Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.

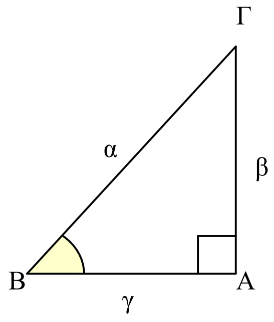
Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) ορίζουμε:

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{\beta}{\alpha}\left(= \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\gamma}{\alpha}\left(= \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\beta}{\gamma}\left(= \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} \right)$$

$$\sigma\varphi\hat{B} = \frac{\gamma}{\beta}\left(= \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} \right)$$



Τριγωνομετρικός κύκλος

Ένας κύκλος με κέντρο το σημείο Ο(0, 0) ενός καρτεσιανού συστήματος αξόνων, ακτίνα $\rho = 1$ και με ορισμένη τη θετική φορά των γωνιών καλείται τριγωνομετρικός.

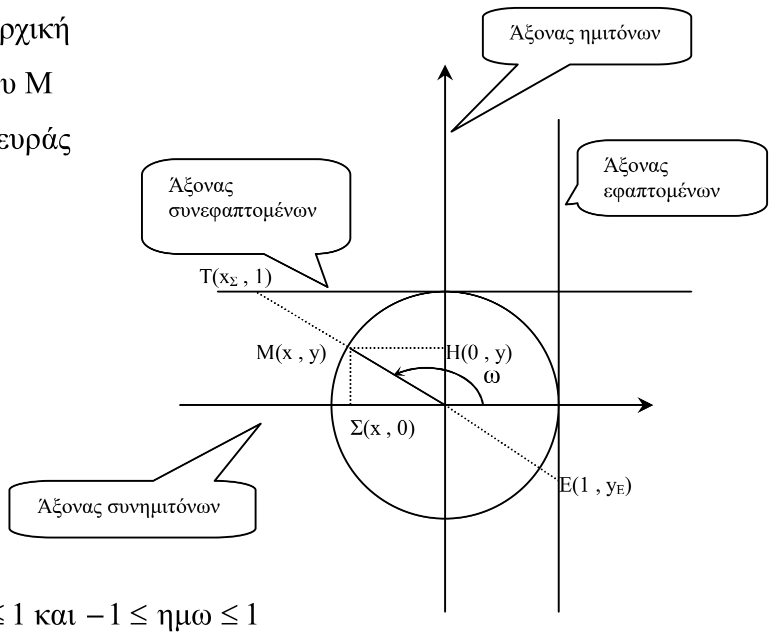
Εάν θεωρήσω μια γωνία ω με αρχική πλευρά Οx και τελική ΟΜ (όπου Μ το σημείο τομής της τελικής πλευράς με τον κύκλο), τότε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{1} = y$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{1} = x$$

$$\varepsilon\varphi\omega = y_E = \frac{y}{x}$$

$$\sigma\varphi\omega = x_\Sigma = \frac{x}{y}$$



Προφανώς ισχύει: $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$

Η σχέση που συνδέει δύο γωνίες που έχουν την ίδια τελική πλευρά (π.χ. φ και ω) είναι $\varphi = \kappa \cdot 360^0 + \omega, \quad \kappa \in Z$ και ισχύει:

$\eta\mu(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \eta\mu\omega$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$ $\qquad$ $\sigma\varphi(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \sigma\varphi\omega$

