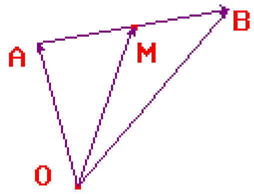
ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΑΚΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΣΤΥΡΩΝ
29/5/2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. i) Να αποδείξετε ότι για τη διανυσματική ακτίνα του μέσου Μ ενός τμήματος ΑΒ ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ **Μονάδες 10**



ii) Να γράψετε στην κόλλα σας ορθά συμπληρωμένους τους τύπους στην παρακάτω πρόταση:

Οι συντεταγμένες (x, y) του μέσου Μ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α (x_1, y_1) και Β(x_2, y_2) είναι:

$x = \dfrac{x_1 + x_2}{\ldots\ldots}$, $y = \dfrac{y_1 + \ldots\ldots}{2}$ **Μονάδες 5**

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν ισχύει $A^2 + B^2 + 4\Gamma = 0$ **Μονάδες 2**

ii) Η ευθεία ε: Αx + Βy + Γ = 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (\mathrm{B}, \mathrm{A})$ **Μονάδες 2**

iii) Αν $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ και $\vec{u} \neq \vec{0}$, τότε ισχύει $\vec{v} = \vec{w}$. **Μονάδες 2**

iv) Αν $\vec{\alpha} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (10, -6)$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. **Μονάδες 2**

v) Η εξίσωση $(\alpha^2 - 1)x + (a+1)y - \alpha^2 + 3 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in \Re$. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Κ (1,5), Λ (1,2) και Μ(2,3). Να βρείτε:

Β1. την εξίσωση της ευθείας ΛΜ. **Μονάδες 8**

Β2. την απόσταση του σημείου Κ από την ευθεία ΛΜ. **Μονάδες 8**

Β3. το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -2)$, $\vec{\beta} = (-1, 0)$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

Γ1. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **Μονάδες 9**

Γ2. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$. **Μονάδες 8**

Γ3. Να αποδειχθεί ότι για την προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ ισχύει $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v} = -4\vec{\beta}$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραβολή C_1: $y^2 = 2px$, $(p > 0)$ η οποία έχει εστία Ε το κέντρο του κύκλου C_2: $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$

Δ1. Να βρείτε την παράμετρο p της παραβολής C_1 **Μονάδες 8**

Δ2. Για p = 2,

i) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ζ) της παραβολής C_1που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): y = x + 2014 **Μονάδες 9**

ii) να εξετάσετε αν η ευθεία του ερωτήματος i) εφάπτεται και στον κύκλο C_2 **Μονάδες 8**

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στην κόλλα σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στην κόλλα σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Κόντος Γεώργιος

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. i) θεωρία, ii) θεωρία

Α2.

i. Λάθος
ii. Λάθος
iii. Λάθος
iv. Σωστό
v. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lambda_{ΛΜ} = \dfrac{3-2}{2-1} = 1$

$y - y_Λ = \lambda_{ΛΜ}(x - x_Λ) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x-1) \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

Β2. $d(K, ΛΜ) = \dfrac{|1-5+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{|-3|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ μ. μήκους

Β3. $\overrightarrow{ΚΛ} = (0, -3)$, $\overrightarrow{ΛΜ} = (1, 1)$ Εμβαδό = $\dfrac{3}{2}$ τετραγ. μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (2, -2) \cdot (-1, 0) = -2$

$|\vec{\alpha}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$|\vec{\beta}| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1$

συν$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{-2}{2\sqrt{2} \cdot 1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ άρα η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι 135^o

Γ2. $|\vec{v}|^2 = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = \ldots\ldots = 20$ άρα $|\vec{v}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Γ3. Ισχύει $προβ_{\vec{\beta}}\vec{v} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ όπου $\lambda \in R$

και $\vec{\beta} \cdot \vec{v} = \vec{\beta} \cdot προβ_{\vec{\beta}}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{v} = \vec{\beta} \cdot \lambda \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = \lambda \cdot |\vec{\beta}|^2$

$\ldots\ldots \Leftrightarrow \lambda = -4$, άρα $προβ_{\vec{\beta}}\vec{v} = -4\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εστία της παραβολής είναι Ε($\frac{p}{2}$, 0) και έστω Κ το κέντρο του κύκλου C_2

Ο κύκλος C_2: $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ γίνεται είτε με τη μέθοδο συμπλήρωσης είτε με τους τύπους..... C_2: $(x – 1)^2 + y^2 = 2$, άρα έχει κέντρο Κ(1, 0) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

Οπότε $\frac{p}{2} = 1 \Leftrightarrow p = 2$ άρα και C_1: $y^2 = 4x$

Δ2. i). Αφού η εφαπτομένη της παραβολής είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2014$ θα είναι της μορφής $y = x + \beta$, $\beta \in R$.
Λύνω το σύστημα των εξισώσεων $y^2 = 4x$ και $y = x + \beta$ και απαιτώ στη δευτεροβάθμια που προκύπτει Δ = 0, αφού θέλουμε το σύστημα να έχει μια λύση (ένα κοινό σημείο). Η δευτεροβάθμια είναι μετά από τη μέθοδο της αντικατάστασης
$x^2 + (2\beta-4)x + \beta^2 = 0$ με Διακρίνουσα $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\beta-4)^2 - 4\beta^2 = 0 \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow \beta = 1$
Άρα $y = x + 1$.
Άλλος τρόπος για να βρω την εξίσωση της εφαπτομένης είναι με τη χρήση του σημείου επαφής $A(x_1, y_1)$ της παραβολής C_1: $y^2 = 4x$ και της εφαπτομένης της:
$yy_1 = 2(x + x_1)$ ....

ii). Αρκεί να εξετάσουμε ότι ισχύει $d(K, \zeta) = \rho = \sqrt{2}$
Έχουμε: $d(K, \zeta) = \frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \rho$, άρα η ευθεία του ερωτήματος i) εφάπτεται και στον κύκλο C_2.