ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ
9/6/2016

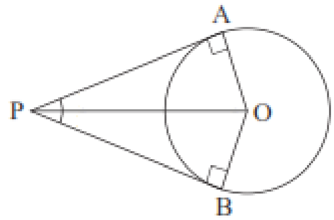
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας, τη λέξη Σωστό ή Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1) Οι διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές. **μονάδες 2**
2) Στο ισοσκελές τρίγωνο οποιαδήποτε διάμεσος είναι επίσης ύψος και διχοτόμος. **μονάδες 2**
3) Στο ισοσκελές τραπέζιο οι προσκείμενες στις βάσεις γωνίες είναι ίσες. **μονάδες 2**
4) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. **μονάδες 2**
5) Το άθροισμα των οξειών γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με 90^o. **μονάδες 2**

Α2. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου (ΡΑ και ΡΒ), που άγονται από σημείο Ρ εκτός αυτού είναι ίσα. **μονάδες 15**



ΘΕΜΑ Β

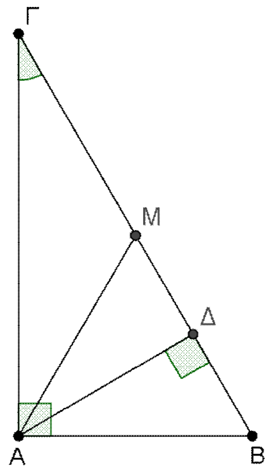
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο ισχύει $\hat{A} = 90^0$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$

Β1. Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ **Μονάδες 8**

Β2. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\Gamma} = 30^o$ και ΑΔ, ΑΜ το ύψος και η διάμεσός του αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $\Delta\hat{A}M = 30^o$ **Μονάδες 8**

ii) $B\Delta = \dfrac{B\Gamma}{4}$ **Μονάδες 9**

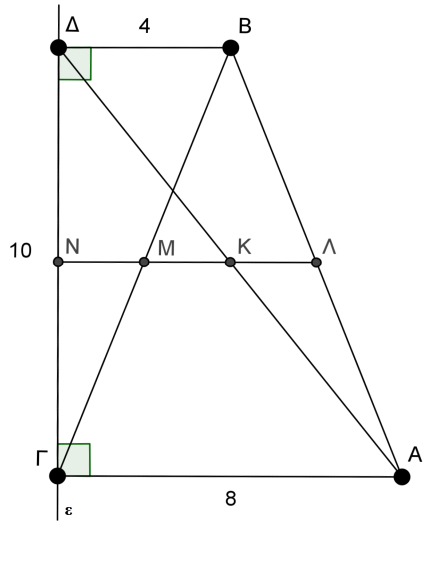


ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και μια ευθεία ε που δεν τέμνει το τμήμα αυτό. Από τα Α, Β φέρουμε κάθετες προς την ε, οι οποίες την τέμνουν στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα, ώστε ΑΓ = 8, ΒΔ = 4 και ΓΔ = 10. Από το μέσο Κ της ΑΔ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει τις ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ στα σημεία Λ, Μ και Ν αντίστοιχα.

Γ1. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και ότι τα σημεία Λ, Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα **Μονάδες 2+6**

Γ2. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΚΜ και ΛΝ **Μονάδες 8**



Γ3. Να χαράξετε το τμήμα ΒΚ και να υπολογίσετε το μήκος του. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ παίρνω σημείο Ε στην προέκταση του ΒΔ, ώστε ΔΕ = ΒΔ.

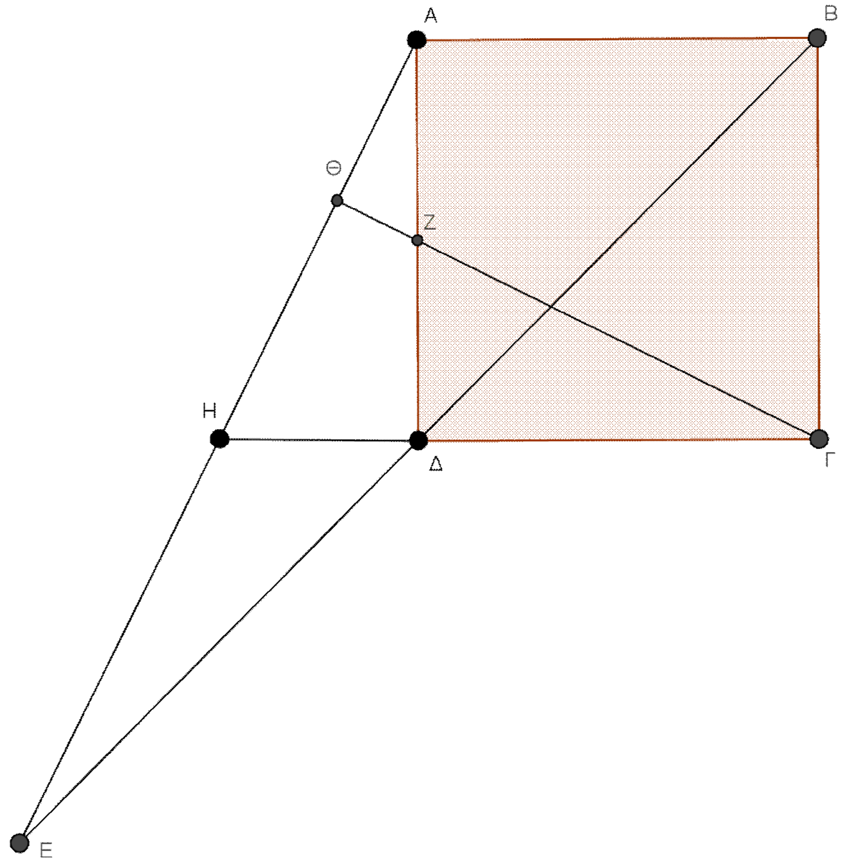
Δ1. Αν το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Η είναι η τομή των ΑΕ και ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

