Ημερομηνία ……Τμήμα……$1^η$ ομάδα
Ονοματεπώνυμο……

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση f(x) = ρ·ημωx, ρ > 0 και ω > 0, έχει περίοδο Τ = 2π. **Μονάδες 02**

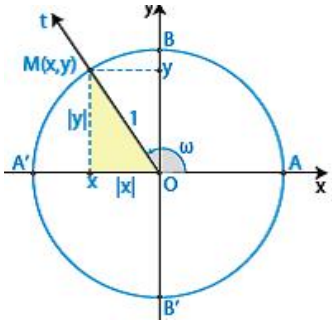
β) Οι λύσεις της εξίσωσης εφx = εφθ είναι της μορφής x = κπ + θ, κ∈Z. **Μονάδες 02**

γ) Οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. **Μονάδες 02**

δ) Ισχύει $-1 \le$ εφx ≤ 1 για κάθε x∈R. **Μονάδες 02**

ε) Η συνάρτηση f(x) = ημx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \frac{®}{2}]$ **Μονάδες 02**

Α2. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω, ισχύει:
$ημ^2ω + συν^2ω = 1$. **Μονάδες 15**



ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3συν2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f. **Μονάδες 12**

Β2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου. **Μονάδες 13**

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x					
συν2x					
$f(x) = 3συν2x$					

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παράσταση K = $\frac{£¨(®-μ)\cdot±^3¬(2®+μ)\cdot±^3¬(\frac{9®}{2}+μ)}{¦«(13®+μ)\cdot±^3¬(-μ)\cdot±¨(\frac{21®}{2}-μ)}$ και η εξίσωση

$2¦«^2x - συνx + K = 0$ **(1)**

Γ1. Να υπολογίσετε την παράσταση K. **Μονάδες 12**

Γ2. Αν K = −1, να λύσετε την εξίσωση **(1)** **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{ημ^2x}{1-συνx}$, $x \neq 2κπ, κ \in \mathbb{Z}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $A = 1 + συνx$. **Μονάδες 8**

Δ2. Αν $ημx = \frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} \prec x \prec \pi$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α **Μονάδες 8**

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{ημ^2x}{1-συνx} = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$. **Μονάδες 9**

Ημερομηνία……$2^{η}$ ομάδα
Ονοματεπώνυμο……

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση f(x) = ρ·συνωx, ρ > 0 και ω > 0, έχει περίοδο Τ = 2π. **Μονάδες 02**

β) Οι λύσεις της εξίσωσης σφx = σφθ είναι της μορφής $x = κ\frac{®}{2} + θ$, $κ \in Z$. **Μονάδες 02**

γ) Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. **Μονάδες 02**

δ) Ισχύει $-1 \le$ σφx ≤ 1 για κάθε $x \in R$. **Μονάδες 02**

ε) Η συνάρτηση f(x) = συνx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \frac{®}{2}]$ **Μονάδες 02**

Α2. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω με συνω ≠ 0 και ημω ≠ 0, ισχύει: **εφω·σφω = 1.** **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5ημ4x$, $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f. **Μονάδες 12**

Β2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου. **Μονάδες 13**

x	0	$\frac{π}{8}$	$\frac{π}{4}$	$\frac{3π}{8}$	$\frac{π}{2}$
4x					
ημ4x					
$f(x) = 5ημ4x$					

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{£¨(®+μ)\cdot¦«(4®+μ)\cdot¦«(\frac{7®}{2}+μ)}{¦«(15®-μ)\cdot±³¬(®+μ)\cdot±¨(\frac{19®}{2}+μ)}$ και η εξίσωση

$2±³¬^{2}x - ημx + K = 0$ **(1)**

Γ1. Να υπολογίσετε την παράσταση Κ. **Μονάδες 12**

Γ2. Αν Κ = −1, να λύσετε την εξίσωση (1) **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{συν^2x}{1-ημx}$, $x \ne 2κπ + \frac{π}{2}, κ \in \mathbb{Z}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $A = 1 + ημx$. **Μονάδες 8**

Δ2. Αν $συνx = \frac{4}{5}$ και $\frac{3π}{2} \prec x \prec 2π$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α. **Μονάδες 8**

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{συν^2x}{1-ημx} = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2π)$. **Μονάδες 9**

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

Α2. Θεωρία . Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο .. κ.τ.λ.

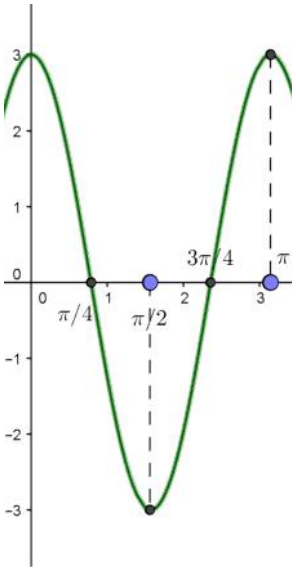
ΘΕΜΑ Β

$f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Β1. ρ = 3, ω = 2 , άρα $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$, maxf = 3, minf = -3

Β2.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συν2x	1	0	-1	0	1
$f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$	3	0	-3	0	3



