**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ**
**2/6/2016**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν $\mu_\alpha$ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α ενός τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, τότε ισχύει:

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 - \dfrac{\mu_\alpha{}^2}{2}$. **Μονάδες 2**

**β)** Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τη σχέση: $(\mathrm{AB\Gamma}) = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\mathrm{A}$. **Μονάδες 2**

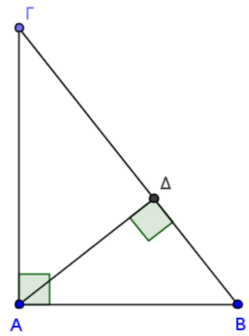
**γ)** Το εμβαδόν ενός ημικυκλίου ακτίνας $R$ είναι $\dfrac{\pi R^2}{2}$. **Μονάδες 2**

**δ)** Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$. **Μονάδες 2**

**ε)** Σε κάθε κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R), ισχύει: $\lambda_6 = R$ **Μονάδες 2**

**Α2.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

**Μονάδες 15**




## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 3, ΑΓ = 8 και ΒΓ = 7

**Β1.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΑΜ **Μονάδες 9**

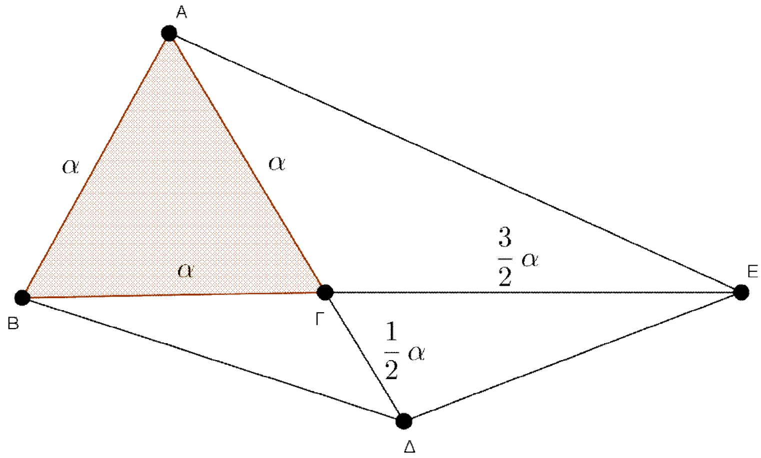
**Β2.** Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του και να υπολογίσετε τη γωνία Α **Μονάδες 4+4**

**Β3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου (ΑΒΜ) **Μονάδες 8**

(Δίνονται: $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\eta\mu 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά μήκους α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το μέρος του Γ, κατά ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta = \dfrac{1}{2}$ ΑΓ και παίρνουμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΓ, έτσι ώστε $\Gamma\mathrm{E} = \dfrac{3}{2}$ ΒΓ.




**Γ1.** Να αποδείξετε ότι (ΒΓΔ) $= \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$, όπου α η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ

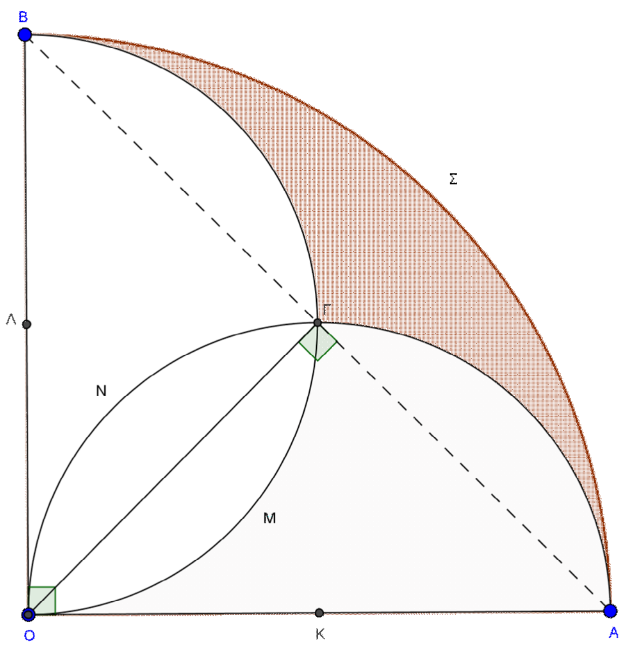
**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι $\frac{(ΑΓΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{3}{2}$ **Μονάδες 6**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΕ. **Μονάδες 12**

(Δίνονται: συν$60^o = \frac{1}{2}$, συν$120^o = -\frac{1}{2}$ , ημ$60^o$ = ημ$120^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

**ΘΕΜΑ Δ**




Δίνεται ένα τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ κύκλου (Ο,R). Με διαμέτρους ΟΑ και ΟΒ κατασκευάζουμε εσωτερικά του τεταρτοκυκλίου δύο ημικύκλια που τέμνονται στο σημείο Γ.

