

# ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

## ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> (Πανελλήνιες θετικής κατεύθυνσης Β' Λυκείου 1999)

Α. Έστω  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

Μονάδες 3

β) Αν τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα  $y'y$  και  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των  $\vec{a}, \vec{\beta}$  αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 5,5

γ) Αν τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  είναι μη μηδενικά και  $\theta$  είναι η γωνία των  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ , να

αποδείξετε ότι:  $\text{συν}\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Μονάδες 4

## Β.

α) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}_1 = (\lambda, \lambda - 1)$  και  $\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$  με  $\lambda \neq 0$ . Για ποια από τις παρακάτω τιμές του  $\lambda$  τα διανύσματα  $\vec{a}_1$  και  $\vec{\beta}_1$  είναι κάθετα;

Α.  $\lambda = 1$ ,

Β.  $\lambda = 3$ ,

Γ.  $\lambda = 2$ ,

Δ.  $\lambda = -2$ ,

Ε.  $\lambda = -3$ .

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u} = (1, -\sqrt{3})$ ,  $\vec{v} = (2, 2\sqrt{3})$  και  $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$ .

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α' με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β'. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της Στήλης Α' και δίπλα το γράμμα της Στήλης Β' που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

ΣΤΗΛΗ Α'

ΣΤΗΛΗ Β'

1. γωνία των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$

2. γωνία των  $\vec{u}$  και  $\vec{w}$

3. γωνία των  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$

Α.  $\pi/2$

Β.  $\pi/6$

Γ.  $\pi/4$

Δ.  $2\pi/3$

Ε.  $3\pi/4$

Ζ.  $\pi/3$

Μονάδες 6

## Θέμα 2<sup>ο</sup> (Πανελλήνιες Τεχνολογικής κατεύθυνσης κατεύθυνσης Β' Λυκείου 1999)

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (5\kappa, 3 - \lambda)$ ,  $\vec{\beta} = (4 - \lambda, 4\kappa)$ , όπου  $\kappa, \lambda$  πραγματικοί αριθμοί.

α) Για ποιες τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$  τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  είναι ίσα;

Μονάδες 8

β) Αν  $\lambda = 8$ , κ θετικός και τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι παράλληλα, τότε

το  $\kappa$  είναι ίσο με: Α. 4, Β. 1, Γ. 2, Δ. 3, Ε. 5

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 7

γ) Αν  $\kappa = 1$  και  $\lambda = 0$  να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (1, 4)$  σε δύο συνιστώσες παράλληλες στα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$

Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup> (Πανελλήνιες 1<sup>η</sup>Σ ΔΕΣΜΗΣ 1999)**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι  $|\overline{AB}| = 4$ ,  $|\overline{AG}| = 6$  και η γωνία των διανυσμάτων

$\overline{AB}$  και  $\overline{AG}$  είναι  $\frac{\pi}{3}$

Αν Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\overline{AM}$

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\overline{AM}$ ,  $\overline{AB}$ ,

Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος  $\overline{AB}$  πάνω στο διάνυσμα  $\overline{AM}$  είναι το διάνυσμα  $\frac{14}{9}\overline{AM}$

Μονάδες 15

**Θέμα 4<sup>ο</sup> (Πανελλήνιες θετικής κατεύθυνσης Β' Λυκείου 2000)**

Έστω  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$2\vec{a} + 3\vec{\beta} = (4, -2) \text{ και } \vec{a} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$$

α) Να δείξετε ότι  $\vec{a} = (-1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -2)$

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το κ ώστε τα διανύσματα  $\kappa\vec{a} + \vec{\beta}$  και  $2\vec{a} + 3\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.