i) $\Delta H = \frac{AB}{2}$ **Μονάδες 8**

ii) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΓΔ είναι ίσα **Μονάδες 8**

Δ2. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΓΖ και ΑΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$A\hat{\Theta}\Gamma = 90^o$ **Μονάδες 9**



<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

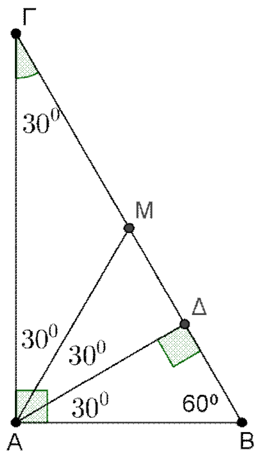
Οι παρακάτω λύσεις είναι ενδεικτικές. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

Α2. Θεωρία σελ. 68

ΘΕΜΑ Β



Β1. Το άθροισμα των οξειών γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με 90^o
Επειδή $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ προκύπτει $2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε $\hat{B} = 60^o$

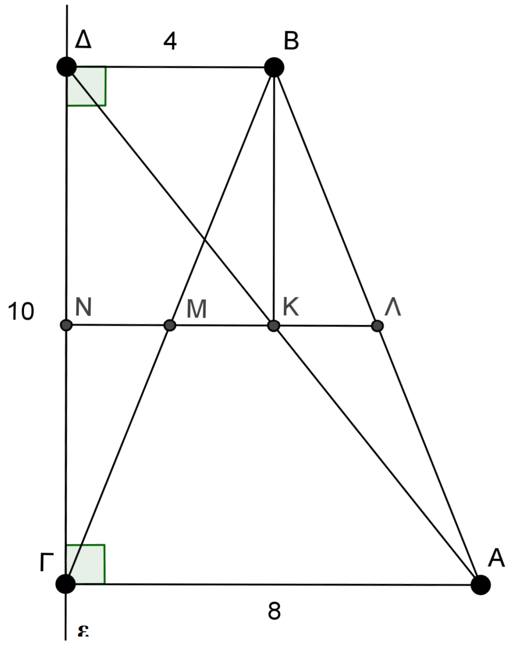
Β2. i) Επειδή η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ΑΜ = $\frac{B\Gamma}{2}$ = ΒΜ = ΓΜ, οπότε τα τρίγωνα ΜΓΑ και ΜΑΒ είναι ισοσκελή.

Άρα στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΑ θα είναι $\hat{\Gamma A M} = \hat{\Gamma} = 30^o$. Επειδή στο ισοσκελές ΜΑΒ, το ΑΔ είναι ύψος θα είναι και διχοτόμος, οπότε αφού

$\hat{BAM} = \hat{A} - \hat{\Gamma AM} = 90^o - 30^o = 60^o$ θα ισχύει: $\hat{\Delta AM} = \frac{\hat{BAM}}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$

ii) Από β) ερώτημα, ομοίως, προκύπτει $\hat{\Delta AB} = \frac{\hat{BAM}}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΒ είναι απέναντι από 30^o. Ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ η ΑΒ είναι απέναντι από 30^o. Άρα ΔΒ = $\frac{AB}{2} \overset{\hat{\Gamma}=30^o}{=} \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

