έχει περισσότερα χρήματα από τον Ιχίρο. Απάντηση: **15η μέρα**.



M2 (Λύση του προβλήματος με κατασκευή πίνακα αριθμών)

Η λύση του προβλήματος δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος ημερών	1η	2η	3η	…	14η	15η	16η	17η
Ποσό που απομένει στο πορτοφόλι του Ιχίρο	170	160	150	…	40	30	20	10
Ποσό που απομένει στο πορτοφόλι του αδελφού του	105	100	95	…	40	35	30	25
Απάντηση	$15^{η}$ ημέρα							



M3 «*Κάθε ημέρα υπάρχει μια διαφορά 5 γιεν*»

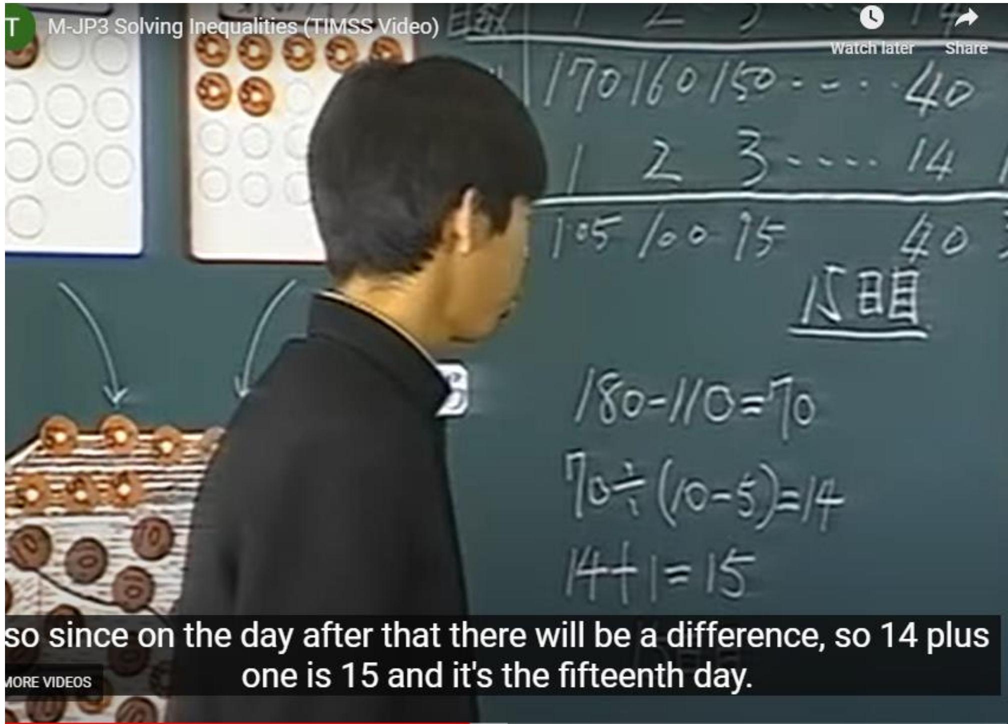
Μια αιτιολογημένη λύση με αριθμητικούς συλλογισμούς είναι η εξής:

180-110=70 (συνολική διαφορά κερμάτων 10-γιεν και 5-γεν)

70:(10-5)=14   (ημέρες)

14+1=15

15η ημέρα



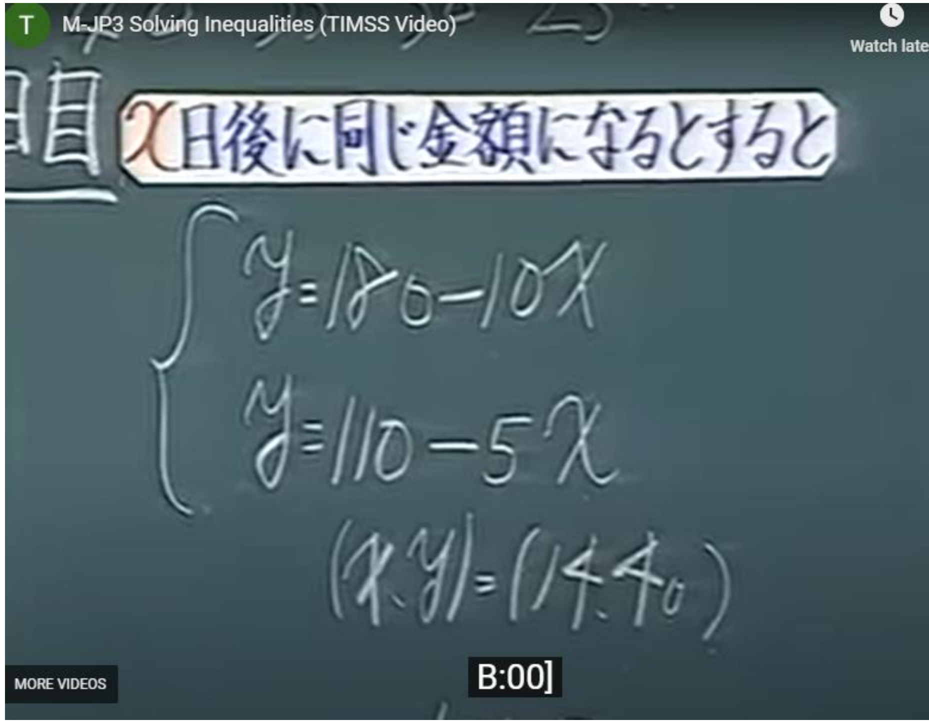
M4 (Έστω x η ημέρα την οποία τα ποσά γίνονται ίδια)

y=180-10x

y=110-5x

(x, y)=(14, 40)