Μονάδες 8

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (3, -1)$  σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a}$

Μονάδες 10

**Θέμα 5<sup>ο</sup> (Πανελλήνιες 1<sup>η</sup>Σ ΔΕΣΜΗΣ 1993)**

Τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  και  $\vec{\chi}$  του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση :

$$(\vec{a} \cdot \vec{\chi}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\chi}$$

α) Να αποδείξετε ότι:  $(\vec{\beta} \cdot \vec{a} - 1)(\vec{a} \cdot \vec{\chi}) = \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$

Μονάδες 12,5

β) Αν  $\vec{\beta} \cdot \vec{a} \neq 1$  να εκφράσετε το διάνυσμα  $\vec{\chi}$  ως συνάρτηση των  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$

Μονάδες 12,5

### ΘΕΜΑ 6ο - 2001

Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δίνεται ότι  $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$  και

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}. \text{ Έστω τα διανύσματα } \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}.$$

Να υπολογίσετε:

- α. το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  Μονάδες 5
- β. τα μέτρα  $|\vec{u}|, |\vec{v}|$  των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  Μονάδες 8
- γ. το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  Μονάδες 7
- δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ . Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ 7ο - 2004

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, 2), \vec{\beta} = (2, 3)$ .

Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ . Μονάδες 8

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το  $\vec{\gamma}$  με τον άξονα  $x'x$ . Μονάδες 8

Να βρείτε τον αριθμό  $k \in \mathbb{R}$ , ώστε το διάνυσμα  $\vec{v} = (k^2 - k, k)$  να είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha}$ . Μονάδες 9

### ΘΕΜΑ 8ο - Επαναληπτικές 2004

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $Oxy$  δίνονται τα σημεία  $A(2, 3)$  και  $B(3, -2)$ .

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $OAB$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Μονάδες 12

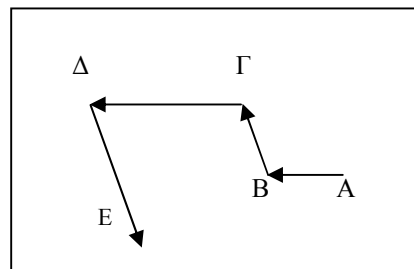
β. Να βρείτε σημείο  $M$  του άξονα  $x'x$ , ώστε τα σημεία  $A, M, B$  να είναι συνευθειακά. Μονάδες 13

### ΘΕΜΑ 9ο - Επαναληπτικές 1999

Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος

ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{AB} = \vec{\alpha}, \vec{BG} = \vec{\beta}, \vec{\Gamma\Delta} = 2\vec{\alpha}, \vec{\Delta E} = -2\vec{\beta}$$



α) Να εκφράσετε τα διανύσματα  $\vec{A\Gamma}$  και  $\vec{\Gamma E}$  συναρτήσει των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$

Μονάδες 10

β) Το διάνυσμα  $\vec{A\Gamma}$  είναι ίσο με :

A.  $3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  B.  $3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  Γ.  $3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$  Δ.  $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  E.  $2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$

Μονάδες 5

γ) Αν ισχύει  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$  τότε να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{A\Gamma}$  και  $\vec{\Gamma E}$  είναι μεταξύ τους κάθετα

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 10ο – Επαναληπτικές 2000**

A.1. Αν  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις συντεταγμένες των παρακάτω διανυσμάτων:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ , με  $\lambda, \mu$  πραγματικούς αριθμούς.

Μονάδες 3

A.2. Αν  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και  $(x, y)$  οι συντεταγμένες του μέσου  $M$  του  $AB$ , να αποδείξετε ότι:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Μονάδες 6,5

A.3. Αν  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες

του διανύσματος  $\vec{AB}$  και την απόσταση  $(AB)$  των σημείων  $A$  και  $B$ .

