

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  με  $\left(\vec{a}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$  και  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ .

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα  $2\vec{a} + \vec{\beta}$  και  $k\vec{a} + \vec{\beta}$  είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του  $k$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $2\vec{a} + \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 7)

## ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ABΓ είναι:  $\overrightarrow{AB} = (-4, -6)$ ,  $\overrightarrow{AG} = (2, -8)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{AM}$ , όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο ABΓ επιπλέον ισχύει  $A(3,1)$ , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία  $A(1,2)$  και  $B(5,6)$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος  $\varepsilon$  του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  έχει εξίσωση την  $\psi = -\chi + 7$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  για τα οποία :  $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1: \chi - 2\psi - 8 = 0$ ,  $\varepsilon_2: 2\chi - 4\psi + 10 = 0$  και το σημείο  $A$  της  $\varepsilon_1$  που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $A$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon_1$

(Μονάδες 10)

γ) Αν  $B$  είναι το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\varepsilon_2$ , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του  $B$ .

(Μονάδες 10)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : \chi - 8\psi + 16 = 0$  και  $\varepsilon_2 : 2\chi + \psi + 15 = 0$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $M$ .

Αν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνουν τον άξονα  $\psi'\psi$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $M$ ,  $A$  και  $B$

(Μονάδες 10)

β) αν  $K$  είναι το μέσο του τμήματος  $AB$ , να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος  $\overline{MK}$

(Μονάδες 15)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 8\chi + \psi - 28 = 0$  και  $\varepsilon_2 : \chi - \psi + 1 = 0$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $M$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $M$  και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το  $M$  και είναι κάθετη στον άξονα  $\chi'\chi$ .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το  $M$  και έχουν συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  έχουν εξίσωση την:  $\lambda\chi - \psi - 3\lambda + 4 = 0$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : \chi - 3\psi + 5 = 0$  και  $\varepsilon_2 : 3\chi + \psi - 5 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής  $A$  των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A$  και την αρχή  $O$  των αξόνων.

(Μονάδες 7)



## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 3\chi + \psi + 3 = 0$  και  $\varepsilon_2 : \chi + 2\psi - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής  $A$  των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$

(Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία  $\varepsilon_1$  τέμνει τον άξονα  $\psi'\psi$  στο σημείο  $B$  και η ευθεία  $\varepsilon_2$  τέμνει τον άξονα  $\chi'\chi$  στο σημείο  $\Gamma$ , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $B$  και  $\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  έχει εξίσωση την  $3\chi - 4\psi - 12 = 0$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$  και  $\overrightarrow{AG} = (1, 6)$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$ , ώστε τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AG}$  να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για  $\kappa = 1$  να βρείτε το διάνυσμα  $\overrightarrow{BG}$ .

(Μονάδες 8)

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon_1$  που τέμνει τους άξονες  $\chi'\chi$  και  $\psi'\psi$  στα σημεία  $A(3,0)$  και  $B(0,6)$  αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_1$

(Μονάδες 8)

β) Αν  $\varepsilon_2$  είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην  $\varepsilon_1$ , τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_2$

(Μονάδες 9)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$

(Μονάδες 8)

## ΘΕΜΑ 2

Έστω  $M(3,5)$  το μέσο ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  με  $A(1,1)$ .

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου  $B$ .

(Μονάδες 6)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου  $K$  του άξονα  $x'x$  έτσι, ώστε να ισχύει

$$(KA) = (KB).$$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία ( $\epsilon$ ):  $y+x=1$  και το σημείο  $A(2,-4)$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το  $A$  και είναι κάθετη στην ( $\epsilon$ ).

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου  $A$  πάνω στην ευθεία ( $\epsilon$ ).

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημεία  $\Delta$  και  $E$  του επιπέδου τέτοια, ώστε  $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}$  και  $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}$

α) Να γράψετε το διάνυσμα  $\overrightarrow{\Delta E}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\overrightarrow{\Delta E}$  και  $\overrightarrow{B\Gamma}$  είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και  $E, Z$  σημεία τέτοια ώστε:  $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AG}$ .

α) Να γράψετε τα διανύσματα  $\overrightarrow{EZ}$  και  $\overrightarrow{ZB}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AD}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $B, Z$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$  και  $\overrightarrow{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$ , όπου  $\vec{i}$  και  $\vec{j}$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των  $\overline{AB}$  και  $\overline{BG}$ .

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)



#### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{OA} = (4, -2)$  και  $\overrightarrow{OB} = (1, 2)$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\overrightarrow{OA}$  και  $\overrightarrow{OB}$  είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν  $\Gamma(\alpha, \beta)$  είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι:  $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$  και  $\overrightarrow{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι:  $4\alpha + 3\beta = 10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα  $\overrightarrow{OG}$  και  $\overrightarrow{AB}$  είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\overline{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$ ,  $\overline{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$ , όπου  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq -2$ , και  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι  $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda)$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία το διάνυσμα  $\overline{AM}$  είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{a} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right)$

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$

(Μονάδες 10)

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 2\chi - \psi - 10\lambda + 16 = 0$  και  $\varepsilon_2 : 10\chi + \psi - 2\lambda - 4 = 0$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους  $M$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  το σημείο  $M$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon : 8\chi + \psi - 6 = 0$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες  $\chi'\chi$  και  $\psi'\psi$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\zeta$  που διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία  $AB$