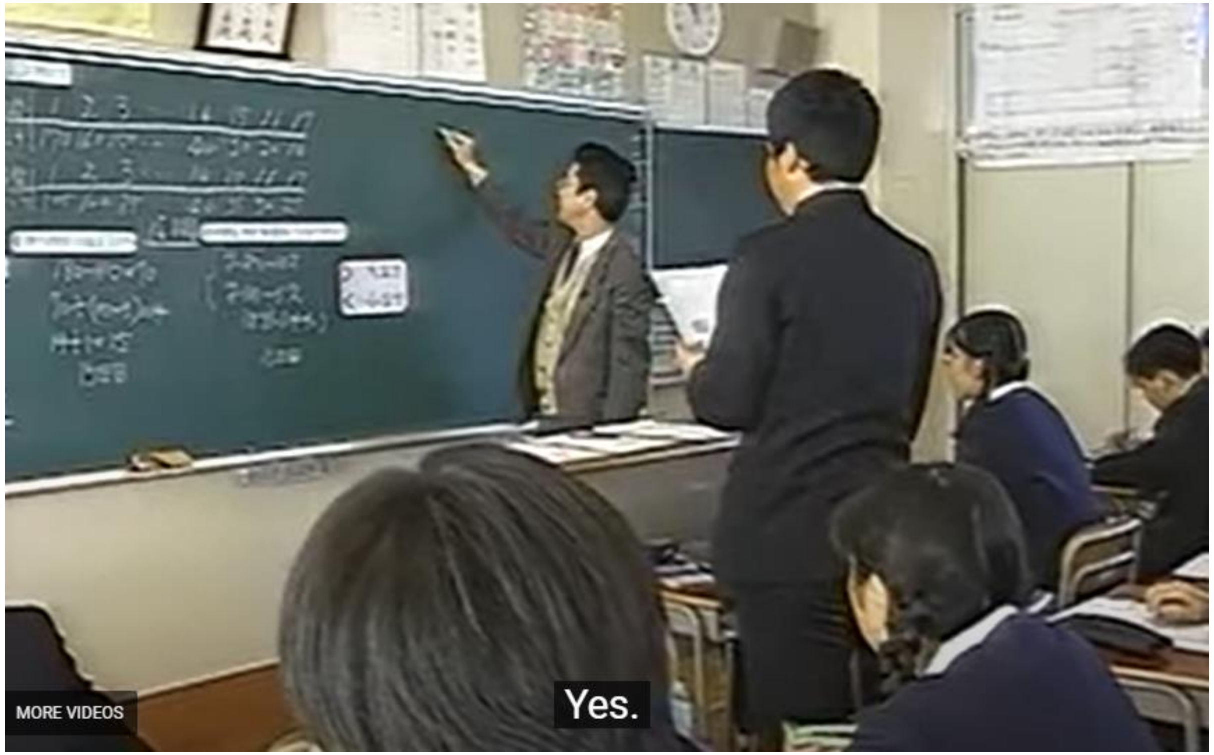
15η ημέρα

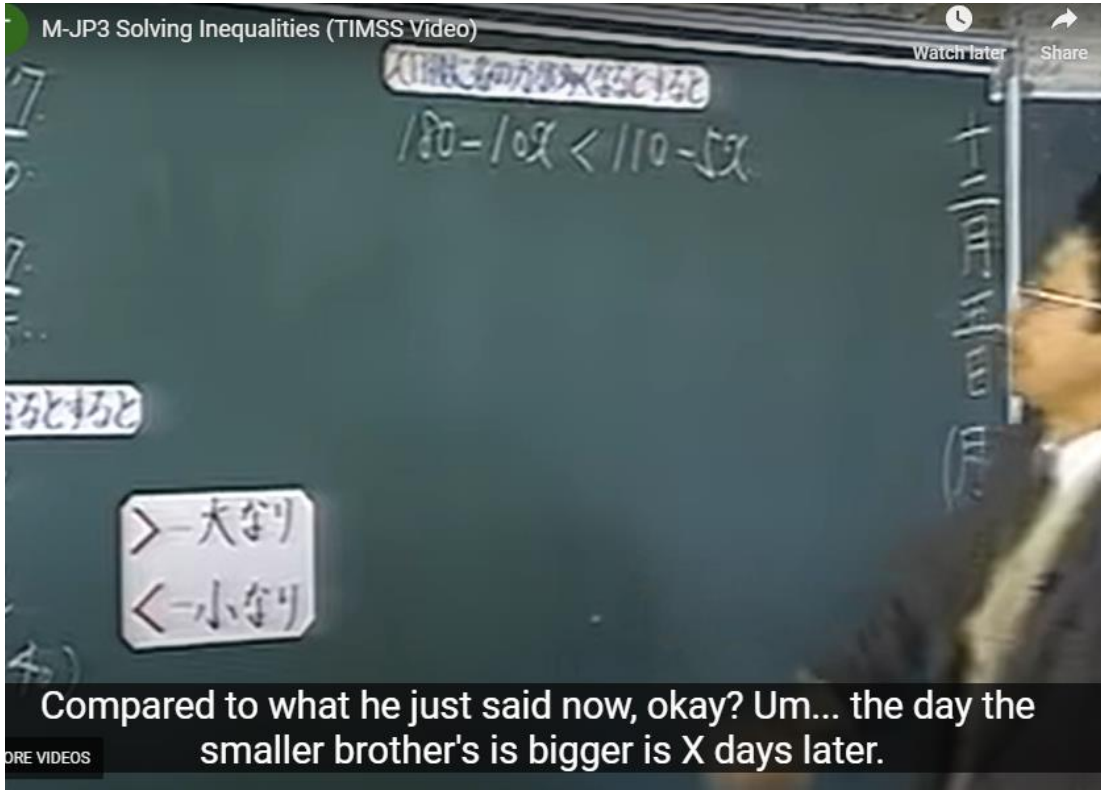


Οι μαθητές <u>δεν χρησιμοποίησαν</u>: Εξίσωση μιας μεταβλητής, άξονα των αριθμών και γραφικές παραστάσεις.

M5 (Έστω x η ημέρα την οποία το χρηματικό ποσό του αδερφού ξεπερνά το ποσό του Ιχίρο)

$180-10x<110-5x$

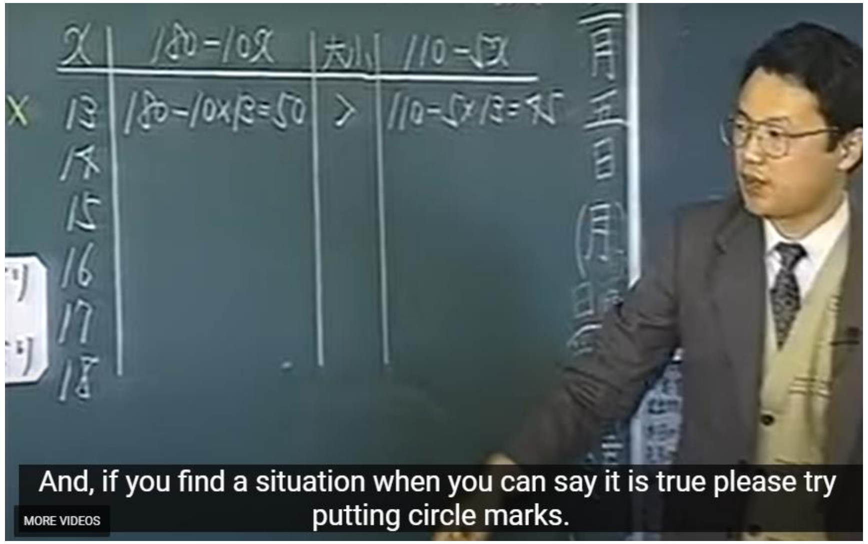




Δραστηριότητα των μαθητών (6 min)

Νέο Έργο: «*Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις αλγεβρικές παραστάσεις:* ***180-10x*** *και* ***110-5x****. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων για x=13, 14, 15, 16, 17, 18. Μετά από τον έλεγχο να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο σχέσης; (>, <, =)*»