Μονάδες 3

B.1. Στη Στήλη  $A$  δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων του καρτεσιανού επιπέδου και στη Στήλη  $B$  οι συντεταγμένες του

διανύσματος  $\vec{AB}$  και η απόσταση  $(AB)$  των σημείων  $A$  και  $B$ . Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης  $A$  και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης  $B$  που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη $A$	Στήλη $B$
$\alpha$ . $A(1, 3)$ και $B(-2, 5)$	1. $\vec{AB} = (-3, 2)$ και $(AB) = \sqrt{15}$
$\beta$ . $A(2, -1)$ και $B(2, -3)$	2. $\vec{AB} = (0, -2)$ και $(AB) = 2$
$\gamma$ . $A(4, -3)$ και $B(6, -3)$	3. $\vec{AB} = (-3, 2)$ και $(AB) = \sqrt{13}$
	4. $\vec{AB} = (2, 0)$ και $(AB) = 2$

Μονάδες 6

B.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν  $K(x_1, 6)$  και  $L(-9, y_2)$  δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και  $(-5, 4)$  οι συντεταγμένες του μέσου  $M$  του  $KL$ , τότε:

A:  $x_1 = 1$  και  $y_2 = -2$                       B:  $x_1 = -1$  και  $y_2 = 2$

Γ:  $x_1 = -3$  και  $y_2 = 2$                       Δ:  $x_1 = 4$  και  $y_2 = 5$

E: κανένα από τα προηγούμενα

Μονάδες 6,5

## ΘΕΜΑ 11ο – Επαναληπτικές εσπερινά 2000

A. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ .

Για τις επόμενες δύο ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (A.α και A.β) και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Οι συντεταγμένες  $(x, y)$  του διανύσματος  $\vec{AB}$  με άκρα τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δίνονται από τις σχέσεις:

A.  $x = x_2 + x_1$  και  $y = y_2 + y_1$

B.  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Γ.  $x = x_2 - x_1$  και  $y = y_2 - y_1$

Δ.  $x = y_2 - x_1$  και  $y = y_1 - x_2$

Ε.  $x = x_1 - x_2$  και  $y = y_1 - y_2$

Μονάδες 6,5

β. Η απόσταση των σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δίνεται από τον τύπο:

A.  $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

B.  $(AB) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$

Γ.  $(AB) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Δ.  $(AB) = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$

Μονάδες 6

B. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία  $A(2, 3)$  και  $B(5, 7)$ .

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{AB}$ .

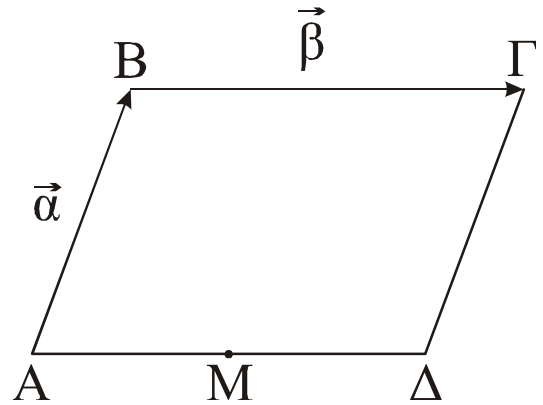
Μονάδες 6

β. Να βρείτε την απόσταση των σημείων  $A$  και  $B$ .

Μονάδες 6,5

**ΘΕΜΑ 12ο – Επαναληπτικές  
εσπερινά 2000**

Στο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος είναι  $\vec{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$ , ενώ το  $M$  είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $A\Delta$ .



Στη στήλη **I** του παρακάτω πίνακα δίνονται ορισμένα διανύσματα του σχήματος, ενώ στη στήλη **II** διάφορες εκφράσεις. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και, δίπλα ακριβώς, τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
A. $\vec{A\Gamma}$	1. $-\vec{\beta}$
B. $\vec{\Delta A}$	2. $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$
Γ. $\vec{MA}$	3. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
Δ. $\vec{MB}$	4. $\vec{\alpha} - \frac{\vec{\beta}}{2}$
E. $\vec{\Delta B}$	5. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
	6. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
	7. $-\frac{\vec{\beta}}{2}$

Μονάδες 25

**ΘΕΜΑ 13ο – εσπερινά 2000**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (3, 3)$  και  $\vec{\beta} = (\lambda - 1, 1)$ .

