ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ ΤΑΞΗ Α2 ΟΜΑΔΑ 1Η

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ - ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί *α, β, γ, δ* με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι *α=3β* και *δ=5γ* **(Μονάδες 12+13)**

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$ **(Μονάδες 25)**

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι *μη μηδενικοί* πραγματικοί αριθμοί *α, β*, με *α ≠ β* για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{a^2+1}{\beta^2+1}=\frac{a}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί *α* και *β* είναι αντίστροφοι. **(Μονάδες 25)**

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\frac{a^{22}\cdot\left(\beta^{3}\right)^{8}}{a^{-2}\cdot(a\beta)^{25}}$ **(Μονάδες 25)**

ΛΥΣΕΙΣ

α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Rightarrow \alpha+\beta=4\beta \Rightarrow \alpha=4\beta-\beta \Rightarrow \alpha=3\beta$ **και**

$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Rightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Rightarrow 4\gamma+\gamma=\delta \Rightarrow \delta=5\gamma$

β) $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{5\beta\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$ **αφού** $\alpha=3\beta$ **και** $\delta=5\gamma$ **από α ερώτημα**

ΘΕΜΑ 2

α.

$$\text{Κάνουμε}\ \frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha^2+1)\beta=\alpha(\beta^2+1) \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2\beta+\beta=\alpha\beta^2+\alpha \Leftrightarrow \alpha^2\beta+\beta-\alpha\beta^2-\alpha=0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta(\alpha-\beta)-\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=0$$

ή αβ – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ αβ = 1

Όμως από δεδομένα α ≠ β $\Leftrightarrow$ α-β ≠ 0. Άρα αβ – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ αβ = 1, δηλαδή οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β.

Κ = $\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}=\frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\beta^{25}}=\alpha^{22+2-25}\cdot\beta^{24-25}=\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=1$**, αφού αβ = 1 από α) ερώτημα.**

ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ ΤΑΞΗ Α2 ΟΜΑΔΑ 2^{Η}

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ - ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ

ΘΕΜΑ 1

Έστω *x, y* πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: *y=2x*. **(Μονάδες 25)**

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης;

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$ **(Μονάδες 25)**

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι *μη μηδενικοί* πραγματικοί αριθμοί *α, β*, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1}=\frac{\beta}{\alpha}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί *α* και *β* είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 25)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\frac{(a^3)^8 \cdot (\beta^3)^7}{a^3 \cdot (a\beta)^{20}}$ (Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 1

α. Αρχικά πρέπει και αρκεί $\mathbf{x-4y\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4y}$. Οπότε:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2\Rightarrow 4x+5y=-2(x-4y)\Rightarrow$$
$$4x+5y=-2x+8y\Rightarrow 4x+2x=8y-5y\Rightarrow$$
$$6x=3y\Rightarrow y=2x$$

β. Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα βρίσκουμε:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}\overset{y=2x}{=}\frac{2x^2+3(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x}=$$
$$\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$$

ΘΕΜΑ 2

α.

$$\text{Κάνουμε}\ \frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1}=\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow(\alpha^2+1)\beta=\alpha(\beta^2+1)\Leftrightarrow$$
$$\alpha^2\beta+\beta=\alpha\beta^2+\alpha\Leftrightarrow\alpha^2\beta+\beta-\alpha\beta^2-\alpha=0\Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta(\alpha-\beta)-\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\alpha\beta(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)=0\Leftrightarrow\alpha-\beta=0$$

ή αβ – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ αβ = 1

Όμως από δεδομένα α ≠ β $\Leftrightarrow$ α-β ≠ 0. Άρα αβ – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ αβ = 1, δηλαδή οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β.

K = $\frac{(\alpha^3)^8\cdot(\beta^3)^7}{\alpha^3\cdot(\alpha\beta)^{20}}=\frac{\alpha^{24}\cdot\beta^{21}}{\alpha^3\cdot\alpha^{20}\beta^{20}}=\alpha^{24-3-20}\cdot\beta^{21-20}=\alpha^1\cdot\beta^1=\alpha\cdot\beta=1$**, αφού αβ = 1**

από α) ερώτημα.