ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:……………………………………………………………….
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ………………………………………………………………………….

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$. **Μονάδες 15**

Α2. Να γράψετε στην κόλλα σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x) = x^3 + ημx$, όπου x πραγματικός

$f_2(x) = \ln x + \sqrt{3}$, όπου x>0

$f_3(x) = x\cdot e^x$, όπου x πραγματικός

$f_4(x) = x + \ln 2$ όπου x πραγματικός.

Μονάδες 12

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f΄(x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Μονάδες 3**

β. Ισχύει $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. **Μονάδες 3**

γ. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1. **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **Μονάδες 8**

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. **Μονάδες 8**

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f. **Μονάδες 7**

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία y = 2x + 5. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = α + β\sqrt{x}$, για κάθε x>0 με α, $β \in R$.

1) Να βρείτε τις τιμές α, $β\in R$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις f(4)=5 και $f΄(9)=\dfrac{1}{3}$ **Μονάδες 7**

2) Για α = 1 και β = 2, να βρείτε:

α) το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{f(x)-3}$ **Μονάδες 12**

β) Το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο Α(3,1). **Μονάδες 12**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ 2η ομάδα
ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ -ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΟ 1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:……………………………………………………………………
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ…………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x) = c είναι ίση με 0. **Μονάδες 15**

Α2. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

1. $f_1(x) = x + 1$

2. $f_2(x) = \dfrac{x}{x+2}$, όπου x πραγματικός με $x \neq -2$

3. $f_3(x) = 2 + \ell n x$, όπου $x > 0$

4. $f_4(x) = \sqrt{x^2+3}$ όπου x πραγματικός. **Μονάδες 12**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Α, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το Α **Μονάδες 3**

β) Ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0}$ (συνx) = συνx_0 **Μονάδες 3**

γ) Αν $x>0$, τότε $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x). **Μονάδες 8**

β) Να βρείτε τα: $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **Μονάδες 15**

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Γ

Η θέση ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 + \kappa t^2 + \lambda t$, όπου $t \in [0,10]$ κ, $\lambda \in$ IR, το t μετριέται σε sec και το x σε m.

1) Αν τη χρονική στιγμή t = 1 sec η ταχύτητα είναι υ(1) = 9m/s και η επιτάχυνση α(1) = - 12 m/s^2, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ, λ. **Μονάδες 8**

Για κ = - 9 και λ = 24, να βρείτε:

2) Πότε το σώμα είναι ακίνητο; **Μονάδες 3**

3) Τα χρονικά διαστήματα στα οποία το σώμα κινείται προς τη θετική ή την αρνητική κατεύθυνση. **Μονάδες 8**

4) Ποιο είναι το ολικό διάστημα το οποίο διήνυσε το σημείο στα πρώτα 10 δευτερόλεπτα της κίνησής του; **Μονάδες 6**

5) Ποια είναι η μετατόπισή του από την αρχική του θέση; **Μονάδες 6**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:…………………………………………………………………….
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ……………………………………………………………………………….

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = 2x$. **Μονάδες 15**

Α2. Να γράψετε στην κόλλα σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x)=e^x$ όπου x πραγματικός.

$f_2(x)= \frac{ημx}{x}$ όπου $x \neq 0$.

$f_3(x)= (x - 1)^2$ όπου x πραγματικός.

$f_4(x)=$ συν$(2x+3)$ **Μονάδες 12**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ **Μονάδες 3**

β) Για κάθε x>0 ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **Μονάδες 3**

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $υ(t_0)=f'(t_0)$ **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = x - 3$, όπου $x \in IR$.

α) Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$. **Μονάδες 12**

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$. **Μονάδες 8**

γ) Αν $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων f(x) και g(x) αντίστοιχα, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = 3f'(200)+819g'(-1)$ **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x^3-4x^2+3x-3$ και $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, αν\ x \neq 1 \\ a+6, αν\ x = 1 \end{cases}$

1) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y'y και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο αυτό. **Μονάδες 8**

2) Να βρείτε το $α \in IR$, ώστε η g να είναι συνεχής στο $x_o = 1$. **Μονάδες 8**

Για α =1, :

3) να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο x = 1 και να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της g στο $x_o = 1$. **Μονάδες 7**

4) Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της g που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{8}x + 2$.

