Γ.Ε.Λ. ΕΡΕΤΡΙΑΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΣ: **ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ**
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2014-2015 ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 11-6-2015
ΤΑΞΗ: **Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ** ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυώνυμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$. **(Μονάδες 13)**

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ με $\rho,\ \omega>0$ έχει μέγιστο $^\circ$, ελάχιστο $-\rho$ και περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

β. Αν $\theta\in\mathbb{R}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\eta\mu x=\eta\mu\theta \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\theta,\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

γ. Αν $0<\alpha<1$, τότε η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

δ. Αν $0<x<\pi$, τότε $\eta\mu x>0$.

ε. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

στ. Ισχύει $10^{\log 5}=5$ **(Μονάδες 2x6=12)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+3x^2-3x-2$ με $x\in\mathbb{R}$

Β1. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ **(Μονάδες 10)**

Β2. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης. **(Μονάδες 8)**

Β3. Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$ **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x+1}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f **(Μονάδες 5)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια **(Μονάδες 5)**

Γ3. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες. **(Μονάδες 8)**

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 2 **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = k - \log(3 - x^2)$, $k\in R$.

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 5)**

Δ2. Να υπολογίσετε την τιμή του k ώστε $f(\sqrt{2})=\log 100$. **(Μονάδες 5)**

Δ3. Αν k = 2

α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=-\log\dfrac{1}{10}$ **(Μονάδες 7)**

β) Να λυθεί η ανίσωση: f(x) > 2 **(Μονάδες 8)**

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι παρακάτω απαντήσεις είναι ενδεικτικές. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Απόδειξη θεωρήματος σελ. 134.

Α2.
α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος
στ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$
Αφού ο διαιρέτης είναι x + 1 θα είναι ρ = – 1 για το σχήμα Horner

2	3	– 3	–2	ρ = – 1
	–2	–1	4	
2	1	–4	**υ =2**	

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι **υ = 2**
2ος τρόπος με διαίρεση πολυωνύμων.....
3ος τρόπος ….. $\upsilon = P(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 3(-1) - 2 = -2 + 3 + 3 - 2 = 2$

Β2.
Αφού ο διαιρέτης είναι x – 1 θα είναι ρ = 1 για το σχήμα Horner

2	3	– 3	–2	ρ = 1
	2	5	2	
2	5	2	**υ = 0**	

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι **υ = 0** και το πηλίκο είναι το
$\pi(x) = 2x^2 + 5x + 2$
Η ταυτότητα της Ευκλείδιας διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι $P(x) = (x-1)\cdot(2x^2 + 5x + 2)$

Β3.
Λύνω πρώτα την εξίσωση P(x) = 0 για να βρω τις ρίζες του P(x)
Από το προηγούμενο ερώτημα και την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:
$P(x) = \pi(x) \cdot \delta(x) + \upsilon$
$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x - 1) \cdot (2x^2 + 5x + 2)$
Άρα $P(x) = 0 \Leftrightarrow$
$(x - 1) \cdot (2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow$
$x - 1 = 0$ ή $2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$x = 1$ ή $x = -2$ ή $x = -\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = \frac{1-\pm^3\neg x}{\dagger\ll^2 x+1}$. Έστω D_f το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

πρέπει $\dagger\ll^2 x+1 \neq 0$ που ισχύει αφού $\dagger\ll^2 x \geq 0$ για κάθε $x \in R$

άρα $D_f = \{x \in R / \dagger\ll^2 x+1 \neq 0\} = R$

Γ2. Ισχύει $x \in D_f = R$ και $-x \in D_f$ και $f(-x) = \frac{1-\pm^3\neg(-x)}{\dagger\ll^2(-x)+1} = \frac{1-\pm^3\neg x}{(-\dagger\ll x)^2+1} = \frac{1-\pm^3\neg x}{\dagger\ll^2 x+1} = f(x)$

Άρα η f είναι άρτια

Γ3. Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x, λύνω καταρχήν την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\pm^3\neg x}{\dagger\ll^2 x+1} = 0 \Leftrightarrow 1-\pm^3\neg x = 0 \Leftrightarrow \pm^3\neg x = 1 \Leftrightarrow$

$\pm^3\neg x = \pm^3\neg 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, $k \in R$, οπότε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία $(2k\pi, 0)$, $k \in Z$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y, βρίσκω το f(0). Έχω $f(0) = \frac{1-\pm^3\neg 0}{\dagger\ll^2 0+1} = \frac{1-1}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$, άρα το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το (0, 0).

Γ4. Για $x \in R$, $f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1-\pm^3\neg x}{\dagger\ll^2 x+1} = 2 \Leftrightarrow 2(\dagger\ll^2 x+1) = 1-\pm^3\neg x \Leftrightarrow 2(1-\pm^3\neg^2 x+1) = 1-\pm^3\neg x$

$\Leftrightarrow 4 - 2\pm^3\neg^2 x = 1-\pm^3\neg x \Leftrightarrow 2\pm^3\neg^2 x - \pm^3\neg x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1\pm 5}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{2} > 1$, αδύνατη

ή $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \pi$, $k \in Z \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in Z$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = k - \log(3-x^2)$, $k \in R$

Έστω D_f το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Πρέπει $3-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 3$

$\Leftrightarrow |x| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, άρα $D_f = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Δ2. $f(\sqrt{2}) = \log 100 \Leftrightarrow k - \log(3-(\sqrt{2})^2) = \log 100 \Leftrightarrow k - \log 1 = \log 10^2 \Leftrightarrow$

$k = 2$

Δ3.

α) Αφού ζητάμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = -\log\frac{1}{10}$ σημαίνει καταρχήν να λύσω την εξίσωση $f(x) = -\log\frac{1}{10}$, για να βρω τις τετμημένες των κοινών σημείων.

Για $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

$f(x) = -\log\frac{1}{10} \Leftrightarrow 2 - \log(3-x^2) = -\log 10^{-1} \Leftrightarrow 2 - \log(3-x^2) = 1 \Leftrightarrow \log(3-x^2) = 1 \Leftrightarrow$

$\log(3-x^2) = \log 10 \Leftrightarrow 3-x^2 = 10$ αδύνατη. Άρα δεν υπάρχουν κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = -\log\frac{1}{10}$

β) για $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (1)

$f(x) > 2 \Leftrightarrow 2 - \log(3-x^2) > 2 \Leftrightarrow -\log(3-x^2) > 0 \Leftrightarrow \log(3-x^2) < 0 \Leftrightarrow$

$\log(3-x^2) < \log 1 \Leftrightarrow 3-x^2 < 1$, αφού η φ(x) = logx είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
οπότε $3-x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow |x| \succ \sqrt{2} \Leftrightarrow x \prec -\sqrt{2}$ ή $x \succ \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ (2)
Τελικά μετά από συναλήθευση των (1), (2) προκύπτει
$x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$