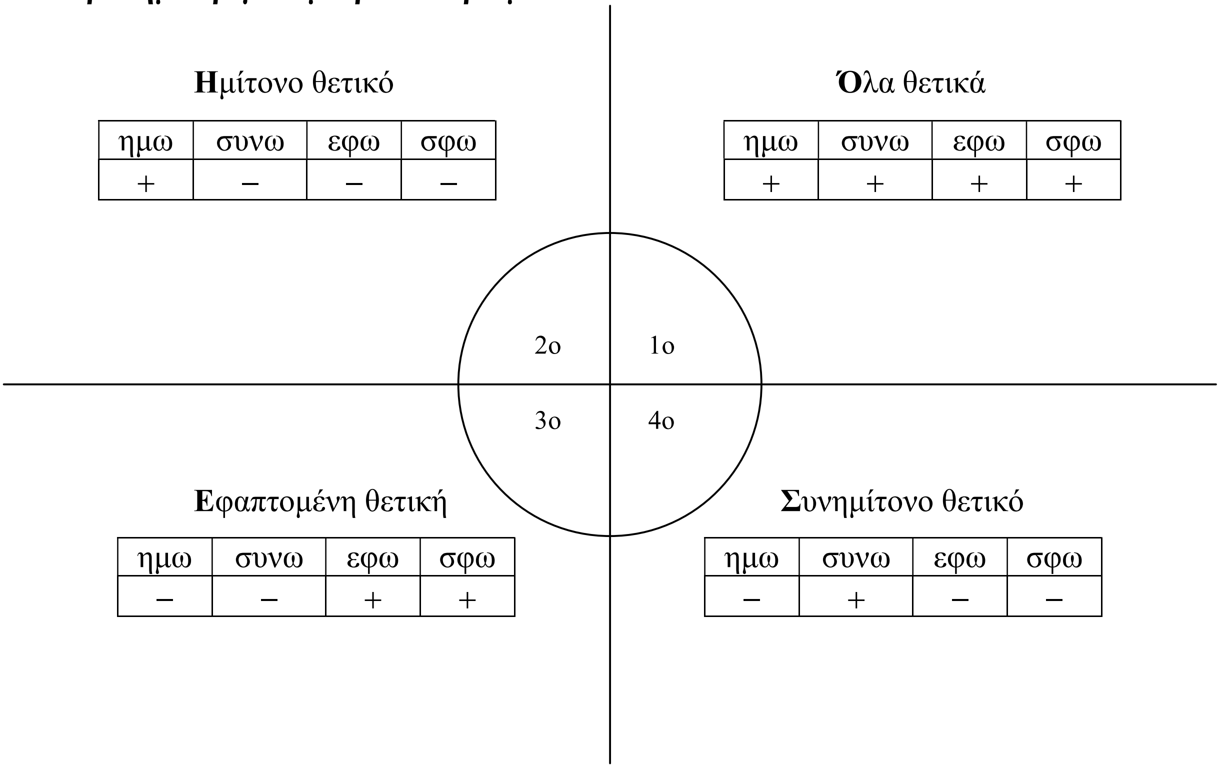
Το πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών.

Ημίτονο θετικό

ημω	συνω	εφω	σφω
+	−	−	−

Όλα θετικά

ημω	συνω	εφω	σφω
+	+	+	+



Εφαπτομένη θετική

ημω	συνω	εφω	σφω
−	−	+	+

Συνημίτονο θετικό

ημω	συνω	εφω	σφω
−	+	−	−

Ακτίνιο

Το ακτίνιο (ή rad) είναι η γωνία που, όταν γίνει επίκεντρη κύκλου (Ο, ρ) βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού, δηλαδή σε τόξο 1 rad.

Η σχέση που υπάρχει μεταξύ των ακτινίων και των μοιρών:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \quad (\alpha : \text{ακτίνια}, \quad \mu : \text{μοίρες})$$

ΠΙΝΑΚΑΣ γνωστών τριγωνομετρικών αριθμών οξειών γωνιών (και τρόπος απομνημόνευσης)

Μοίρες	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	
Ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
ημω	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	Γράφουμε αντίστροφα την παραπάνω γραμμή
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	
σφω	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Γράφουμε αντίστροφα την παραπάνω γραμμή

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

2) $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \left(\omega \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in Z\right)$

3) $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}, \quad (\omega \neq \kappa\pi, \kappa \in Z)$

4) $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1, \quad \left(\omega \neq \dfrac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in Z\right)$

<u>Τύποι περιγραφής του τετραγώνου του ημ και του συν από την εφ</u>

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{\eta\mu^2\omega} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{1}{\eta\mu^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

