ΔΙΩΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΡΕΤΡΙΑΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:………………………………………………………………………….

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f: Α → R , g: B → R. Πως ορίζεται η συνάρτηση $f\circ g$;

Μονάδες 7

Β. Πως ορίζεται η ισότητα δύο συναρτήσεων; **Μονάδες 6**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος,*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση f: A → R είναι γνησίως αύξουσα στο Α, αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_2) > f(x_1)$.

β. Αν η συνάρτηση f: A → R είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα στο R.

γ. Αν υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση της f: A → R, τότε ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε

$x \in A$.

δ. Αν κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα x’x τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο, τότε η f είναι «1-1».

ε. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε η συνάρτηση

$g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

στ. η γραφική παράσταση $|f|$ αποτελείται μόνο από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x’x. **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{(a+1)x+a^2+1}{x-a}$ και $g(x) = \dfrac{(2a-1)x+3a-1}{x+a-4}$

Α. Να βρείτε το $α \in R$ ώστε να είναι f = g **Μονάδες 6**

Β. Έστω α = 2.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f\circ g$ **Μονάδες 6**

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} **Μονάδες 6**

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση h για την οποία ισχύει: $(f\circ h)(x) = 3 + \dfrac{11}{x}$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1, 0) και Β(-1, 2).

Α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται **Μονάδες 6**

Β) Να λύσετε την εξίσωση:

$f(f^{-1}(e^x+1) + 2) = 0$ **Μονάδες 6**

Γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R. **Μονάδες 6**

Δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$f^{-1}(f(\ln(x+1)) + 2) < -1$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4^o

Έστω $f: R \to R$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) - x = 1$, (1) για κάθε $x \in R$.

Α. Να λύσετε την εξίσωση $e^x + x = 1$, $x \in R$ **Μονάδες 3**

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} **Μονάδες 3+2+2**

Γ. Να βρείτε το f(0) **Μονάδες 4**

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-2} \prec 3 - x^2$ **Μονάδες 4**

Ε. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_f^{-1} **Μονάδες 4**

ΣΤ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R **Μονάδες 3**

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1^o:

Α. Θεωρία, **Β.** Θεωρία

Γ. α. Σ , β. Λ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Σ, στ. Λ

Θέμα 2^o:

Α) α = 2

Β) α) $f(x) = g(x) = \frac{3x+5}{x-2}$, $x \neq 2$

$(f\circ g)(x) = \frac{14x+5}{x+9}$, $x \in R - \{-9, 2\}$

β) $f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x-3}$, $x \in R - \{3\}$

γ) $h(x) = x + 2$, $x \neq 0$

Θέμα 3^o:

Α. Η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε και «1-1». Άρα η f αντιστρέφεται.

Β. Είναι f(1) = 0 και f(-1) = 2. Έτσι: $f(f^{-1}(e^x+1) + 2) = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(e^x+1) + 2) = f(1) \overset{f\ :1-1}{\Leftrightarrow}$

$f^{-1}(e^x+1) + 2 = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(e^x+1) = -1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(e^x+1)) = f(-1) \Leftrightarrow e^x+1 = 2 \Leftrightarrow e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Γ. Η f είναι γνησίως μονότονη και: $-1 < 1 \Rightarrow f(-1) > f(1)$, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο R.

Δ. $f^{-1}(f(\ln(x+1)) + 2) < -1 \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(f(\ln(x+1)) + 2)) > f(-1) \Leftrightarrow f(\ln(x+1)) + 2 > 2 \Leftrightarrow$

$f(\ln(x+1)) > 0 \Leftrightarrow f(\ln(x+1)) > f(1) \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} \ln(x+1) < 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) < \ln e \overset{h(x)=\ln x:\uparrow\ \text{στο}\ (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} x + 1 < e \Leftrightarrow$
$x < e - 1$

Επίσης x > - 1, οπότε $-1 < x < e - 1$.

Θέμα 4^o:

Α. x = 0 μοναδική ρίζα της $g(x) = e^x + x - 1 = 0$, αφού g(0) = 0 και η g(x) είναι γνησίως αύξουσα με ορισμό.

Β. Αφού $g(x) = e^x + x - 1$, $x \in R$, η (1) γίνεται $g(f(x)) = x$, $x \in R$, (2).

Έστω $x_1, x_2 \in R$. Είναι $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1) = g(f(x_2) \overset{(2)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$. Άρα η f είναι 1 – 1 οπότε αντιστρέφεται. Για το σύνολο τιμών της f θέτω $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, άρα η εξίσωση $e^{f(x)} + f(x) – x = 1$ γίνεται $e^y + y – x = 1 \Leftrightarrow x = e^y + y – 1$. Άρα η εξίσωση $f(x) = y$, $x \in R$, έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε τιμή του y, επομένως $f(A) = R$. Επίσης,

$f^{-1}(x) = e^x + x – 1$, $x \in R$.

Γ. Είναι $f(0) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f^{-1}(0) \overset{f^{-1}:1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$. (η f^{-1} είναι γν. αύξουσα με ορισμό, άρα 1-1)

$2^{ος}$ τρόπος: Ισχύει $g(f(x)) = x$, $x \in R$, οπότε για $x = 0$, είναι $g(f(0)) = 0 \Rightarrow g(f(0)) = g(0) \overset{g:1-1}{\Rightarrow}$

$f(0) = 0$

Δ. Βρίσκουμε $f^{-1} \uparrow R$. Είναι $e^{x^2-2} \prec 3 - x^2 \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow f^{-1}(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2 - 2) < f^{-1}(0) \overset{f^{-1}:\uparrow}{\Leftrightarrow}$ $x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

Ε. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f^{-1}(x) = f(x)$ (1). Επειδή $f^{-1} \uparrow$ R (από Γ ερώτημα), η (1) $\Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow$ $x = 0$. Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο το O(0, 0).

ΣΤ. Με απαγωγή σε άτοπο:

Έστω η f δεν είναι γν. αύξουσα. Αν $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε:
$e^{f(x_1)} + f(x_1) \geq e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$, άτοπο.

$2^{ος}$ τρόπος:

Από Β ερώτημα $g(f(x)) = x$, $x \in R$, (2)

Αν $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$ τότε $g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \overset{g:1-1}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γν. αύξουσα στο R.