**Δ1.** Να δείξετε ότι: ΟΓ $= \frac{R\sqrt{2}}{2}$ **Μονάδες 8**

**Δ2.** Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου (ΟΜΓΝΟ) **Μονάδες 8**

**Δ3.** Να δείξετε ότι τα εμβαδά των καμπυλόγραμμων χωρίων (ΑΣΒΓΑ) και (ΟΜΓΝΟ) είναι ίσα. **Μονάδες 9**

**<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>**

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Οι παρακάτω απαντήσεις είναι ενδεικτικές. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1. α)** Λάθος

**β)** Σωστό

**γ)** Σωστό

**δ)** Λάθος

**ε)** Σωστό

**Α2.** Θεωρία, απόδειξη Θ. iv σελ. 185

**ΘΕΜΑ Β**

ΑΒ = 3, ΑΓ = 8 και ΒΓ = 7

**Β1.** Από 1ο θεώρημα διαμέσων και μέσω του τύπου $ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = 2ΑΜ^2 + \frac{ΒΓ^2}{2}$ ή του τύπου

$ΑΜ^2 = \frac{2ΑΓ^2 + 2ΑΒ^2 - ΒΓ^2}{4}$ προκύπτει $ΑΜ = \frac{\sqrt{97}}{2}$

**Β2.** $ΑΓ^2 = 8^2 = 64$, $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$

Άρα $ΑΓ^2 > ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \Leftrightarrow$ η $\hat{Β}$ είναι αμβλεία γωνία

Από νόμο συνημιτόνων: $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ \Rightarrow 7^2 = 8^2 + 3^2 - 2\cdot 8\cdot 3\cdot συνΑ \Leftrightarrow$

$49 = 64 + 9 - 48\cdot συνΑ \Leftrightarrow 48\cdot συνΑ = 73 - 49 \Leftrightarrow συνΑ = \frac{24}{48} \Leftrightarrow συνΑ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

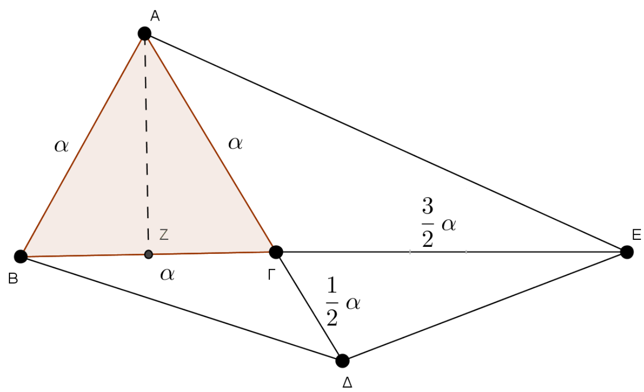
$\hat{Α} = 60^o$

**Β3.** Επειδή η ΑΜ διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα

$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}β\cdot γ\cdot ημΑ = \frac{1}{4}\cdot 8\cdot 3\cdot ημ60 = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ τ.μονάδες

Σχόλιο: Το (ΑΒΜ) άμεσα ή το (ΑΒΓ) μπορεί να βρεθεί και με τον τύπο του Ήρωνα

**ΘΕΜΑ Γ**



**Γ1.** Η γωνία $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β}$ είναι $60^o$, οπότε η παραπληρωματική της γωνία $\Delta\hat{\Gamma}\text{Β}$ είναι $120^o$,

$(\text{ΒΓΔ}) = \frac{1}{2}\text{ΒΓ}\cdot\text{ΓΔ}\cdot\etaμ\ \Delta\hat{\Gamma}\text{Β} = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{2}\alpha\cdot\ \etaμ120 = \frac{1}{4}\alpha^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ τ. μονάδες

**Γ2.** Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΒΓ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Α, το ΑΖ. Άρα:

$$\frac{(\text{ΑΓΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\frac{3}{2}\alpha}{\alpha} = \frac{3}{2}$$

**Γ3.** (ΑΒΔΕ) = (ΓΑΒ) + (ΓΒΔ) + (ΓΕΔ) + (ΓΑΕ)  (1)

Το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισόπλευρο πλευράς α, άρα $(\text{ΓΑΒ}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ τ. μονάδες,

Από α) ερώτημα: $(\text{ΓΒΔ}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$,

Ομοίως με α) ερώτημα:

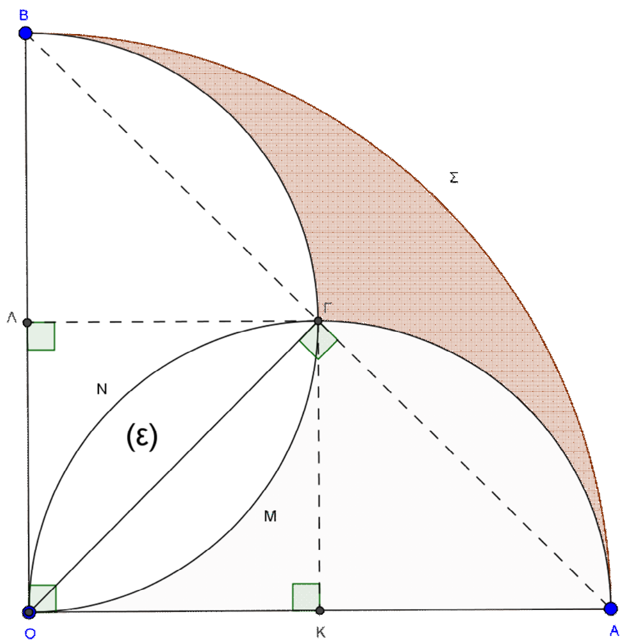
$(\text{ΓΕΔ}) = \frac{1}{2}\cdot\text{ΓΕ}\cdot\text{ΓΔ}\cdot\etaμ\ \Delta\hat{\Gamma}\text{Ε} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{3}{2}\alpha\cdot\ \etaμ120 = \frac{3}{8}\alpha^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$ τ. μονάδες

