

ΛΥΚΕΙΟ:.....

ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (μέχρι και κανόνες Παραγώγισης)

ΟΝΟΜΑ:.....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

ΘΕΜΑ 1°

A. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(6 Μονάδες)**

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=a^x$, με $a>0$ έχει παράγωγο $f'(x)=a^x \ln a$. **(6 Μονάδες)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με Σ ή Λ ανάλογα με το αν είναι σωστές ή λανθασμένες.

1. Αν η f'' είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η f' είναι και συνεχής στο x_0 .

Σ Λ

2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Σ Λ

3. Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Σ Λ

4. Κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α, β) έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$.

Σ Λ

5. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και η $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0 .

Σ Λ

(5x2 Μονάδες)

Δ. Θεωρούμε τον ισχυρισμό: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή γράφοντας Α ή Ψ αντίστοιχα.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(1+2 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2°

Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB=1\text{cm}$, $AG=3\text{cm}$ και $\Gamma\Delta=2\text{cm}$. Το σημείο M κινείται διαγράφοντας το ευθύγραμμο τμήμα AG . Έστω $E(x)$ το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

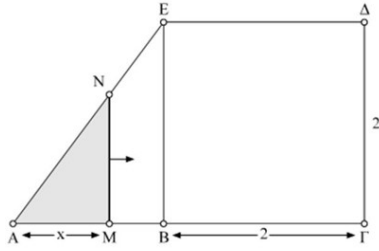
A. Να δείξετε ότι:

i) $MN=2x$ για $0 < x \leq 1$. ii) $E(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$. **(4+4 Μονάδες)**

B. Αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, **(3+3 Μονάδες)** να κάνετε την γραφική παράσταση της $E(x)$ και της αντίστροφης $E^{-1}(x)$ αν αυτή ορίζεται. **(4+3 Μονάδες)**.

Γ. Να βρείτε την θέση του σημείου M αν $E(x)=3\text{cm}^2$.

(4 Μονάδες)



ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f^2(x) - f(x), & x \leq 0 \\ f(x) - 1, & x > 0 \end{cases}, \text{ η οποία είναι συνεχής στο } x_0=0.$$

A. Να δείξετε ότι $f(0)=1$.

B. Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $f'(1)=2$, να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(f(\frac{x+1}{x}) - f(1))] \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1-x)}{x},$$

και να δείξετε ότι $g'(1)=2$.

(5*5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω οι συναρτήσεις f και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } x, f(\mathbb{A})=\mathbb{R} \text{ και } g(x)=e^x+x+1.$$

A) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(0, g(0))$.

B) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g αντιστρέφονται.

Γ) Να υπολογίσετε το $(f^{-1})'(0)$.

Δ) Αν θεωρήσουμε ότι η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη να υπολογίσετε το $(g^{-1})'(2)$.

E) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

(2+5+5+6+7 Μονάδες)

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!