Επειδή οι μαθητές γνώριζαν μόνο τις εξισώσεις, αλλά δεν είχαν διδαχθεί τη διαδικασία επίλυσης ανισώσεων, ο εκπαιδευτικός ετοίμασε έναν πίνακα προς συμπλήρωση με σκοπό τη σύγκριση ανά ημέρα του ποσού που απέμενε στο πορτοφόλι του Ιχίρο και του αδελφού του.

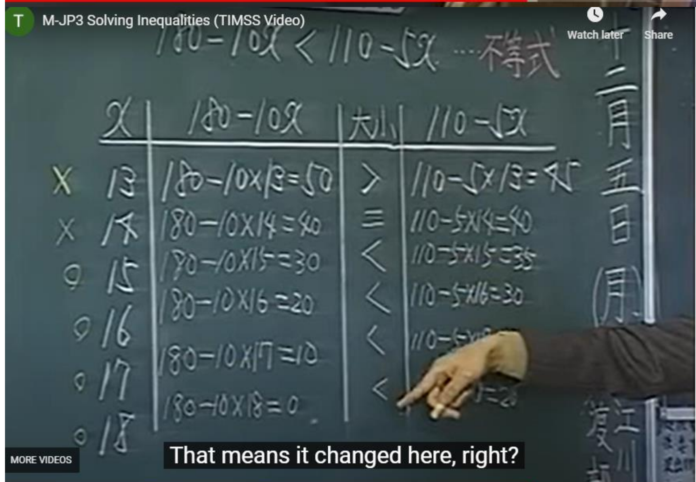


Τέταρτη Φάση: δημόσια εργασία στην τάξη (13 min)

- Ο εκπαιδευτικός ζητά από έναν μαθητή να γράψει τα αποτελέσματά του στον πίνακα με κιμωλία**, ενώ οι άλλοι μαθητές εξακολουθούσαν να εργάζονται.**
- Ο εκπαιδευτικός **ρωτά πόσοι μαθητές βρήκαν τα ίδια αποτελέσματα** με τον τελευταίο μαθητή.
- Σημειώνει ότι ο x ισχύει για 15, 16, 17 και 18. Το πρώτο ήταν > και το **δεύτερο ήταν ίσο 14.**
- Ο εκπαιδευτικός ρωτά για την **19η μέρα** και ένας μαθητής απαντά:

«Το πορτοφόλι του Ιχίρο έχει αδειάσει».

