

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Πρόσημο τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

ΣΕΝΑΡΙΟ

Γνωστική περιοχή:

Α΄ Λυκείου

Θέμα:

Το προτεινόμενο θέμα περιλαμβάνει την επαναδιαπραγμάτευση των βασικής έννοιας του πρόσημου τριωνύμου, την γραφική του αναπαράσταση και των σχετικών με αυτές εννοιών σε ένα καινούργιο περιβάλλον δυναμικής μεταβολής.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο θα υλοποιηθεί με το λογισμικό Geogebra.

Σκεπτικό

Βασική ιδέα:

Σκοπός αυτής της δραστηριότητας είναι η αναζήτηση εναλλακτικών προσεγγίσεων στη γραφική παρουσίαση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και της παραβολής.

Με τον κλασικό τρόπο διδασκαλίας οι μαθητές είναι δύσκολο να κατανοήσουν τις μετατοπίσεις που χρειάζονται για να προκύψει η γραφική παράσταση του τριωνύμου και πως εξαρτάται αυτή από τις μεταβολές των συντελεστών α , β και γ .

Με το προτεινόμενο σενάριο θα βρουν τις απαντήσεις οι ίδιοι με δυναμικό τρόπο με τη βοήθεια του λογισμικού, οπτικοποιώντας τις μετατοπίσεις που παρουσιάζονται και διαπιστώνοντας μόνοι τους τις ιδιότητες της γραμμικής εξίσωσης και του τριωνύμου.

Προστιθέμενη αξία:

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο αποτελεί καινοτομία στο παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών και φιλοδοξεί να συμβάλει στη βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους. Η εισαγωγή της τεχνολογίας στη μαθησιακή διαδικασία μετασχηματίζει και τις διδακτικές πρακτικές και τα ίδια τα μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο. Στις παραδοσιακές διδασκαλίες τα μαθηματικά αντικείμενα αναπαρίστανται με στατικό τρόπο σε χαρτί, στον πίνακα, ή σε διαφάνειες. Αντίθετα, κατασκευάζοντας ένα μαθηματικό αντικείμενο στην οθόνη του υπολογιστή, το σύρσιμο του αντικειμένου, είτε απευθείας, είτε μέσω ενός μεταβολέα, δημιουργεί ένα φαινόμενο το οποίο εξελίσσεται με βάση την κίνηση του αντικειμένου. Κατά συνέπεια ο μαθητής αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά αντικείμενα με δυναμικό τρόπο, δηλαδή ως γεννήτορες μαθηματικών φαινομένων, μέσα στα οποία μπορεί να αναζητήσει σχέσεις μεγεθών. Με τη χρήση του δυναμικού λογισμικού γίνεται πολύ γρήγορα η διερεύνηση για την ύπαρξη ή όχι λύσης αλλά και ο προσδιορισμός των λύσεων.

Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να βοηθήσει τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά αποτελούν αντικείμενο διερεύνησης (δυνατότητες διερευνητικής μάθησης) και να καταλήξουν στα δικά τους συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και επιστημονική τεκμηρίωση. Επιπλέον, η δυνατότητα κίνησης των αντικειμένων δίνει την ευκαιρία στο διδάσκοντα να σχεδιάσει ανοικτές καταστάσεις προβλήματος οι οποίες επιτρέπουν την διατύπωση εικασιών και τον έλεγχό τους.

Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας αναμένεται να συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

Ο εκπαιδευτικός που θα επιλέξει να διδάξει βασικές έννοιες των Μαθηματικών στο πλαίσιο αυτού του σεναρίου απαιτείται από παραδοσιακός καθηγητής μετωπικών διδασκαλιών να γίνει συνεργάτης των μαθητών του, καθοδηγητής της έρευνας και της επιστημονικής εγκυρότητας των συμπερασμάτων τους αλλά και ερευνητής ο ίδιος.

Για την εφαρμογή μεθόδων διδασκαλίας με την βοήθεια της Ψηφιακής Τεχνολογίας απαιτείται απ' όλη τη σχολική κοινότητα μια ευρύτερη αποδοχή της αλλαγής των ρόλων των μαθητών και των εκπαιδευτικών, ώστε οι μαθητές να ενθαρρύνονται σε κάθε προσπάθεια χρήσης των τεχνολογικών μέσων στη μάθηση και στη διδασκαλία.

Πλαίσιο εφαρμογής

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Α΄ Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 3 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης

Το σενάριο θα διεξαχθεί με την επιλογή του βιντεοπροβολέα.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Τετράδιο για να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους.

Το σχολικό βιβλίο για να παρακολουθούν και παράλληλα να ανατρέχουν σε αυτό για τις ήδη διδαγμένες έννοιες.