Μονάδες 9

ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ -ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΟ $1^{ο}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:...

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ...

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f(x)=x είναι f΄ (x)=1. **Μονάδες 15**

Α2. Να γράψετε στην κόλλα σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x)= x\cdot e^x$ όπου x πραγματικός.

$f_2(x)=\dfrac{1}{x}$ όπου $x\neq 0$.

$f_3(x)=ημ3x + συνx$ όπου x πραγματικός.

$f_4(x)= 2\sqrt{x}+\ln 2$, $x>0$ **Μονάδες 12**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h\in R$, $h\neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

β) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2\in Δ$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

γ) Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 3x3 =9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2004$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο f' της συνάρτησης f. **Μονάδες 12**

β. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$ και δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty , 0)$ και $(3 , +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0 , 3)$ **Μονάδες 12**

γ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - x$ και $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x-1}, αν\ x\neq 1 \\ a-1, αν\ x=1 \end{cases}$

1) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'x και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τεμημένη x = 1. **Μονάδες 8**

2) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ και βρείτε την τιμή του α αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής

Για α = 3, **Μονάδες 8**

3) Να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της g στο σημείο (1, g(1)) **Μονάδες 7**

4) Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της g που είναι παράλληλη στην ευθεία y = 3x + 5

Μονάδες 9

Συνοπτικές λύσεις

1^{η} ομάδα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ.31

Α2. $f_1'(x) = 3x^2 + \sigma\upsilon\nu x$,

$f_2'(x) = 1/x$

$f_3'(x) = e^x + x\cdot e^x$,

$f_4'(x) = 1$

Α3. α.σωστό, β.λάθος, γ. σωστό .

ΘΕΜΑ Β

α) $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ **άρα** $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

γ) η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \left(\dfrac{2x}{x+1}\right)' =$

$\dfrac{(2x)'(x+1) - 2x(x+1)'}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{2}{(x+1)^2}$, όπου $x \in D_f$

δ) Αν Α $(x_o, f(x_o))$ το σημείο επαφής τότε: $f'(x_o) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x_o+1)^2} = 2$

$\Leftrightarrow (x_o+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_o = -2$ ή $x_o = 0$

Άρα τα σημεία επαφής είναι Α (0, f(0)) δηλαδή Α (0, 0) ή Α (-2, f(-2)) δηλαδή Α (-2, 4) με αντίστοιχες εφαπτόμενες y = 2x και y = 2x + 8

ΘΕΜΑ Γ

1) $f(x) = \alpha + \beta\sqrt{x}$,…. $f'(x) = \beta\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Από σχέσεις f(4)=5 και $f'(9)=\dfrac{1}{3}$ μετά από αντικατάσταση προκύπτουν α = 1 και β = 2.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{f(x)-3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}+1-3} = \sigma\upsilon\zeta\upsilon\gamma\acute{\eta}.... = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{2} = 2$

3) Έστω M(x, f(x)) σημείο της γραφ. Παράστασης της f. Η απόσταση του Μ από το Α(3,1) είναι

(ΑΜ) = …..= $\sqrt{x^2-2x+9}$

Αρκεί να αναζητήσουμε το ελάχιστο της ποσότητας d(x) = $x^2 - 2x + 9\ldots$

Μετά από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η d έχει ολικό ελάχιστο για x =1, οπότε προκύπτει το σημείο Μ(1, 3).

Συνοπτικές λύσεις

$2^η$ ομάδα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ.28

Α2. $f_1'(x) = 1$,

$f_2'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

$f_3'(x) = 1/x$,

$f_4'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Α3. α. λάθος, β. σωστό, γ. σωστό

ΘΕΜΑ Β

α) $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ άρα $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-10}{x-2} = 6$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \underset{x\to 2}{....παραγοντοποίησηαριθμητή....} = \lim\limits_{x\to 2}(x+5) = 7$

γ) προφανές από πίνακα μονοτονίας.