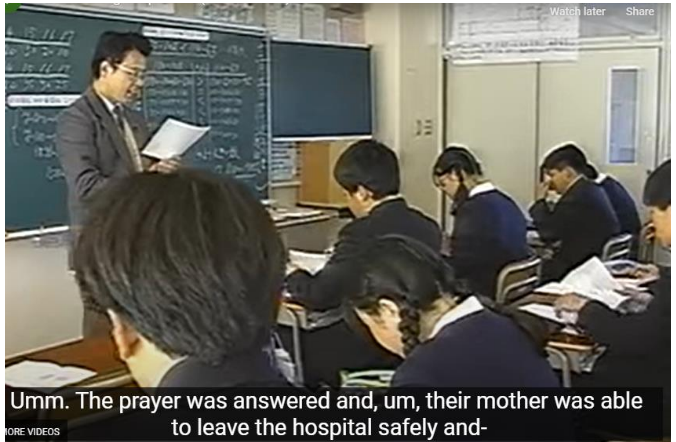
Ο εκπαιδευτικός συνοψίζει τα κύρια σημεία του μαθήματος. Όλες οι διαφορετικές λύσεις είναι γραμμένες ταυτόχρονα στον πίνακα. Οι μαθητές καλούνται να γράψουν τη λύση.



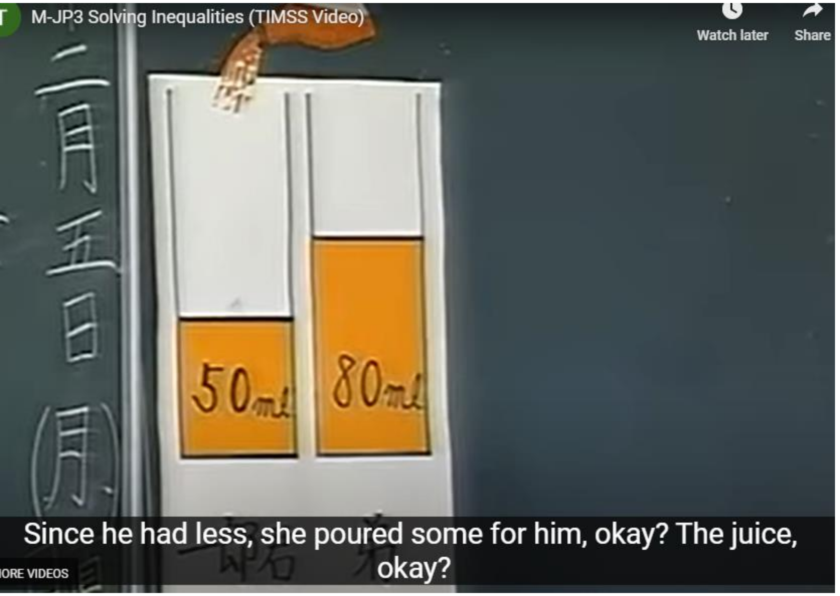
2ο πρόβλημα (8 min)

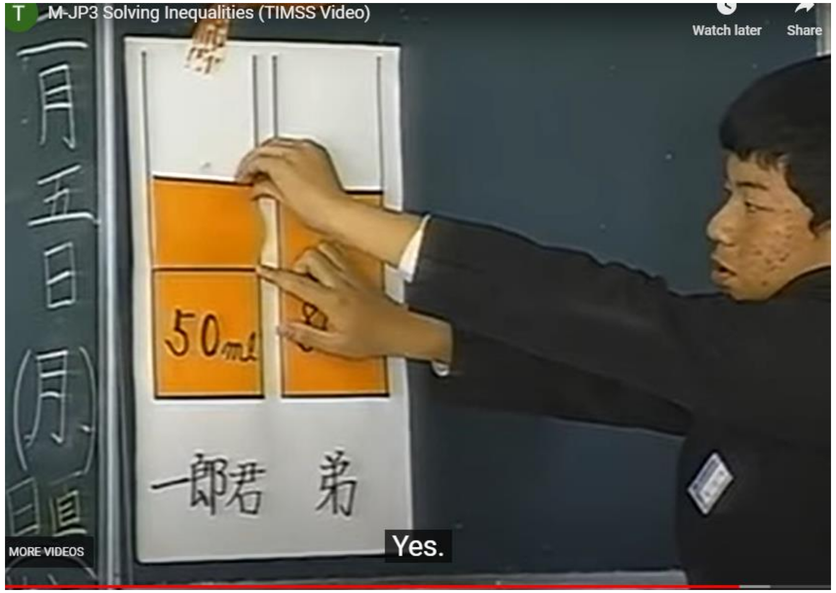
Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει ένα νέο πρόβλημα στο οποίο οι μαθητές εφαρμόζουν ορισμένα στοιχεία από το πρώτο πρόβλημα. Μοιράζει ένα φυλλάδιο και διαβάζει στην τάξη το δεύτερο πρόβλημα:

Η προσευχή εισακούστηκε και η μητέρα τους μπόρεσε να φύγει με ασφάλεια από το νοσοκομείο, και εκείνο το βράδυ έδωσε στα δύο παιδιά της ένα τοστ και έναν χυμό. Αυτή τη στιγμή υπάρχουν ***50 χιλιοστόλιτρα (ml) χυμό στο ποτήρι του Ιχίρο και 80 χιλιοστόλιτρα στο ποτήρι του μικρότερου αδερφού.*** *Η μητέρα έριξε κι άλλη ποσότητα με χυμό στο ποτήρι του Ιχίρο και τώρα έχει περισσότερο χυμό.* ***Πόσα χιλιοστόλιτρα έριξε;***