Φύλλα εργασίας τα οποία θα δοθούν για όλες τις δραστηριότητες με στόχο την καθοδήγηση των μαθητών στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης:

Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες ανά τρείς η τέσσερις και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να επινοήσουν τρόπους αξιοποίησης των δυνατοτήτων του ψηφιακού εργαλείου. Επομένως, η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα.

Επιπλέον, θέτουν ελεύθερα τα δικά τους ερωτήματα σχετικά με το θέμα και απαντούν σε αυτά με την επίβλεψη του εκπαιδευτικού, ο οποίος ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών του, συνεργάζεται μαζί τους, τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους, και τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Στόχοι:

Για τον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της Διακρίνουσας (Δ) με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν $\Delta < 0$, θεωρούν ότι το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές).

Τα παραπάνω προβλήματα συχνά αντιμετωπίζονται με διάφορα τεχνάσματα με τα σύμβολα « + » ή « - », ώστε να προσδιορίσουν οι μαθητές το πρόσημο του τριωνύμου και να επιλύσουν ανισώσεις 2^{ου} βαθμού. Τέτοιες προσεγγίσεις δεν συνδέονται με την κατανόηση του πότε το τριώνυμο παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές.

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο την μέσω πειραματισμού σύνδεση και κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα:

Να πειραματισθούν με τους μεταβολείς (δρομείς) των α , β , γ . Είναι σημαντικό να καταγράψουν τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης όταν αλλάζει το α ή το β και το γ .

Να συνδέσουν τις μεταβολές των συντελεστών α , β , γ με τους μετασχηματισμούς της γραφικής παράστασης της f (παραβολής) και να μπορούν να συνδέουν την αλλαγή του προσήμου των τιμών του τριωνύμου, με το πρόσημο της διακρίνουσας, το πρόσημο του α και την γραφική παράσταση.

Τα παραπάνω αφορούν τους γνωστικούς στόχους.

Οι κοινωνικοί στόχοι είναι να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας, να συζητούν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώνουν τα συμπεράσματά τους, να διατυπώνουν κανόνες, να καταχωρούν τα δεδομένα τους, να κατασκευάζουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη και να παρουσιάζουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.

Να μάθουν να επικοινωνούν εποικοδομητικά με τα άλλα μέλη της ομάδας, με όλους τους συμμαθητές τους και με τον εκπαιδευτικό.

Η υλοποίηση του σεναρίου θα στηριχθεί σε φύλλα εργασίας

1^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- 1) Μετακινήστε τα σημεία α , β και γ στις γραμμές κύλισης, ώστε να δημιουργήσετε τριώνυμο με Διακρίνουσα $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ και $\Delta < 0$. Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ σε σχέση με τον άξονα $x'x$, όταν $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ και $\Delta < 0$ αντίστοιχα.

Διαπίστωση

$\Delta > 0$:

$\Delta = 0$:

$\Delta < 0$:

- 2) Παρατηρήστε τι αντιπροσωπεύουν στο σχήμα οι τιμές των ριζών όταν υπάρχουν και διατυπώστε το σχετικό συμπέρασμα

Διαπίστωση

.....

.....

- 3) Να μετακινήσετε τα σημεία α , β και γ στις γραμμές κύλισης, για να αλλάξετε το τριώνυμο και να φτιάξετε τα προτεινόμενα τριώνυμα για μελέτη: x^2+6x-7 , x^2-2x+1 , $x^2-2x+12$,

Για καθένα από τα παραπάνω τριώνυμα να **μετακινήσετε το σημείο M** επάνω στη γραφική παράσταση της f και να συγκρίνετε το πρόσημο της τεταγμένης του σημείου M ($f(x_M)$) με το θετικό πρόσημο του α , ($\alpha = 1 > 0$), όταν $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ και $\Delta < 0$ αντίστοιχα. Συμπληρώστε τα παρακάτω τοποθετώντας τις ρίζες x_1 , x_2 στη γραμμή με το x και τα κατάλληλο πρόσημο στη δεύτερη γραμμή.

$\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = 64 > 0$

| | | | | |
|-------------------|-----------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -7 | 1 | $+\infty$ |
| $f(x) = x^2+6x-7$ | | | | |

$\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = 0$

| | | | |
|-------------------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $f(x) = x^2-2x+1$ | | | |

$\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = -4 < 0$

| | | |
|--------------------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x) = x^2-2x+12$ | | |

4) Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες για το πρόσημο τριωνύμου και να διατυπώσετε το εξαγόμενο συμπέρασμα.

$\alpha > 0$ και $\Delta > 0$

| | | | | |
|--------|-----------|-------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | | | | |

$\alpha > 0$ και $\Delta = 0$

| | | | |
|--------|-----------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | x_0 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | | | |

$\alpha > 0$ και $\Delta < 0$

| | | |
|--------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | | |

Διαπίστωση

.....