(Μονάδες 5)

ii) αν  $K$  είναι τυχαίο σημείο της ευθείας  $\zeta$ , να αποδείξετε ότι  $(KAB) = \frac{9}{4}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: \chi - 4\psi - 7 = 0$  και τα σημεία  $A(-2, 4)$  και  $B(2, 6)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου  $M$  της ευθείας  $\varepsilon$  το οποίο ισαπέχει από τα σημεία  $A$  και  $B$

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $MAB$

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $K(\chi, \psi)$  για τα οποία ισχύει  $(KAB) = (MAB)$

ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις:  $\chi - 2\psi - 5 = 0$  και  $\chi - 2\psi + 25 = 0$

(Μονάδες 10)

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση:  $\chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2 - 6\chi - 6\psi + 8 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 7)

β) Αν  $\varepsilon_1: \chi + \psi - 2 = 0$  και  $\varepsilon_2: \chi + \psi - 4 = 0$ , να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης  $\varepsilon$  των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$

(Μονάδες 8)

γ) Αν  $A$  είναι σημείο της ευθείας  $\varepsilon_1$  με τεταγμένη το 2 και  $B$  σημείο της ευθείας  $\varepsilon_2$  με τεταγμένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A$  και  $B$

(Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων  $\Gamma$  και  $\Delta$  της ευθείας  $\varepsilon$  έτσι, ώστε το τετράπλευρο  $A\Gamma B\Delta$  να είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση  $x^2+y^2-2xy-3\lambda x+3\lambda y+2\lambda^2=0$ , με  $\lambda$  διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.

(Μονάδες 12)

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ .

(Μονάδες 13)

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 3\chi + \psi + 3 = 0$  και  $\varepsilon_2 : \chi + 2\psi - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής  $A$  των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$

(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία  $\varepsilon_1$  τέμνει τον άξονα  $\psi'\psi$  στο σημείο  $B$  και η ευθεία  $\varepsilon_2$  τέμνει τον άξονα  $\chi'\chi$  στο σημείο  $\Gamma$ , τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$

(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $K(\chi, \psi)$  για τα οποία ισχύει  $(KB\Gamma) = (AB\Gamma)$  ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

(Μονάδες 10)

#### ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  που είναι παράλληλο προς την ευθεία  $\varepsilon: \psi = \chi$ ,  
με  $A(\chi_1, \psi_1)$ ,  $B(\chi_2, \psi_2)$  και  $\chi_1 < \chi_2$

Αν το σημείο  $M(3,5)$  είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων  $A$  και  $B$  ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων  $A$  και  $B$ .

(Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι  $(OAB) = 4$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία  $K(\chi, \psi)$  για τα οποία ισχύει  $(KAB) = 2(OAB)$

ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις:  $\chi - \psi - 2 = 0$  και  $\chi - \psi + 6 = 0$

(Μονάδες 7)



#### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=1, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})=60^\circ \text{ και } \vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι:  $\kappa = -2$

(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$  είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και  $\phi \in [0, \pi]$  η μεταξύ τους γωνία.

Επίσης δίνεται η εξίσωση  $(\vec{a}\vec{b} + 12)x + (\vec{a}\vec{b} - 12)\psi - 5 = 0$  (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\phi \in [0, \pi]$ . (Μονάδες 3)

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα  $\psi'$ , να αποδείξετε ότι  $\vec{b} = 3\vec{a}$   
(Μονάδες 7)

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα  $\chi'\chi$ , να αποδείξετε ότι  $\vec{b} = -3\vec{a}$   
(Μονάδες 7)

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των  
αξόνων, να αποδείξετε ότι  $\vec{b} \perp \vec{a}$  (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες:  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$  και  $|\vec{u} + \vec{v}| = \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right|$

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  και  $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$ .

i) Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι:  $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία  $A(\lambda-1, 12-2\lambda)$ ,  $B(2, 2)$  και  $\Gamma(4,6)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος  $B\Gamma$ . (Μονάδες 7)
- β) Αν το σημείο  $A$  ισαπέχει από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ , να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ . (Μονάδες 8)
- γ) Για  $\lambda=4$ , να βρείτε σημείο  $\Delta$  ώστε το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: (2\lambda-1)x+y-5=0$ ,  $\varepsilon_2: (\lambda^2+3)x-y-15=0$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$  και το σημείο  $A(2,-1)$ .

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  οι ευθείες τέμνονται.

(Μονάδες 7)

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο  $A$ , να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 10)

γ) Έστω  $\lambda=2$  και  $B, \Gamma$  τα σημεία που οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνουν τον άξονα  $y'y$ . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon: 2\kappa\chi - (1 + \kappa)\psi + 1 - 3\kappa = 0$  και  $\zeta: (1 + 3\kappa)\chi + (\kappa - 1)\psi + 2 - 6\kappa = 0$ ,

όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $\kappa$ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $(\varepsilon)$  και  $(\zeta)$ .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία  $A\left(1, \frac{-3}{2}\right)$ ,  $B(2, -1)$  και  $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu-4}{2}\right)$ , όπου  $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overline{AB}$  και  $\overline{B\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$  το σημείο  $\Gamma$  ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του  $\mu$  έτσι, ώστε  $\mu \cdot \overline{B\Gamma} = -\overline{AB}$

(Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του  $\mu$  που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι  $(OB\Gamma) = 1$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 3)

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία  $A(3,4)$ ,  $B(5,7)$  και  $\Gamma(2\mu+1,3\mu-2)$ , όπου  $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$  και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του  $\mu$ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  δεν εξαρτάται από το  $\mu$ .

(Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του  $\mu$  το σημείο  $\Gamma$  ανήκει σε ευθεία  $\varepsilon$ , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του  $\mu$ ;

(Μονάδες 5)