2ο πρόβλημα (8 min)



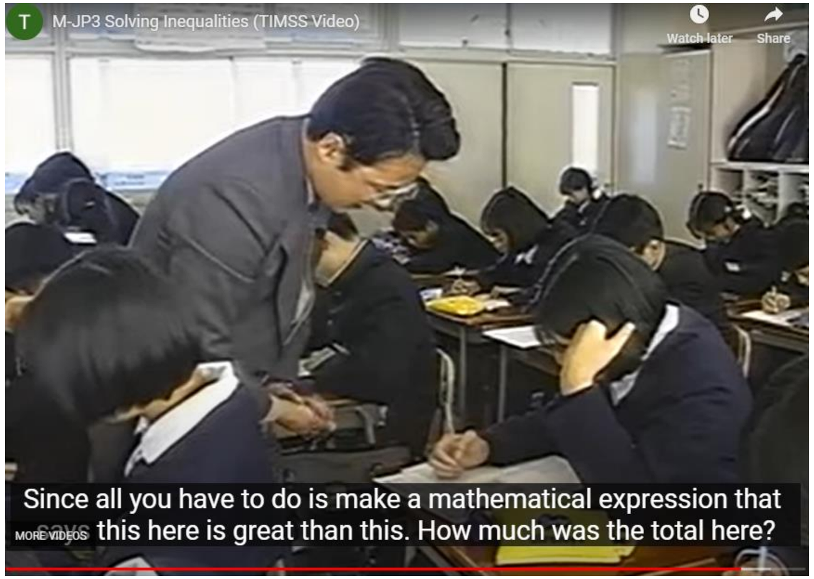


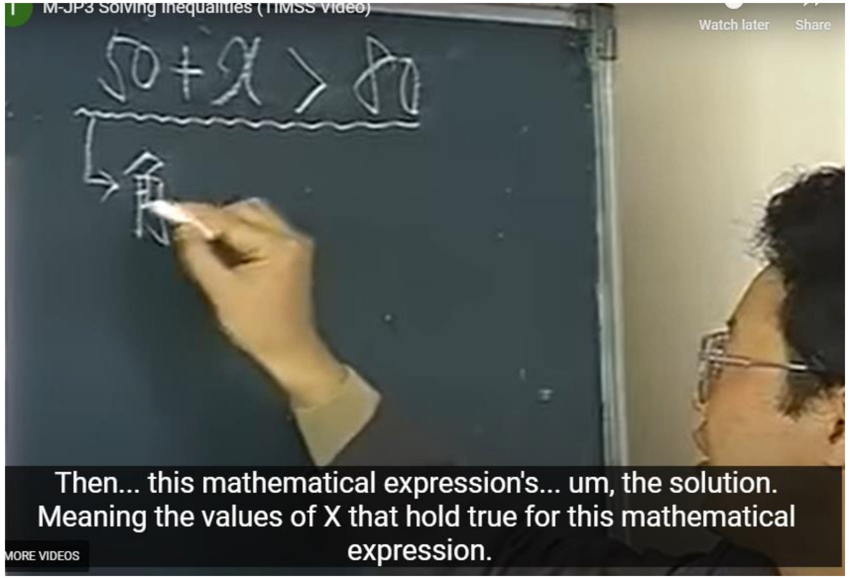
Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να σκεφτούν και να λύσουν το πρόβλημα. Ένας μαθητής έρχεται στον πίνακα και συμβολίζει με x ml την ποσότητα που απαιτείται για να φτάσει τα 80 ml.

2ο πρόβλημα (8 min)

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να εκφράσουν την κατάσταση με τον άγνωστο x και τα σύμβολα (> , <).

Μαθητής: «*50 + x > 80*».





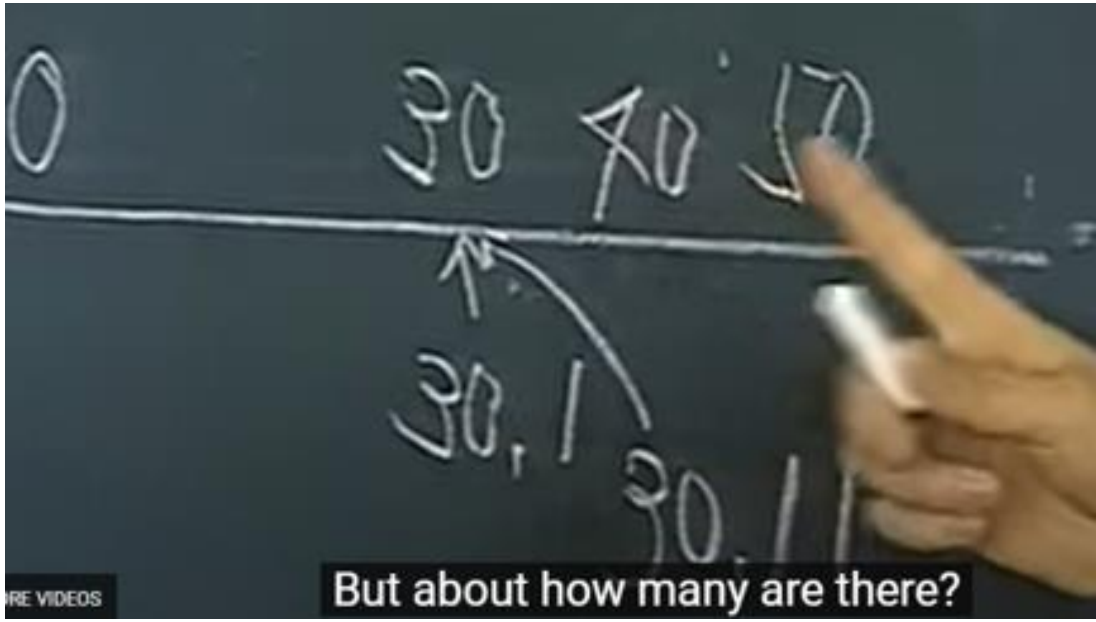
2ο πρόβλημα (8 min)

