Ημερομηνία…………………………………………………………………………………$2^η$ ομάδα

Ονοματεπώνυμο…………………………………………………………………………

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε x > 0, ισχύει $e^{\ln x} = x$.

β. Ισχύει $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$, για κάθε $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$.

γ. Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \ln x$, έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

δ. Ισχύει ln1 = e.

ε. Ισχύει ln(x – y) = lnx – lny, για κάθε x > 0 , y > 0.

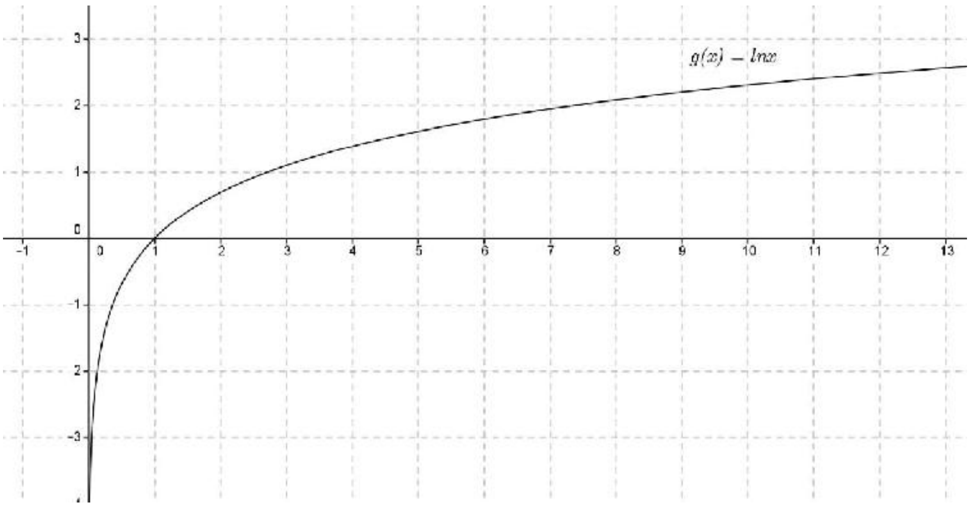
(Μονάδες 3 x 5 = 15)

Α2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -1 + \ln x$, $x > 0$

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ (Μονάδες 8)

β) Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f ; (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = log(3x) και $g(x) = \log(9^x - 3^{x-1})$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $g(x) < f(\frac{2}{9})$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\frac{6-x}{6+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα f(2) + f(4) (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \log(6+x) = 10^{\log 2} - \log 10$ (Μονάδες 8)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.
α. σωστό
β. σωστό
γ. λάθος
δ. λάθος
ε. λάθος

Α2. $f(x) = -1 + \ln x,\ x > 0$
α) θα προκύψει με μετατόπιση της C_g κατά 1 μονάδα κάτω
β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = e$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο (e, 0).
γ) x = 0, δηλαδή ο άξονας y'y.

ΘΕΜΑ Β

α) Για το πεδίο ορισμού των f(x) = log(3x) και $g(x) = \log(9^x - 3^{x-1})$ έχω: 3x > 0 και $9^x - 3^{x-1} > 0$ αντίστοιχα. Άρα x > 0 για την f και $3^{2x} > 3^{x-1} \overset{3^x \uparrow}{\Leftrightarrow} 2x > x - 1 \Leftrightarrow x > -1$ για την g.
Άρα $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = (-1, +\infty)$
β) για $x \in (-1, +\infty)$, $g(x) < f(\frac{2}{9}) \Leftrightarrow \log(9^x - 3^{x-1}) < \log(\frac{2}{3}) \overset{\log x \uparrow}{\Leftrightarrow} 9^x - 3^{x-1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow$
$3\cdot(3^x)^2 - 3^x - 2 < 0$
έστω $3^x = \omega > 0$.....οπότε $3\omega^2 - \omega - 2 < 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < \omega < 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < 3^x < 1 \Leftrightarrow$
$3^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Τελικά επειδή και $x \in (-1, +\infty)$ προκύπτει $x \in (-1, 0)$

ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = \log\frac{6-x}{6+x}$

α) πρέπει $\frac{6-x}{6+x} > 0$ και 6 + x ≠ 0……… $D_f = (-6, 6)$

β) Ισχύει $x \in D_f$ και $-x \in D_f$, $f(-x) = \ln\frac{6-(-x)}{6+(-x)} = \ln\frac{6+x}{6-x} = \ln(\frac{6-x}{6+x})^{-1} = -\ln(\frac{6-x}{6+x}) = -f(x)$

άρα η f είναι περιττή στο (- 6, 6).

γ) f(2) + f(4)=
$$\log(\frac{6-2}{6+2}) + \log(\frac{6-4}{6+4}) = \log\frac{4}{8} + \log(\frac{2}{10}) = \log\frac{1}{2} + \log\frac{1}{5} = \log(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}) = \log\frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -\log 10 = -1$$

δ) αν $x \in (-6, 6)$ και 6 + x > 0 δηλαδή μετά από συναλήθευση για $x \in (-6, 6)$,

$$f(x) + \log(6+x) = 10^{\log 2} - \log 10 \Leftrightarrow \log\frac{6-x}{6+x} + \log(6+x) = 2 - 1$$
$$\Leftrightarrow \log\frac{6-x}{6+x}\cdot(6+x) = 1 \Leftrightarrow \log(6-x) = 1 \Leftrightarrow 6 - x = 10 \Leftrightarrow x = 6 - 10 \Leftrightarrow x = -4$$, δεκτή αφού $x \in (-6, 6)$