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\frac{£^{\cdot\cdot}(® - \mu)\cdot\pm^{3}\neg(2® + \mu)\cdot\pm^{3}\neg(\frac{9®}{2} + \mu)}{¦«(13® + \mu)\cdot\pm^{3}\neg(-\mu)\cdot\pm^{\cdot\cdot}(\frac{21®}{2} - \mu)} = \frac{-£^{\cdot\cdot}\mu\cdot\pm^{3}\neg\mu\cdot(-¦«\mu)}{-¦«\mu\cdot\pm^{3}\neg\mu\cdot£^{\cdot\cdot}\mu} = -1$

Γ2. $2¦«^{2}x - \sigma\upsilon\nu x + K = 0 \Leftrightarrow 2¦«^{2}x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sigma\upsilon\nu^{2}x) - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$2 - 2\sigma\upsilon\nu^{2}x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu^{2}x - \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^{2}x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ ….Δ = 9

…..$\sigma\upsilon\nu x = \frac{-1\pm 3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = -1$

$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in Z.$

$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \pi, \kappa \in Z.$

ΘΕΜΑ Δ

$A = \frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}, \ x \neq 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

Δ1. $A = \frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu x} = 1+\sigma\upsilon\nu x$

Δ2. Αν $\eta\mu x = \frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} \prec x \prec \pi$, τότε $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow (\frac{4}{5})^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x =$

$= \pm\frac{3}{5}$, δεκτή η $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$ αφού $\frac{\pi}{2} \prec x \prec \pi$

Άρα $A = 1+\sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Δ3. $\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in Z.$

Όμως $x \in (0, 2\pi)$, οπότε $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{3} < \kappa < \frac{2}{3} \ldots \Leftrightarrow \kappa = 0$, αφού $\kappa \in Z$, άρα δεκτή μόνο για $\kappa = 0 \quad x = \frac{2\pi}{3}$

και ομοίως $0 < 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \kappa < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \kappa = 1$, αφού $\kappa \in Z$, άρα

δεκτή για $\kappa = 1 \quad x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

Α2. Θεωρία

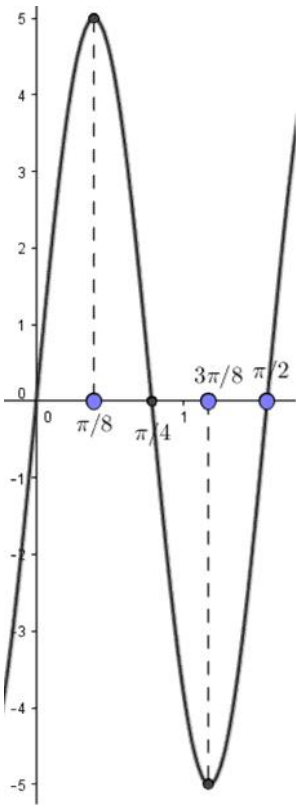
ΘΕΜΑ Β

$f(x) = 5\eta\mu 4x$, $x \in \mathbb{R}$.

Β1. ρ = 5, ω = 4 , άρα T = 2π/ω = 2π/4 = π/2, maxf = 5, minf = –5

Β2.

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
4x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημ4x	0	1	0	-1	0
$f(x) = 5\eta\mu 4x$	0	5	0	-5	0



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $K = \frac{£^{¨}(® + \mu)\cdot ¦«(4® + \mu)\cdot ¦«(\frac{7®}{2} + \mu)}{¦«(15® - \mu)\cdot ±^{3}¬(® + \mu)\cdot ±^{¨}(\frac{19®}{2} + \mu)} = \frac{£^{¨}\mu\cdot ¦«\mu\cdot(-±^{3}¬\mu)}{¦«\mu\cdot(-±^{3}¬\mu)\cdot(-£^{¨}\mu)} = -1$

Γ2. $2\pm^3\neg^2 x - \eta\mu x + K = 0 \Leftrightarrow 2\pm^3\neg^2 x - \eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1-\eta\mu^2 x) - \eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$2 - 2\eta\mu^2 x - \eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu^2 x - \eta\mu x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ ….$\Delta = 9$

…..$\eta\mu x = \frac{-1\pm 3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$ ή $\eta\mu x = -1$

$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή

$x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in Z.$

$\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu(-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + (-\frac{\pi}{2})$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - (-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$ ή

$x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, \kappa \in Z.$

ΘΕΜΑ Δ

$A = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\eta\mu x}, \ x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Δ1. $A = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\eta\mu x} = \frac{1-\eta\mu^2 x}{1-\eta\mu x} = \frac{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{1-\eta\mu x} = 1+\eta\mu x$

Δ2. Αν $\eta\mu x = \frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} \prec x \prec \pi$, τότε $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow (\frac{4}{5})^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x =$

$= \pm\frac{3}{5}$, δεκτή η $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$ αφού $\frac{\pi}{2} \prec x \prec \pi$

Άρα $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Δ3. $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\eta\mu x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + (-\frac{\pi}{6})$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}, \kappa \in Z.$

Όμως $x \in (0, 2\pi)$, οπότε $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} < 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < 2\kappa\pi < \frac{13\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{12} < \kappa < \frac{13\pi}{12}$ …. $\Leftrightarrow \kappa = 1$, αφού $\kappa \in Z$, άρα δεκτή μόνο για $\kappa = 1$ $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

και ομοίως $0 < 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6} < 2\kappa\pi < 2\pi - \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} < \kappa < \frac{5}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0$, αφού $\kappa \in Z$,

άρα δεκτή για $\kappa = 0$ $x = \frac{7\pi}{6}$