- Εκπαιδευτικός: «*Ποιες τιμές του x επαληθεύουν αυτή την ανίσωση;*»
- Άλλος μαθητής: «*Πάνω από 30*».
- Ο εκπαιδευτικός προτείνει να χρησιμοποιήσουν τον άξονα των αριθμών και ρωτά:

«Πόσοι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από 30;»

- Ένας μαθητής απαντά «*Άπειροι*».
- Ο εκπαιδευτικός ρωτά αν περιλαμβάνεται το 30 ή όχι. Όταν ο μαθητής απαντά ότι δεν περιλαμβάνεται, ο εκπαιδευτικός απαντά:

«Ναι, αλλά αν είναι έστω λίγο περισσότερο, όπως 30,1, ή 30,11, τότε γίνεται περισσότερο από 30».



*Μ: Σε μία ανίσωση, συνήθως **δεν βρίσκουμε μία μόνο λύση, αλλά άπειρες!***

Σχολιασμός της διδασκαλίας

- Στην ιαπωνική τάξη των Μαθηματικών η διάταξη των θρανίων παραπέμπει σε μετωπική διδασκαλία. Ωστόσο, **δεν πρόκειται για δασκαλοκεντρική διδασκαλία**. Η μαθητές εργάστηκαν ατομικά και παρουσίασαν τις λύσεις του προβλήματος σε ολόκληρη την τάξη. Υπήρχε **αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού-μαθητών και η μάθηση ήταν ενεργητική**. Η ωριαία διδασκαλία περιλάμβανε δύο προβλήματα.
- **Το πρώτο πρόβλημα είχε υψηλή διαδικαστική πολυπλοκότητα** (πλήθος βημάτων που απαιτούνται, αριθμός ενσωματωμένων υποπροβλημάτων, κ.λπ.). Πρόκειται για **ανοιχτό πρόβλημα** της καθημερινότητας το οποίο κέντρισε το ενδιαφέρον των μαθητών, **οι οποίοι το έλυσαν με πολλούς τρόπους** σύμφωνα με τις ικανότητές τους, όπως με **χειραπτικά μέσα, πίνακα, αριθμητικό συλλογισμό, εξίσωση και ανίσωση (με επαλήθευση αριθμητικών τιμών).** Στο πρώτο πρόβλημα το πλήθος των λύσεων της ανίσωσης οδηγεί στην απάντηση $x>14$, όμως λόγω των περιορισμών του πραγματικού προβλήματος **δεκτές λύσεις είναι οι ακέραιοι θετικοί αριθμοί 15, 16, 17 και 18.**

Σχολιασμός της διδασκαλίας

- **Το δεύτερο πρόβλημα** συνδέεται με το πρώτο, καθώς είναι πρόβλημα ανίσωσης, δεν έχει όμως τον ίδιο βαθμό πολυπλοκότητας. Στο δεύτερο πρόβλημα που αναφέρεται σε χιλιοστόλιτρα (ml) από χυμό πορτοκαλιού οι λύσεις είναι άπειρες (x>30), **καθώς η χωρητικότητα είναι συνεχές μέγεθος**. Και εδώ υπάρχουν **περιορισμοί για το πραγματικό μέγεθος των ποτηριών**, οι οποίοι δεν απασχόλησαν τη συζήτηση.

Σχολιασμός της διδασκαλίας

- Ο εκπαιδευτικός περιφερόταν στα θρανία και **κρατούσε σημειώσεις** για τη μέθοδο επίλυσης κάθε μαθητή. Προετοιμαζόταν για την οργάνωση των παρουσιάσεων των μαθητών στην ολομέλεια **κυρίως με γνώμονα την καλύτερη ποιότητα μαθηματικής σκέψης.** Προσπαθούσε να κινητοποιήσει όλους τους μαθητές. Οι μαθητές διερευνούν, σκέφτονται και ανακαλύπτουν.
- Σε έναν μαθητή ο οποίος δεν μπορούσε να βρει μια μέθοδο λύσης τον ρώτησε: **«*Τι γίνεται την τρίτη ημέρα; Την τέταρτη μέρα;*»**, στρέφοντας την προσοχή του στη χειραπτική μέθοδο επίλυσης με μετακίνηση κερμάτων στο κουτί της προσφοράς ή της αξιοποίησης πίνακα.