Εργασία για το σπίτι

Ασκήσεις 3, 6, 7 Α΄ Ομάδας σχολικού βιβλίου Σελίδες 112, 113

2° ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1) Να μετακινήσετε τα σημεία α , β και γ στις γραμμές κύλισης, για να αλλάξετε το τριώνυμο και να φτιάξετε τα προτεινόμενα τριώνυμα για μελέτη: $-x^2+8x+9$, $-x^2+4x-4$, $-x^2+4x-10$,

2) Να μετακινήσετε το σημείο M επάνω στη γραφική παράσταση της f και συγκρίνετε το πρόσημο της τεταγμένης του σημείου M ($f(x_M)$) με το αρνητικό πρόσημο του α , ($\alpha = -1 < 0$) όταν $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ και $\Delta < 0$ αντίστοιχα.

3) Συμπληρώστε τους παρακάτω πίνακες με τις ρίζες, αν υπάρχουν, και το κατάλληλο πρόσημο των τριωνύμων που διαπιστώνετε από τις μετακινήσεις του σημείου M.

$\alpha < 0$ και $\Delta \dots 0$

| | | | | |
|--------------------|-----------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 9 | $+\infty$ |
| $f(x) = -x^2+8x+9$ | | | | |

$\alpha < 0$ και $\Delta \dots 0$

| | | | |
|--------------------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $f(x) = -x^2+4x-4$ | | | |

$\alpha < 0$ και $\Delta \dots 0$

| | | |
|---------------------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x) = -x^2+4x-10$ | | |

3) Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες για το πρόσημο τριωνύμου και να διατυπώσετε το εξαγόμενο συμπέρασμα.

$\alpha < 0$ και $\Delta > 0$

| | | | | |
|--------|-----------|-------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | | | | |

$\alpha < 0$ και $\Delta = 0$

| | | | |
|--------|-----------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | x_0 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | | | |

$\alpha < 0$ και $\Delta < 0$

| | | |
|--------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | | |

Διαπίστωση

.....
.....

Εργασία για το σπίτι

Ασκήσεις 4, 8, 9, 10 Α΄ Ομάδας σχολικού βιβλίου Σελίδες 112, 113

3^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- 1) Να μετακινήσετε τα σημεία α , β και γ στις γραμμές κύλισης, για να αλλάξετε το τριώνυμο και να φτιάξετε τα προτεινόμενα ελλειπή τριώνυμα για μελέτη: $2x^2$, $-x^2$, x^2-9 , $16-x^2$, $5x-x^2$, x^2+10x .
- 2) Να μετακινήσετε το σημείο M επάνω στη γραφική παράσταση της f και να συγκρίνετε το πρόσημο της τεταγμένης του σημείου M ($f(x_M)$) με το πρόσημο του α , κάθε φορά, για τις παραπάνω ελλειπείς μορφές τριωνύμων αντίστοιχα.
- 3) Συμπληρώστε τους παρακάτω πίνακες με τις ρίζες αν υπάρχουν και το κατάλληλο πρόσημο των τριωνύμων που διαπιστώνετε από τις μετακινήσεις του σημείου M.

$$\alpha > 0 \text{ και } \beta = 0, \gamma = 0 \quad \Delta = 0$$

| | | | |
|---------------|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x) = 2x^2$ | | | |

$$\alpha < 0 \text{ και } \beta = 0, \gamma = 0 \quad \Delta = 0$$

| | | | |
|---------------|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x) = -x^2$ | | | |

$$\alpha > 0 \text{ και } \beta = 0 \quad \Delta \dots 0$$

| | | | | |
|----------------|-----------|----|---|-----------|
| x | $-\infty$ | -3 | 3 | $+\infty$ |
| $f(x) = x^2-9$ | | | | |

$$\alpha < 0 \text{ και } \beta = 0 \quad \Delta \dots 0$$

| | | | | |
|-----------------|-----------|----|---|-----------|
| x | $-\infty$ | -4 | 4 | $+\infty$ |
| $f(x) = 16-x^2$ | | | | |

$$\alpha < 0 \text{ και } \gamma = 0 \quad \Delta \dots 0$$

| | | | | |
|-----------------|-----------|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 5 | $+\infty$ |
| $f(x) = 5x-x^2$ | | | | |

$$\alpha > 0 \text{ και } \gamma = 0 \quad \Delta \dots 0$$

| | | | | |
|------------------|-----------|-----|---|-----------|
| x | $-\infty$ | -10 | 0 | $+\infty$ |
| $f(x) = x^2+10x$ | | | | |

- 4) Διατυπώστε το εξαγόμενο συμπέρασμα για το πρόσημο τριωνύμου

Διαπίστωση

.....
.....

Εργασία για το σπίτι

Άσκηση 5, Α΄ Ομάδας και 4, 5, 6 Β΄ Ομάδας σχολικού βιβλίου
Σελίδες 113, 114.