ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ
21/5/2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $|\alpha| \geq 0$. **Μονάδες (02)**

β) Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Αν $\alpha\gamma < 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις άνισες στο $\Re$. **Μονάδες (02)**

γ) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$. **Μονάδες (02)**

δ) Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε το άθροισμα των ριζών είναι $S = x_1 + x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$. **Μονάδες (02)**

ε) Η εξίσωση $|x+2| + 5 = 0$, είναι αδύνατη. **Μονάδες (02)**

στ) Αν το σημείο Μ(2, 6) ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + \kappa$, τότε ισχύει $\kappa = -2$. **Μονάδες (02)**

ι) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4$, τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία (–2, 0) και (2, 0), ενώ δεν τέμνει τον άξονα y΄y. **Μονάδες (02)**

Α2. Να αποδείξετε ότι για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει:

$|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ **Μονάδες (11)**

ΘΕΜΑ Β

Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνεται $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ και $P(A \cap B) = 0{,}15$. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Β1. $P(A \cup B)$ **Μονάδες (8)**

Β2. $P(A')$ **Μονάδες (9)**

Β3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A. **Μονάδες (8)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$ **Μονάδες (10)**

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $|x-3| + |x^2 - 10x + 21|$, με $x \in IR$.

i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: f(x) = $-x^2 + 11x - 24$ **Μονάδες (8)**

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $f(|x|) = 6$.

Μονάδες (7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in IR$ και $\lambda \neq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) ισχύει $\Delta = -3\lambda^2 + 2\lambda + 1$. **Μονάδες (7)**

Δ2. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. **Μονάδες (8)**

Δ3. Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1):

i) να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in IR$, $\lambda \neq 0$, για την οποία ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 4$.

ii) να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $A = x_1^2 x_2 + (\lambda - 1)x_1 + 4 - \lambda + (\lambda - 1)x_2 + x_1 x_2^2$ είναι ανεξάρτητη του λ. **Μονάδες (5+5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

ΛΥΣΕΙΣ

Οι παρακάτω λύσεις είναι ενδεικτικές. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

στ) Λάθος

ι) Λάθος

Α2. θεωρία σελ. 38. Η απόδειξη 1.

ΘΕΜΑ Β

$P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,15$

Β1. $P(A \cup B)$ = P(A) +P(B) – P(A $\cap$ B) = 0,75

Β2. $P(A')$ = 1 - P(A) = 0,6

Β3. Η πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α είναι η P(A-B) = P(A) – P(A $\cap$ B) = 0,35

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x^2 - 10x + 21 < 0 \Leftrightarrow$ …….ρίζες της εξίσωσης οι 3 και 7………μέσω πίνακα προσήμων……. $x^2 - 10x + 21 < 0 \Leftrightarrow 3 < x < 7$

Γ2

i) f(x) = $|x-3| + |x^2 - 10x + 21|$

Για $3 < x < 7$ είναι x – 3 > 0 και $x^2 - 10x + 21 < 0$.

Άρα f(x) = $|x-3| + |x^2 - 10x + 21|$ = x – 3 – x^2 + 10x – 21 $\Leftrightarrow$ f(x) = – x^2 + 11x – 24

ii) f($|x|$) = 6 $\Leftrightarrow$ – $|x|^2$ + 11$|x|$ – 24 = 6 $\Leftrightarrow$ $|x|^2$ – 11$|x|$ + 30 = 0 $\Leftrightarrow$ $|x|$ = 5 ή $|x|$ = 6 $\Leftrightarrow$ x = ± 5 ή x = ± 6. Δεκτές οι x = 5 ή x = 6, αφού $3 < x < 7$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δ = $[-(\lambda + 1)]^2$- 4λλ = λ^2 + 2λ + 1 -4λ^2 = -3λ^2 + 2λ + 1

Δ2. Πρέπει Δ > 0 $\Leftrightarrow$ -3λ^2 + 2λ + 1 > 0 $\Leftrightarrow$ ………. $\Leftrightarrow$ λ < -1/3 ή λ > 1

Δ3. i) $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 4 \Leftrightarrow 1 - 2\frac{\lambda+1}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ….λ = - 2

ii) $A = x_1^2 x_2 + (\lambda - 1)x_1 + 4 - \lambda + (\lambda - 1)x_2 + x_1 x_2^2 = x_1x_2(x_1+x_2) + (\lambda - 1)(x_1+x_2) + 4 - \lambda =$

$= (x_1+x_2)(x_1x_2 + \lambda - 1) + 4 - \lambda = \frac{\lambda+1}{\lambda}(1 + \lambda - 1) + 4 - \lambda = \lambda + 1 + 4 - \lambda = 5$, ανεξάρτητη του λ.