ΘΕΜΑ Γ



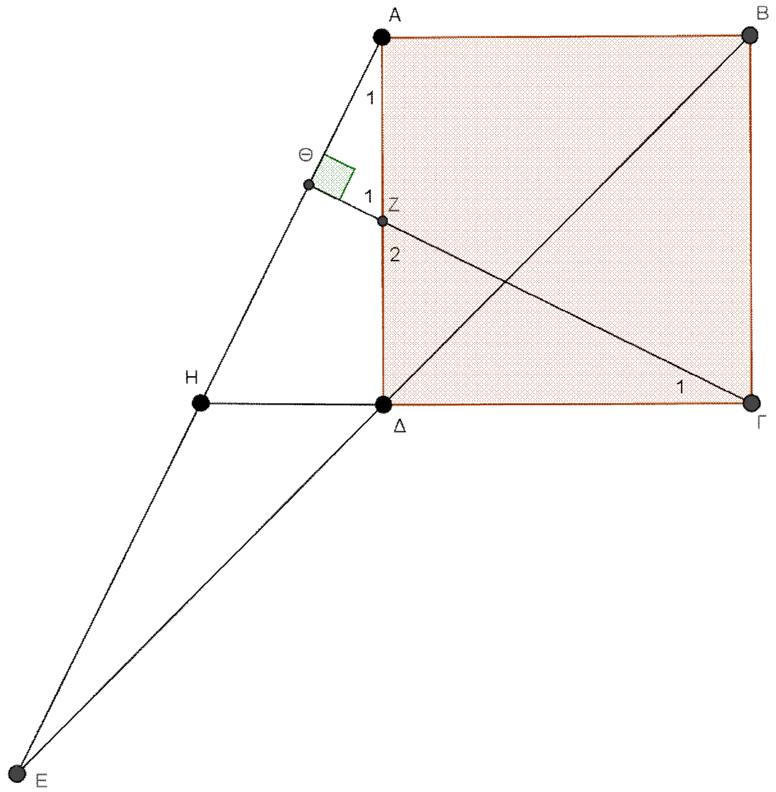
Γ1. Είναι ΑΓ // ΒΔ και ΑΓ ≠ ΒΔ, γιατί είναι κάθετες στην ευθεία ε, άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.
Στο τρίγωνο ΔΒΑ το Κ είναι μέσο του ΑΔ και επειδή φέρουμε από το Κ παράλληλη στη ΑΓ και ΑΓ // ΒΔ, το Λ θα είναι μέσο του ΑΒ.
Επίσης, στο τρίγωνο ΑΔΓ, το Κ είναι μέσο του ΑΔ και ΚΝ // ΑΓ, άρα Ν μέσο του ΓΔ.
Ομοίως, στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Λ είναι μέσο του ΑΒ και ΜΛ // ΑΓ, άρα Μ μέσο του ΒΓ.

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>: Από το Κ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΓ, οπότε θα είναι και παράλληλη στην ΒΔ. Γνωρίζουμε ότι αν τρεις παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε ορίζουν ίσα τμήματα και σε άλλη ευθεία που τις τέμνει. Άρα, επειδή ΑΓ // ΛΝ // ΒΔ και το Κ είναι μέσο του ΑΔ, θα είναι Λ μέσο του ΑΒ, Μ μέσο του ΒΓ και Ν μέσο του ΓΔ.

Γ2. Από γνωστό θεώρημα για το τμήμα ΚΜ που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ΑΔ και ΒΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ, ισχύει ΚΜ // = $\frac{ΑΓ-ΔΒ}{2}=\frac{8-4}{2}=2$. Επίσης, το τμήμα ΛΝ ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου ΑΒΓΔ, άρα ΛΝ = $\frac{ΑΓ+ΔΒ}{2}=\frac{8+4}{2}=6$

Γ3. Στο τρίγωνο ΒΓΔ, τα Μ, Ν είναι μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Άρα ΜΝ = $\frac{ΒΔ}{2}=\frac{4}{2}=2$. Άρα ΚΝ = ΚΜ + ΜΝ = 2 + 2 = 4 = ΒΔ και αφού ΚΝ // ΒΔ, , το ΚΒΔΝ είναι παραλληλόγραμμο. Τελικά ΚΒ = ΔΝ = $\frac{ΓΔ}{2}=\frac{10}{2}=5$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Στο τρίγωνο ΑΒΕ είναι Δ μέσο του ΒΕ και ΔΗ//ΑΒ, οπότε ΑΗ = ΗΕ. Άρα ΗΔ = $\frac{ΑΒ}{2}$, γιατί ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΕ και ΕΒ στο τρίγωνο ΑΒΕ.

Δ2. Είναι $\overset{\Delta}{ΑΔΗ} = \overset{\Delta}{ΖΔΓ}$ γιατί 1) ορθογώνια, 2) ΑΔ = ΓΔ, γιατί το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, 3) ΗΔ = ΔΖ, γιατί ΗΔ = $\frac{ΑΒ}{2}$ από α) ερώτημα, ΔΖ = $\frac{ΑΔ}{2}$ από εκφώνηση και ΑΒ = ΑΔ ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Δ3. Από τα ίσα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_1$ (1). Επίσης, $\hat{Ζ}_1 = \hat{Ζ}_2$(2), ως κατακορυφήν γωνίες. Όμως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΔΓ ισχύει $\hat{Γ}_1 + \hat{Ζ}_2 = 90^o$. Τελικά στο τρίγωνο ΑΘΖ μέσω των (1), (2) θα είναι $\hat{Α}_1 + \hat{Ζ}_1 = \hat{Γ}_1 + \hat{Ζ}_2 = 90^o$.

Άρα $Α\hat{Θ}Γ = 90^o$