α. Να βρείτε το  $\lambda$  έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  να είναι ίσο με  $-6$ . Μονάδες 12,5

β. Να βρείτε το  $\lambda$  έτσι ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  να είναι κάθετα. Μονάδες 12,5

### ΘΕΜΑ 14ο – επαναληπτικές 2001

Αν  $\vec{PA} + \vec{PB} - 2\vec{PG} = \vec{0}$  και  $|\vec{PA}| = 6, |\vec{PB}| = |\vec{PG}| = 2\sqrt{3}$

να δείξετε ότι:

α. τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά

Μονάδες 6

β. το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα σημεία A, B

Μονάδες 4

γ. η γωνία  $\hat{APB} = 90^\circ$

Μονάδες 7

δ. το διάνυσμα  $\vec{V} = \vec{PB} + \vec{PG}$  είναι κάθετο στο  $\vec{AG}$ . Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ 15ο – επαναληπτικές 2001

A.1. Αν  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία  $\theta$ , να αποδείξετε

ότι:  $\text{συν}\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Μονάδες 6,5

A.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη A	Στήλη B
α. κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} =  \vec{\alpha}  \cdot  \vec{\beta} $
β. ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = - \vec{\alpha}  \cdot  \vec{\beta} $
γ. αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	3. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
	4. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2  \vec{\alpha}  \cdot  \vec{\beta} $

Μονάδες 6

**B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, \lambda)$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

B.1. Αν τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι κάθετα, τότε:

α.  $\lambda=1$

β.  $\lambda=0$

γ.  $\lambda=-2$

δ.  $\lambda=2$

Μονάδες 4

B.2. Αν τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι ομόρροπα, τότε:

α.  $\lambda=1$

β.  $\lambda=0$

γ.  $\lambda=-2$

δ.  $\lambda=2$

Μονάδες 4,5

B.3. Αν τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι αντίρροπα, τότε:

α.  $\lambda = -1$

β.  $\lambda = 0$

γ.  $\lambda = -2$

δ.  $\lambda = 2$

Μονάδες 4

### ΘΕΜΑ 16ο – επαναληπτικές εσπερινά 2001

**A.** Ας θεωρήσουμε δύο οποιαδήποτε διαφορετικά μεταξύ τους σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  του καρτεσιανού επιπέδου.

Για καθεμιά από τις επόμενες ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της **(A. α, A. β και A. γ)** και ακριβώς δίπλα, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α) Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι:

A.  $\left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$

B.  $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

Γ.  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Δ.  $(2x_1, 2y_2)$

Μονάδες 4,5

β) Οι συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{AB}$  είναι:

A.  $(x_2 + x_1, y_2 + y_1)$

B.  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Γ.  $(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2)$

Δ.  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Μονάδες 4

γ) Η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με:

A.  $\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{y_1 + y_2}$

B.  $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$



$$\Gamma . \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

$$\Delta . \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Μονάδες 4

**B.** Δίνονται τα σημεία  $A(5,7)$  ,  $B(13,7)$  ,  $\Gamma(9,1)$  ,  $\Delta(1,1)$  και  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$  τα μέσα των τμημάτων  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta A$  αντίστοιχα. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των σημείων  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ .

β) Το μήκος του τμήματος  $NK$ .  $\longrightarrow$

γ) Τις συντεταγμένες του διανύσματος  $B\Delta$

Μονάδες 12,5

### ΘΕΜΑ 17ο – επαναληπτικές εσπερινά 2001

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$  ,  $\vec{\beta} = (6, 4)$  και  $\vec{\gamma} = (8, 0)$ . Να βρείτε τον  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύει:

α)  $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$  Μονάδες 8

β)  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  Μονάδες 9

γ)  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$  Μονάδες 8

### ΘΕΜΑ 18ο – επαναληπτικές εσπερινά 2001

Δίνονται τα σημεία  $O(0, 0)$ ,  $A(0, -3)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $\Gamma(-2, -6)$  και  $M(x, y)$  το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .

α. Να εξετάσετε αν τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  είναι συνευθειακά.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{OM} \cdot \vec{OB}$  .

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε την προβολή  $\vec{OM}_1$  του διανύσματος  $\vec{OM}$  πάνω

στο διάνυσμα  $\vec{OB}$  .

Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ 19ο – επαναληπτικές εσπερινά 2001

Δίνονται τα σημεία  $A(2, 2)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $\Gamma(3, -6)$ ,  $O(0, 0)$ .

α. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων  $\vec{OA}$  και  $\vec{OB}$  .

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος

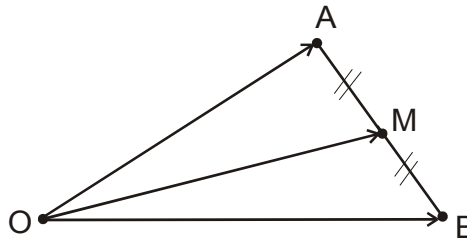
$$\vec{OD} = 3\vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OG}$$

Μονάδες 15

### ΘΕΜΑ 20ο – επαναληπτικές εσπερινά 2002

- A.** Στο παρακάτω σχήμα το σημείο M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το O ένα σημείο αναφοράς. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα  $\vec{OM}$  του μέσου M δίνεται από την ισότητα:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$



Μονάδες 10

- B.** Για τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους **(B.1, B.2, B.3)** και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Η συνθήκη παραλληλίας δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{\beta}$  που έχουν συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα είναι:

- α.  $\lambda_1 = -\lambda_2$
- β.  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$
- γ.  $\lambda_1 = \lambda_2$
- δ.  $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$

Μονάδες 5

2. Η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  είναι:

- α.  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2$
- β.  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$
- γ.  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$
- δ.  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 21ο – επαναληπτικές εσπερινά 2002**

Δίνονται τα σημεία  $A(2,9)$ ,  $B(3,4)$ ,  $\Gamma(5,7)$  και το διάνυσμα  $\vec{x} = (\kappa - 2, \lambda - 5)$ .

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων

$$\vec{AB}, \vec{B\Gamma} \text{ και } \vec{A\Gamma}$$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών  $\kappa, \lambda$  για τις οποίες

ισχύει: 
$$\vec{\chi} = \vec{B\Gamma} - 2\vec{AB}$$

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{B\Gamma} - 2\vec{AB}$  Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο Γ.

Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ 22ο – εσπερινά 2002

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, 1), \vec{\beta} = (5, 7)$  του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να βρείτε τα διανύσματα  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\delta} = 3\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$ .

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ , για την οποία το διάνυσμα  $\vec{\chi} = (\lambda, -6)$  είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\frac{1}{2}\vec{\gamma}$ , όπου  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ 23ο – επαναληπτικές εσπερινά 2003

Δίνονται τα σημεία A (5, -3), B (-4, 9) και Γ (-1, 5)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{BA}$  και  $\vec{B\Gamma}$

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{A\Gamma}$  Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 9

### ΘΕΜΑ 24ο – εσπερινά 2003

Δίνονται τα σημεία A(1, 1), B(2μ + 1, λ - 2), Γ(4, 0) και M(3, 2), όπου M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B. Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{GM}$  και  $\vec{AB}$  είναι κάθετα.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $|\vec{\Gamma\Lambda}| = |\vec{\Gamma\beta}|$  Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ 25ο – εσπερινά 2004

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 3, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  Μονάδες 8

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$  Μονάδες 7

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς  $x$ , για τους οποίους ισχύει η σχέση  $(\vec{\alpha} + x\vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 17$

Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ 26ο – επαναληπτικές 1999

**A.** α) Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα και  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζουν, τότε για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων και ισχύει πάντοτε:

A.  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sin \theta$

B.  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \eta \mu \theta$

Γ.  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \epsilon \phi \theta$

Δ.  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

E.  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων  $\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$  και  $\vec{\beta} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$  είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους, δηλαδή  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Μονάδες 7,5

B. α) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$  και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία  $\theta = 45^\circ$ . Τότε, το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$  είναι:

A. 0      B. -6      Γ. 6      Δ.  $3\sqrt{3}$       E.  $-3\sqrt{6}$

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{x} = (3, 4)$  και  $\vec{y} = (-1, 2)$ . Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ 27ο – επαναληπτικές 1999

