ΛΥΚΕΙΟ ΕΡΕΤΡΙΑΣ – Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΟΜΑΔΑ 2η

ΟΛΙΓΟΛΕΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_o

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………………………

Ημερομηνία:…………………………………………………………...

ΘΕΜΑ Α

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \text{¦«}x \cdot \text{¦«}\dfrac{1}{x}, & x \prec 0 \\ \dfrac{|x^2 - x - 2| - 2}{x}, & x \succ 0 \end{cases}$$

Α1. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$ (μονάδες 15+15)

Α2. Να βρείτε το $\lim_{x \to 0^+} [f(x) - 3f(-x)]$ (μονάδες 20)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f^3(x) + 2x^2 \cdot f(x) = 3\eta\mu^3 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \sim \in \mathbb{R}$, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $\alpha = 1$ (μονάδες 5+15)

Β2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (μονάδες 10)

Β3. Να βρείτε τα όρια i) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(\text{¦«}x)}{x}$ ii) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x^2 - 4)}{f(x - 2)}$

(μονάδες 5+15)

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

$$f(x) = \begin{cases} ¦«x \cdot ¦«\dfrac{1}{x}, & x \prec 0 \\ \dfrac{|x^2 - x - 2| - 2}{x}, & x \succ 0 \end{cases}$$

Α1. Για x < 0, *f(x)* = $\dfrac{¦«x}{x} \cdot x \cdot ±³¬\dfrac{1}{x}$, άρα……………… $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \cdot 0 = 0$

Για x > 0, *f(x)* = $\dfrac{|x^2 - x - 2| - 2}{x}$ και $x^2 - x - 2 < 0$ κοντά στο 0 από θετικές τιμές, αφού $\lim_{x \to 0^+}(x^2 - x - 2) = -2 < 0$

Άρα $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{-x^2 + x + 2 - 2}{x}$ = …. = 1

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$

Α2. Να βρείτε το $\lim_{x \to 0^+}[f(x) - 3f(-x)] = \lim_{x \to 0^+} f(x) - 3\lim_{x \to 0^+} f(-x) = \ldots$

= 1 – 3(– 1) = 4

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για x = 0 στη δοσμένη σχέση προκύπτει *f(0) = 0*. Για x ≠ 0, διαιρώντας με $x^3 \neq 0$ τη δοσμένη σχέση $f^3(x) + 2x^2 \cdot f(x) = 3ημ^3 x$ ….. και παίρνοντας όρια για $x \to 0$, χρησιμοποιώντας το $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = a$, προκύπτει $α^3 + 2α - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$(α - 1)(α^2 + α + 3) = 0 \Leftrightarrow$ ……………$\Leftrightarrow α = 1$ αφού $α^2 + α + 3 > 0$ για κάθε $α \in \mathbb{R}$

Β2. Θέτουμε για x ≠ 0, g(x) = $\dfrac{f(x)}{x}$, οπότε f(x) = x·g(x) ……………….. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Β3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(¦«x)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(¦«x)}{¦«x} \cdot \dfrac{¦«x}{x} = 1$ και

$\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x^2 - 4)}{f(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \dfrac{f(x^2 - 4)(x^2 - 4)}{(x^2 - 4) f(x - 2)} =$

$\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)} \cdot \lim_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{f(x - 2)} = 1 \cdot 4 = 4$