

ΛΥΚΕΙΟ:.....

ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΟΝΟΜΑ:.....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. Ποια η γεωμετρική του ερμηνεία. **(9 Μονάδες)**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με Σ ή Λ ανάλογα με το αν είναι σωστές ή λανθασμένες.

1. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ τότε: $f(α)f(β)<0$. Σ Λ
2. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα. Σ Λ
3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x)>0$, κοντά στο x_0 . Σ Λ
4. Δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες αν υπάρχουν κάποια $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)=g(x)$. Σ Λ
5. Αν για δύο συναρτήσεις f και g ισχύει: $|f(x)| \leq g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. **(5x2 Μονάδες)**

Γ. Θεωρούμε τον ισχυρισμό: Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή γράφοντας Α ή Ψ αντίστοιχα.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(1+2 Μονάδες)**

Δ. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. **(3 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2 + \ln^2 x, & 0 < x \leq e \\ ax + \ln(x - e + 1), & x > e \end{cases}$

α) Να βρείτε τον αριθμό a έτσι ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Αν $a = \frac{3}{e}$, να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)=6$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2e)$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(10+7+8 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{f(x)}$, iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\eta\mu \frac{1}{f(x)}$, iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x-f(x)-1}$

(5*5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{ax+\beta}{x-a}$, $\beta \neq -a^2$.

A. Να αποδείξετε $f(f(x))=x$, για κάθε $x \neq a$.

B. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Γ. Να βρείτε δύο ζεύγη τιμών $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η C_f να τέμνει την ευθεία $y=x-1$.

Δ. Αν $\alpha < 1$, να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f \circ f)(3-2x) = \frac{ax^{17} + \beta}{x^{17} - a}$.

(4+6+7+8 Μονάδες)

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!