Σχολιασμός της διδασκαλίας

- Επίσης, ρώτησε τον μαθητή που έλυσε το πρόβλημα με απαρίθμηση κερμάτων: ***«Υπάρχει ακόμα συντομότερος τρόπος για να βρεις την απάντηση;»*** και τον έβαλε να σκεφτεί μια πιο αποτελεσματική μέθοδο. Ρώτησε επίσης τον μαθητή που βρήκε την απάντηση με πίνακα: ***«Μπορείς να λύσεις το πρόβλημα με υπολογισμό;»***, και τον έβαλε να σκεφτεί μια αποτελεσματικότερη μέθοδο.
- Μια μαθήτρια είχε δημιουργήσει μια εξίσωση χρησιμοποιώντας x και y, αλλά ήταν προβληματισμένη και δεν μπορούσε να λύσει το πρόβλημα. Τη συμβούλεψε να χρησιμοποιήσει μια γνωστή μέθοδο μόνο με x.
- Έδωσε την ευκαιρία σε έναν «αδύνατο» μαθητή στα Μαθηματικά να παρουσιάσει την εργασία του σε ολόκληρη την τάξη. Παρότι ήταν μια εύκολη μέθοδος επίλυσης, **χάρηκε που αναγνωρίστηκε από τους συμμαθητές του.**

Σχολιασμός της διδασκαλίας

Μετά από την ατομική εργασία ο εκπαιδευτικός οδήγησε την τάξη σε παρουσίαση και συζήτηση των μεθόδων. Ένα κρίσιμο παιδαγωγικό θέμα ήταν **η σειρά παρουσίασης των λύσεων**. **Επέλεξε πρώτα τις αριθμητικές λύσεις (απαρίθμηση, υπολογισμός) και ύστερα τις αλγεβρικές (εξισώσεις, ανισώσεις).**

Μια αξιοσημείωτη παιδαγωγική επιλογή ήταν ότι έβαζε κάθε μαθητή που παρουσίαζε τη λύση του προβλήματος να μιλήσει για τη διαδικασία σκέψης του. Κατά τη διάρκεια των παρουσιάσεων των λύσεων έθετε προκλητικά ερωτήματα περιγραφής και εξήγησης. **Αυτός ο τύπος προβλήματος ενδείκνυται για τη "δημιουργία συνδέσεων".** Οι μαθητές χρησιμοποίησαν πλούσιες μαθηματικές περιγραφές και μαζί με τις στρατηγικές επίλυσης αιτιολόγησαν τον μαθηματικό συλλογισμό τους. Η έκφραση της επιχειρηματολογίας των μαθητών ενίσχυσε τις δεξιότητες μαθηματικής επικοινωνίας των μαθητών και μαθητριών.

Σχολιασμός της διδασκαλίας

Συνοψίζοντας, ο Ιάπωνας εκπαιδευτικός παρουσίασε ένα νέο πρόβλημα **υψηλής πολυπλοκότητας** πάνω στο οποίο οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά, χρησιμοποιώντας μαθηματική γλώσσα, σύμβολα, αιτιολογήσεις και αποδείξεις. Στην αρχή αφιέρωσε λίγο χρόνο στην **κατανόηση του προβλήματος**. Ακολούθησε ατομική **διερεύνηση** από τους μαθητές και στο τέλος **δημόσια υποστήριξη** των λύσεων στην ολομέλεια. Το μάθημα εστίαζε σε έννοιες, στη μαθηματική σκέψη και τις μεθόδους λύσης, παρά στη γρήγορη λύση.

Το μάθημα που σχεδίασε και υλοποίησε ο Ιάπωνας εκπαιδευτικός ήταν **προχωρημένο και συνεκτικό**. Βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές σχέσεις. Η ποιότητα της διδασκαλίας και της μάθησης στο ιαπωνικό μάθημα ήταν υψηλή. Οι διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού είναι βαθιά ριζωμένες στις πολιτιστικές αξίες των σχολικών τάξεων και της ευρύτερης κοινωνίας. Εν κατακλείδι, η ιαπωνική διδασκαλία των Μαθηματικών ήταν αποτελεσματική και επιτυχημένη.

Πώς θα υλοποιούσατε τη διδασκαλία στην τάξη σας ;

Από τη διδασκαλία μπορούμε να αντλήσουμε γόνιμα στοιχεία για να σχεδιάσουμε μια ανάλογη διδασκαλία στην τάξη μας. Ο Ιάπωνας εκπαιδευτικός ήθελε οι μαθητές του να σκέφτονται με νέο τρόπο, **να λύνουν ανοιχτά προβλήματα με πολλούς τρόπους, να συνθέτουν αποδείξεις, να κατανοούν μαθηματικές έννοιες, να κάνουν συνδέσεις των μαθηματικών εννοιών και να εκθέτουν δημόσια τις λύσεις τους στην ολομέλεια της τάξης.**

- Η ανάπτυξη της **εννοιολογικής μαθηματικής σκέψης** και των μαθηματικών διεργασιών και ικανοτήτων των μαθητών έχει βαρύνουσα σημασία χωρίς όμως να παραγνωρίζεται η εμπέδωση βασικών διαδικαστικών δεξιοτήτων.

Πώς θα υλοποιούσατε τη διδασκαλία στην τάξη σας ;

- Η **αξιοποίηση προκλητικών προβλημάτων** στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών και η εισαγωγή σε νέες μαθηματικές έννοιες μέσω προβλημάτων. **Η οργάνωση της τάξης σε μικρές ομάδες και η προώθηση της συνεργατικής διερεύνησης** και επίλυσης των προβλημάτων μετά από την ατομική κατανόηση αυτών.
- Η δημόσια παρουσίαση των στρατηγικών λύσης **στην ολομέλεια της τάξης** και η συνακόλουθη ανταλλαγή επιχειρημάτων για την εξασφάλιση υψηλής ποιότητας μαθηματικού διαλόγου.