ΘΕΜΑ Γ

1) $υ(t) = x'(t) = (t^3 + κt^2 + λt)' = 3t^2 + 2κt + λ$ και $α(t) = x''(t) = 6t + 2κ$

Από τις δεδομένες συνθήκες προκύπτει κ = -4 και λ = 29

2) υ(t) = 0…..t = 2s ή t = 4s

3) κινείται προς τα δεξιά για $t \in [0,2) \cup (4,10]$ και προς τα αριστερά για $t \in (2,4)$

4) Sολ = 20 + 4 + 324 = 348 m

5) η τελική μετατόπιση είναι x(10) = 340 m

Συνοπτικές λύσεις
$3^{η}$ ομάδα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ.28-29

Α2. $f_1'(x) = e^x$,

$f_2'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$

$f_3'(x) = 2(x-1)$,

$f_4'(x) = -2\eta\mu(2x+3)$

Α3. α. σωστό, β. λάθος, γ. σωστό

ΘΕΜΑ Β

α) $\lim_{x\to 2} f(x) = 0, \lim_{x\to 2} g(x) = 0$

β) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = (0/0) = \pi\alpha\rho\alpha\gamma o\nu\tau o\pi o\acute{\iota}\eta\sigma\eta ..... = 1$

γ) $f'(x) = 2x - 5$ και $g'(x) = 1$ και προκύπτει $K = 3f'(200)+819g'(-1) = 1869$

ΘΕΜΑ Γ

1)Αφού f(0) = - 3, το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y'y θα είναι το

(0,-3)

2) f΄(0) = 3. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο αυτό θα είναι y-f(0) = f΄(0)(x-0) δηλαδή y = 3x – 3

3) Η g(x) μετά από αντικαταστάσεις και πράξεις γίνεται: $g(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, \alpha\nu\ x \neq 1 \\ a + 6, \alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$ για να είναι συνεχής η g στο x = 1 πρέπει και αρκεί $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$

Τελικά α = 1

4) ο τύπος της g γίνεται $g(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, \alpha\nu\ x \neq 1 \\ 7, \alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$

Θα βρούμε το g΄(1) από ορισμό παραγώγου. προκύπτει τελικά g΄(1)= 8 που είναι και ο ρυθμός μεταβολής της g για x = 1.

5) Αν $(x_o, g(x_o))$ το σημείο επαφής …. $g'(x_o) = 8$ δηλαδή $8x_o = 8$, άρα $x_o = 1$.

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο (1, 7) θα είναι y - g(1) = g΄(1)(x-1) δηλαδή y = 8x – 1

Συνοπτικές λύσεις
4^{η} ομάδα
ΘΕΜΑ Α
Α1. Απόδειξη σελ.28

Α2. $f_1'(x) = e^x + xe^x$,
$f_2'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f_3'(x) = 3συνx - ημx$,
$f_4'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
Α3. α. σωστό, β. λάθος, γ. σωστό

ΘΕΜΑ Β
α) $f'(x) = 6x^2 – 18x$
β) $f'(x) = 0$ …..$x = 0$ ή $x = 3$ πίνακα μεταβολών κ.τ.λ.
γ) $f(0) = 2004$ τοπικό μέγιστο ,$f(3) =$ … τοπικό ελάχιστο

ΘΕΜΑ Γ
1)Αφού $f(x) = 0$….$x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'x θα είναι τα (0,0), (-1,0) και (1,0).

Είναι $f'(x) = 3x^2 - 1$. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο αυτό θα είναι $y-f(1) = f'(1)(x-1)$ δηλαδή

$y - 0 = 2(x-1)$..$y = 2x - 2$

3) $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$. Η g(x) μετά από αντικαταστάσεις και πράξεις γίνεται: g(x) =

$\begin{cases} x^2 + x, αν\ x \neq 1 \\ a - 1, αν\ x = 1 \end{cases}$ για να είναι συνεχής η g στο x = 1 πρέπει και αρκεί $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$

Τελικά α = 3

4) ο τύπος της g γίνεται $g(x) = \begin{cases} x^2 + x, αν\ x \neq 1 \\ 2, αν\ x = 1 \end{cases}$

Θα βρούμε το $g'(1)$ από ορισμό παραγώγου. προκύπτει τελικά $g'(1)= 3$ που είναι και η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο (1,g(1)).

5) Αν $(x_o, g(x_o))$ το σημείο επαφής …. $g'(x_o) = 3$ δηλαδή $2x_o + 1 = 3$, άρα $x_o = 2$.

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο (2, 6) θα είναι $y - g(1) = g'(1)(x-1)$ δηλαδή $y = 3x - 1$

ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ-ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΟ $1^ο$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:…………………………………………………………….