Αναγωγή στο 1^{o} τεταρτημόριο

- Οι γωνίες που η διαφορά τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π έχουν ίσους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
  $\eta\mu(2\kappa\pi + x) = \eta\mu x, \quad \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad \varepsilon\varphi(2\kappa\pi + x) = \varepsilon\varphi x, \quad \sigma\varphi(2\kappa\pi + x) = \sigma\varphi x$
- Οι αντίθετες γωνίες έχουν τα ίσα συνημίτονα (αντίθετα όλα τα άλλα)
  $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x, \quad \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad \varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x, \quad \sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$
- Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν τα ίδια ημίτονα (αντίθετα όλα τα άλλα)
  $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x, \quad \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x, \quad \varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x, \quad \sigma\varphi(\pi - x) = -\sigma\varphi x$
- Οι γωνίες με διαφορά π έχουν αντίθετα ημίτονα και συνημίτονα
  $\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x, \quad \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x, \quad \varepsilon\varphi(\pi + x) = \varepsilon\varphi x, \quad \sigma\varphi(\pi + x) = \sigma\varphi x$
- Στις συμπληρωματικές γωνίες το ημίτονο της μιας είναι συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας είναι συνεφαπτομένη της άλλης.
  $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x, \quad \varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi x, \quad \sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi x$

<u>Μνημονικός κανόνας</u>

Όταν δύο γωνίες έχουν άθροισμα ή διαφορά 0, π, 2π [δηλ αν το όρισμα των τριγωνομετρικών αριθμών είναι της μορφής $\kappa\pi \pm \omega$, ω (κ = 0, 1)] τότε έχουν ομώνυμους τριγωνομετρικούς αριθμούς, δηλ [ημ ↔ ημ, συν ↔ συν, εφ ↔ εφ, σφ ↔ σφ]

Όταν δύο γωνίες έχουν άθροισμα ή διαφορά $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ [δηλ αν το όρισμα των τριγωνομετρικών αριθμών είναι της μορφής $\frac{\kappa\pi}{2} \pm \omega, \omega\,(\kappa = 1, 3)$] τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εναλλάσσονται, δηλ [ημ $\leftrightarrow$ συν, εφ $\leftrightarrow$ σφ].

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, \kappa \in Z \qquad \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in Z$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in Z \qquad \sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in Z$$

Καλό είναι να ξέρουμε τη λύση των παρακάτω εξισώσεων:

$$\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z \qquad \sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = (2\kappa + 1)\pi,\ \kappa \in Z$$

$$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \kappa \in Z \qquad \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$$

$$\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z \qquad \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \kappa \in Z$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \qquad \eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \qquad \eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

[Το ημ διατηρεί το πρόσημο του ορίσματος]

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} \qquad \sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} \qquad \sigma\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$$

Όπως και το ημ η εφ διατηρεί το πρόσημο στον αριθμητή

Στον παρονομαστή γράφουμε πρώτα τη σφβ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $2α$:

$$ημ2α = 2ημασυνα$$

$$συν2α = \begin{cases} συν^2α - ημ^2α \\ 2συν^2α - 1 \\ 1 - 2ημ^2α \end{cases}$$

$$εφ2α = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α}$$

$$σφ2α = \frac{σφ^2α - 1}{2σφα}$$

Τύποι αποτετραγωνισμού:

$$ημ^2α = \frac{1 - συν2α}{2} \qquad συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2} \qquad εφ^2α = \frac{1 - συν2α}{1 + συν2α}$$

Τύποι έκφρασης του ημ2α και συν2α συναρτήσει της εφα:

$$ημ2α = \frac{2εφα}{1 + εφ^2α}, \quad α \neq κπ + \frac{π}{2}, κ \in Z$$

$$συν2α = \frac{1 - εφ^2α}{1 + εφ^2α}, \quad α \neq κπ + \frac{π}{2}, κ \in Z$$

Τύποι έκφρασης του ημ3α και συν3α συναρτήσει του ημα και συνα αντίστοιχα:

$$ημ3α = 3ημα - 4ημ^3α \qquad συν3α = 4συν^3α - 3συνα$$