Από β) ερώτημα:  $(\text{ΑΓΕ}) = \frac{3}{2}\ (\text{ΑΒΓ}) = \frac{3}{2}\ \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8}$ τ. μονάδες

Από (1) $\Rightarrow$ $(\text{ΑΒΔΕ}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} + \frac{3\sqrt{3}a^2}{8} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{2a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} + \frac{6\sqrt{3}a^2}{16} =$

$= \frac{15\sqrt{3}a^2}{16}$ τ. μονάδες

**ΘΕΜΑ Δ**



**Δ1.**

Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές (ΟΑ = ΟΒ = R) και το τμήμα ΟΓ είναι ύψος άρα και διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΒ = $R\sqrt{2}$

Άρα $ΟΓ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

<u>2ος τρόπος</u>: με Π.Θ. στο ορθογώνιο και ισοσκελές (ΟΓ = ΟΑ) τρίγωνο ΟΓΑ…..:

$$ΟΓ^2 + ΓΑ^2 = ΟΑ^2 \Leftrightarrow 2\ ΟΓ^2 = R^2 \Leftrightarrow ΟΓ = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

<u>3ος τρόπος</u>: με Π.Θ. στο ορθογώνιο και ισοσκελές ($ΟΚ = ΚΓ = \frac{R}{2}$) τρίγωνο ΟΓΚ…..:

$$ΟΓ^2 = ΟΚ^2 + ΓΚ^2 \Leftrightarrow ΟΓ^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow \ldots. \Leftrightarrow ΟΓ = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

**Δ2.**

Φέρνω τα τμήματα ΓΚ και ΛΓ, τα οποία είναι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις υποτείνουσες στα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΟΓΑ και ΟΓΒ αντίστοιχα, οπότε θα είναι και ύψη. Άρα το τετράπλευρο ΟΚΓΛ είναι τετράγωνο πλευράς $\frac{R}{2}$.

Είναι: (ΟΜΓΝΟ) = 2 (ε) , όπου ε το κυκλικό τμήμα που περιέχεται στον κυκλικό τομέα $(Κ\overset{\frown}{ΟΝΓ})$, οπότε:

$$(ε) = (Κ\overset{\frown}{ΟΝΓ}) - (ΚΟΝΓ) =$$

$$= \frac{\pi(\frac{R}{2})^2 90^o}{360^o} - \frac{ΟΚ \cdot ΚΓ}{2} = \frac{\pi \frac{R^2}{4} 90^o}{360^o} - \frac{\frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{16} - \frac{R^2}{8} = \frac{\pi R^2}{16} - \frac{2R^2}{16} = \frac{(\pi - 2)R^2}{16}$$

Άρα: $(ΟΜΓΝΟ) = 2\ (ε) = 2 \cdot \frac{(\pi-2)R^2}{16} = \frac{(\pi-2)R^2}{8}$

**Δ3.** $(ΑΣΒΓΑ) = (Ο\overset{\frown}{ΒΣΑ}) - (Κ\overset{\frown}{ΟΓΑ}) - (Λ\overset{\frown}{ΟΓΒ}) + (ΟΜΓΝΟ) =$

$$= \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{2} - \frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{2} + (ΟΜΓΝΟ) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi \frac{R^2}{4}}{2} - \frac{\pi \frac{R^2}{4}}{2} + (ΟΜΓΝΟ) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{8} +$$

$$+ (ΟΜΓΝΟ) = (ΟΜΓΝΟ)$$

<u>2ος τρόπος</u>: το εμβαδόν του ΑΣΒΓΑ θα είναι ίσο με το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου ΟΓΑ ελαττωμένο κατά το εμβαδόν του τετραγώνου ΚΟΛΓ και των εμβαδών των ίσων τεταρτοκυκλίων ΚΑΓ και ΒΛΓ. Οπότε έχουμε:

$$(Ο\overset{\frown}{ΒΣΑ}) = \frac{\pi R^2}{4} \ (1)$$

$$(\text{ΛΟΓΚ}) = \frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{R^2}{4} \ (2)$$

$$(\text{Κ}\overset{\frown}{\text{ΓΑ}}) = (\text{Λ}\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}) = \frac{\pi R^2}{16} \ (3)$$

$$(\text{ΑΣΒΓΑ}) \overset{(1),(2),(3)}{=} \frac{\pi R^2}{4} - \left(\frac{R^2}{4} + 2\frac{\pi R^2}{16}\right) = \ldots\ldots = \frac{(\pi-2)R^2}{8} = (\text{ΟΜΓΝΟ})$$