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ……………………………………………………………………………

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$. **Μονάδες 15**

Α2. Να γράψετε στην κόλλα σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x) = x^3 + ημx$, όπου x πραγματικός

$f_2(x) = \ln x + \sqrt{3}$, όπου x>0

$f_3(x) = x\cdot e^x$, όπου x πραγματικός

$f_4(x) = x + \ln 2$ όπου x πραγματικός.

Μονάδες 12

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f΄(x) < 0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Μονάδες 3**

β. Ισχύει $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. **Μονάδες 3**

γ. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1. **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + αx - 7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2,\quad x\in R$$

α. Να δείξετε ότι α = 9 **Μονάδες 12**

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}$ **Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία y=−3x **Μονάδες 11**

ΘΕΜΑ Γ

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε ^oC) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $θ(t) = t - 4\sqrt{t} + α$, όπου $α\in\mathbb{R}$ και $t\in(0,24]$ ο χρόνος σε ώρες.

Β1. Να αποδείξετε ότι για $t\in(0,4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t\in(4,24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται. **Μονάδες 7**

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή του α, αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι -1^oC **Μονάδες 9**

Β3. Για α=3 να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι 0 ^oC. **Μονάδες 7**

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim_{t\to 4}\frac{θ'(t)}{t^2-16}$ **Μονάδες 9**

Συνοπτικές λύσεις
5η ομάδα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ.31

Α2. $f_1'(x) = 3x^2 + συνx$,

$f_2'(x) = 1/x$

$f_3'(x) = e^x + x \cdot e^x$,

$f_4'(x) = 1$

Α3. α. λάθος, β.λάθος, γ. σωστό

ΘΕΜΑ Β

α. $f(x) = x^3 - 6x^2 + αx - 7$

$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + αx - 7)' = 3x^2 - 12x + α$

$f''(x) = (3x^2 - 12x + α)' = 6x - 12$

$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + α + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow$

$12x - 24 + 3x^2 - 12x + α + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow α = 9$

β.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12x+9}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-4x+3)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-4x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-3)}{(x+1)} = -3$$

γ. Αν Α (x_o , $f(x_o)$) το σημείο επαφής τότε: $f'(x_o) = -3 \Leftrightarrow 3x_o^2 - 12x_0 + 9 = -3$

$\Leftrightarrow 3x_o^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow x_o^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_o = 2$

Άρα τα σημεία επαφής είναι Α (2, f(2)) δηλαδή Α (2, -5) με αντίστοιχη εφαπτόμενη y = - 3x + 1

ΘΕΜΑ Γ

Β1.: Μελετούμε τη μονοτονία της συνάρτησης $\theta(t)$.

Έχουμε $\theta'(t) = \left(t - 4\sqrt{t}\right)' = 1 - 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}}$, $t \in (0, 24]$

Επειδή $\theta'(t) < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} < 2 \Leftrightarrow t < 4$, η συνάρτηση θ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 4]$, επομένως η θερμοκρασία μειώνεται σε αυτό το διάστημα.

Επειδή $\theta'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 4$, η συνάρτηση θ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(4, 24]$, άρα η θερμοκρασία αυξάνεται σε αυτό το διάστημα.

Β2.: Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο $t_0 = 4$, με τιμή $\theta(t_0) = \theta(4) = \alpha - 4$.

Δίνεται ότι η ελάχιστη τιμή είναι -1 , άρα $\alpha - 4 = -1 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

Β3.: Έχουμε $\theta(t) = 0 \Leftrightarrow t - 4\sqrt{t} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t}^2 - 4\sqrt{t} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 1$ ή $\sqrt{t} = 3$.

Άρα η ελάχιστη θερμοκρασία παρουσιάζεται για $t = 1$ και για $t = 9$, δηλαδή τις ώρες 01 και 09.

Β4.: Είναι $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{\theta'(t)}{t^2-16}=\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}\left(t^2-16\right)}=\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{t-4}{\sqrt{t}\left(t-4\right)\left(t+4\right)\left(\sqrt{t}+2\right)}=\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{t}\left(t+4\right)\left(\sqrt{t}+2\right)}=\dfrac{1}{64}$