Η απόκτηση διαδικαστικής ευχέρειας ακολουθεί τη διερεύνηση και συνδέεται στενά με την κατανόηση. Θέτουμε ερωτήσεις όχι για να πετύχουμε τη σωστή απάντηση, **αλλά για να σκεφτεί ο μαθητής.** Ακόμα κι αν ένας μαθητής παρέχει τη σωστή απάντηση, δεν σημαίνει ότι κατάλαβε.

Συμπεράσματα

- Εκθέσαμε ένα παράδειγμα ιαπωνικής διδασκαλίας. Αυτό δίνει τροφή για σκέψη και διερεύνηση. Δεν αποτελεί πρότυπο προς μίμηση. **Η παρούσα ΛΜΠ ως διδακτική προσέγγιση δεν είναι μοναδική.**
- Οι διαδικασίες λύσης προβλημάτων αναπτύσσονται με την πάροδο του χρόνου και βελτιώνονται μέσα από αποτελεσματικές διδακτικές πρακτικές. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού ξεκινά με την **επιλογή πλούσιων έργων επίλυσης προβλημάτων π**ου εστιάζουν στα Μαθηματικά τα οποία θέλει ο ίδιος να εξερευνήσουν οι μαθητές.
- **Παρέχει επαρκή χρόνο στους μαθητές να καταγίνονται με την αναζήτηση στρατηγικών και λύσεων και την αξιολόγηση των δικών τους αποτελεσμάτων.**

Συμπεράσματα

- Συχνά ο πραγματικός διαθέσιμος χρόνος είναι **δυσανάλογος** προς την ύλη του ΠΣ. Αν ο χρόνος δεν επαρκεί για να ολοκληρώσουμε όλες τις δραστηριότητες του προγράμματος, **θα πρέπει να καλύψουμε τα ουσιαστικά στοιχεία της ύλης**.
- Η ΛΜΠ είναι ένας τρόπος για την ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών και ταυτόχρονα ένα περιβάλλον μάθησης και συζήτησης των μαθηματικών εννοιών. Η ΛΜΠ επιτρέπει στους μαθητές να μεταφέρουν όσα έχουν ήδη μάθει **σε μη οικείες καταστάσεις.**
- **Αποτελεί μεγάλη συμπεριληπτική πρόκληση πώς να παρασχεθεί λυσιτελής μαθηματική εκπαίδευση με τη διδακτική προσέγγιση της ΛΜΠ σε όλους μαθητές.**

Βιβλιογραφία

Amit, M. (2009, September). The "Kidumatica" project-for the promotion of talented students from underprivileged backgrounds. In Proceedings of the 10th International Conference "Models in Developing Mathematics Education (pp. 23-28).

Andrews, P., Ryve, A., Hemmi, K., & Sayers, J. (2014). PISA, TIMSS and Finnish mathematics teaching: An enigma in search of an explanation. Educational Studies in Mathematics, *87*(1), 7-26.

Beaton, A. E., Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L. & Smith, T. A. (1996). *Mathematics achievement in the middle school years: IEA's third international mathematics and science study*. Chestnut Hill, MA, USA: TIMSS International Study Center.

Carotenuto, G., Di Martino, P., & Lemmi, M. (2021). Students' suspension of sense making in problem solving. *ZDM–Mathematics Education*, *53*, 817-830.

Duncker, K., & Lees, L. S. (1945). On problem-solving. *Psychological monographs*, *58*(5), i.

Funke, J. (2010). Complex problem solving: A case for complex cognition?. *Cognitive processing*, *11*(2), 133-142.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A. M. Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P. & Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries results from the TIMSS 1999 video study. National Center for Education Statistics, U. S. Department of Education*, Washington, DC. http://nces.ed.gov/pubs2003/2003013.pdf adresinden 01.05.2020 tarihinde alınmıştır.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*, 302-310.

Klerlein, J., & Hervey, S. (2019). Mathematics as a complex problem-solving activity: Promoting students' thinking through problem-solving. *Generation Ready White Paper*.

Kosyvas, G. (2016): Levels of arithmetic reasoning in solving an open-ended problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47 (3), 356–372.

Lesh, R. and J.S. Zawojewski (2007), "Problem solving and modeling'', in F. Lester (ed.), *The Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (2nd ed.), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, and Information Age Publishing, Charlotte, North Carolina (joint publication), pp. 763-804.

Leung, F. K. S. (2005). Some characteristics of East Asian mathematics classrooms based on data from the TIMSS 1999 video study. *Educational Studies in Mathematics*. *60*, 199- 215.

Lindquist, M., Philpot, R., Mullis, I. V. S., & Cotter, K. E. (2017). *TIMSS 2019 mathematics framework*. Lynch School of Education Boston College.

NCTM (2003). *Principles and standards for school mathematics*.

Nohda, N., & Emori, H. (1997). Communication and negotiation through open approach *method. In E. Pehkonen (Ed.), Use of open-ended problems in mathematics classrooms* (pp. 63–72). Helsinki: Department of Teacher Education, University of Helsinki.

Principles, N. C. T. M. (2000). Standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: Free Press.
Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.

Toh, P. C., Leong, Y. H., Toh, T. L., Dindyal, J., Quek, K. S., Tay, E. G., & Ho, F. H. (2014). The problem-solving approach in the teaching of number theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(2), 241-255.

Polya, G. (1998). Πώς να το λύσω. Αθήνα: εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Van de Walle, J. (2005), *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διδασκαλία. Αθήνα:* Τυπωθήτω Γ. Δαρδανός.

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας

https://users.sch.gr/gkosyvas/autosch/joomla15/

https://blogs.sch.gr/gkosyvas/