

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3)

- 1) Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία A, B και Γ.

A) Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{MA} + 4\vec{MB} - 7\vec{MG}$ είναι σταθερό (δηλαδή ανεξάρτητο του σημείου M)

B) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο Λ τέτοιο ώστε $3\vec{LA} + 4\vec{LB} = 7\vec{LG}$

Υπόδειξη: γράψτε τα διανύσματα με σημείο αναφοράς, ένα από τα σταθερά σημεία A, B, Γ

- 2) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\beta}| = 3|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\gamma}| = 4|\vec{\alpha}|$ να αποδείξετε ότι:

A) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

B) $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} = -4\vec{\alpha}$

Υπόδειξη για το A) Θυμηθείτε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

- 3) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}, \vec{y}$ τέτοια ώστε $2\vec{x} + \vec{\beta} = \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}$ και $3\vec{y} + 11\vec{\beta} = \frac{11}{2}\vec{\alpha} - \vec{x}$

Να αποδείξετε ότι $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}$

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να βρείτε $\vec{x} = \lambda \vec{y}$, όπου $\lambda > 0$

- 4) Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}$,

$\vec{GE} = \frac{1}{2}\vec{BG}$, $\vec{AZ} = \frac{3}{5}\vec{AG}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

- 5) Έστω $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Β και Γ αντίστοιχα ως προς την αρχή Ο των αξόνων. Θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε, τα οποία ορίζονται από τις σχέσεις $\vec{OD} = \vec{OB} + 2\vec{OG}$ και $\vec{OE} + \vec{OB} = \vec{0}$.

A) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{GD}$ και $\vec{GE}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$

B) Τι συμπεραίνετε για τα σημεία Γ, Δ και Ε;

Υπόδειξη για τις ασκήσεις 4, 5: Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά αποδεικνύουμε ότι δύο διανύσματα που σχηματίζονται από τα σημεία αυτά είναι μεταξύ τους παράλληλα, π.χ. $\vec{AB} // \vec{AG}$ ή $\vec{BG} // \vec{BA}$, οπότε θα είναι παράλληλα διανύσματα με κοινό άκρο, άρα θα ανήκουν στην ίδια ευθεία, δηλαδή τα A, B, Γ θα είναι συνευθειακά.

- 6) Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ τυχαίου τετραπλεύρου ABΓΔ, να αποδειχθεί ότι $\vec{AG} + \vec{BD} = 2\vec{KL}$

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να εκφράσετε τα διανύσματα του πρώτου μέλους με διαδρομές (πρόσθεση διαδοχικών διανυσμάτων), αρχίζοντας από το αρχικό προς το τελικό γράμμα.