Δίνονται τα σημεία  $A(-1, 2k)$ ,  $B(k-1, 2+k)$  και  $\Gamma(k, k+3)$ , όπου  $k$  πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{B\Gamma}$  Μονάδες 9

β) Για ποια από τις παρακάτω τιμές του  $k$  τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά;

A. -1      B. 0      Γ. 1      Δ. 2      E. -2      Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι για  $k=1$  το σημείο  $B$  είναι το μέσο του τμήματος  $A\Gamma$ . Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ 28ο – τεχνικό λύκειο 1999

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (5\kappa, 3-\lambda)$ ,  $\vec{\beta} = (4-\lambda, 4\kappa)$ , όπου  $\kappa, \lambda$  πραγματικοί αριθμοί.

α) Για ποιες τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$  τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  είναι ίσα; Μονάδες 15

β) Αν  $\lambda = 8$ ,  $\kappa$  θετικός και τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι παράλληλα, τότε το  $\kappa$  είναι ίσο με:

A. 4,      B. 1,      Γ. 2,      Δ. 3,      E. 5      Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ 29ο – επαναληπτικές τεχνικό λύκειο 2000

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$  και  $\vec{\beta} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ .

α) Να υπολογίσετε τα μέτρα  $|\vec{\alpha}|$ ,  $|\vec{\beta}|$ . Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ . Μονάδες 10

γ) Για την επόμενη ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της (2.γ) και, ακριβώς δίπλα, να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

A. Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι ίσα.

B. Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι συγγραμμικά.

Γ. Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι κάθετα.

Δ. Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  είναι ομόρροπα.

Ε. Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  είναι αντίρροπα. Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ 30ο – επαναληπτικές εσπερινό τεχνικό λύκειο 2000

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, δίνονται τα σημεία B(2,3) και Γ(4,5).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ. Μονάδες 7

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\Gamma\text{M}}$  Μονάδες 7

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος

$$\vec{\alpha} = 2\vec{O\Gamma} + 3\vec{\Gamma\text{M}} . \quad \text{Μονάδες 6}$$

δ) Αν  $\vec{\beta} = (10, 14)$  να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  είναι συγγραμμικά ( $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ ) Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ 31ο – εσπερινό τεχνικό λύκειο 2000

**A.** α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  ; Μονάδες 6,5

β. Έστω  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  δύο μη μηδενικά διανύσματα. Στη στήλη I του παρακάτω πίνακα αναφέρονται ορισμένες βασικές έννοιες διανυσμάτων. Κάθε μία αντιστοιχεί σε κάποια από τις σχέσεις που δίνονται στη στήλη II.

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
A. κάθετα διανύσματα	1. $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ και $ \vec{\alpha}  =  \vec{\beta} $
B. ίσα διανύσματα	2. $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $ \vec{\alpha}  =  \vec{\beta} $
Γ. αντίθετα διανύσματα	3. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
	4. $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ με $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και ακριβώς δίπλα τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση. Μονάδες 6

B. α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  όταν  $|\vec{\alpha}| = 5$  ,  
 $|\vec{\beta}| = 2$  και η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  είναι  $\theta = 60^\circ$ .

Μονάδες 6,5

β. Για την επόμενη ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της (1.Β.β) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  ισχύει ότι  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$  ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

A. Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  είναι αντίθετα.

B. Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  είναι κάθετα.

Γ. Η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  είναι ίση με  $60^\circ$ .

Δ. Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  ,  $\vec{\beta}$  είναι ίσα. Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ 32ο – εσπερινό τεχνικό λύκειο 2000

Δίνεται το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (-4, 3)$

α) Να υπολογίσετε το μέτρο  $|\vec{\alpha}|$  του  $\vec{\alpha}$  . Μονάδες 12

β) Αν  $\vec{\beta} = (\mu - 1, 2\lambda + 5)$  να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\lambda$  και  $\mu$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  να είναι ίσα.

Μονάδες 13