

ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Παράρτημα Αχαΐας
Επιστημονικό Σωματείο

Καποδιστρίου 52,
Τ.Κ. 26222, Πάτρα
Τηλ & Fax : 2610422273
e-mail: emeachaias1979@gmail.com
url: www.emepatras.gr

ΠΡΟΣ: **Ντόντος Γεώργιος**

ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΙΣΤΟΛΗ

Η Διοικούσα Επιτροπή του Παραρτήματος Αχαΐας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, σας ευχαριστεί για την άμεση ανταπόκριση στο αίτημά μας, για υποστήριξη της διοργάνωσης του 4^{ου} Θερινού Μαθηματικού Σχολείου στο 11^ο Γενικό Λύκειο Πατρών, από 16 έως 27 Ιουνίου 2025.

Με τη συμμετοχή σας και τη διδασκαλία σας, υποστηρίξατε αποτελεσματικά την προσπάθειά μας, να ευχαριστηθούν τα παιδιά αυτό το Σχολείο, να ανακαλύψουν νέες γνώσεις και σχέσεις μεταξύ γνώσεων καθώς και να νιώσουν ότι άξιζε η απόφασή τους να το παρακολουθήσουν.

Θεωρούμε ότι το 4^ο Θ.Μ.Σ. πραγματοποιήθηκε με μεγάλη επιτυχία. Οι αξιολογήσεις της λειτουργίας του από τους μαθητές και τις μαθήτριές του, από τους διδάσκοντες και τις διδάσκουσες και από τα μέλη της οργανωτικής επιτροπής, είμαστε σίγουροι ότι θα οδηγήσουν σε βελτιώσεις, οι οποίες θα εφαρμοστούν στο 5^ο Θ.Μ.Σ., που σχεδιάζουμε να διοργανώσουμε το καλοκαίρι του 2026.

Το Παράρτημα Αχαΐας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε), θα συνεχίσει να προγραμματίζει και να υλοποιεί δραστηριότητες για τους μαθητές και τις μαθήτριες της Περιφερειακής Ενότητας Αχαΐας, με στόχο να βελτιώσουν τη σχέση τους με τα μαθηματικά και να στεφτεί με επιτυχία και διακρίσεις η προσπάθεια όσων συμμετέχουν στους διαγωνισμούς της Ε.Μ.Ε.

Η Δ.Ε. του Παραρτήματος Αχαΐας της Ε.Μ.Ε. προσβλέπει τόσο στη συνέχιση της συνεργασίας μας, όσο και στην υποστήριξή σας στις δράσεις της.

Η συμμετοχή σας και η εμπιστοσύνη που δείξατε στο Παράρτημα, μας τιμά ιδιαίτερα και δυναμώνει τη θέλησή μας για συνέχιση της προσπάθειάς μας.

Για τις πρωτοβουλίες και τις δράσεις του Παραρτήματος, θα σας ενημερώνουμε με μηνύματα στο email σας. Η ενημέρωσή σας είναι δυνατή και από την ιστοσελίδα του Παραρτήματος (www.emepatras.gr), στην οποία παρουσιάζονται όλες οι δραστηριότητές μας.

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ

Με τιμή

Για τη Διοικούσα Επιτροπή

Ο Πρόεδρος



Γεώργιος Αφράτης



Η Γενική Γραμματέας



Αθηνά Αλεξοπούλου

ΘΕΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ 2025

16 – 27 ΙΟΥΝΙΟΥ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

σελ. 38 έως 46



ΖΩΓΡΑΦΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΧΗΜΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΟΥΣΙΚΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΟΤΗΤΑΣ

3D ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ 3D ΕΚΤΥΠΩΣΗ

ΨΗΦΙΑΚΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

ΘΕΡΜΕΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ ΠΡΟΣ

- ❖ Το Πανεπιστήμιο Πατρών και ιδιαίτερα τον Πρύτανη κύριο Χρήστο Μπούρα, καθώς και το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών για τη συμβολή τους στην πραγματοποίηση του Θερινού Μαθηματικού Σχολείου.
- ❖ Όλους τους χορηγούς της προσπάθειάς μας.
- ❖ Εκπαιδευτικούς, φοιτητές, φοιτήτριες, προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς του Μαθηματικού τμήματος, καθώς και υποψήφιους διδάκτορες στην Επιστήμη των Μαθηματικών και σε άλλες Επιστήμες, που θα διδάξουν στο Θερινό Μαθηματικό Σχολείο 2025.
- ❖ Όσους και όσες κατέθεσαν διδασκαλίες, οι οποίες θα αξιοποιηθούν από τους διδάσκοντες και τις διδάσκουσες.
- ❖ Όσους και όσες συνέβαλλαν στην οργάνωση, την προετοιμασία και την υλοποίηση του 4^{ου} Θερινού Μαθηματικού Σχολείου στην Αχαΐα.
- ❖ Τους γονείς και κηδεμόνες που δήλωσαν τα παιδιά τους, δείχνοντας εμπιστοσύνη στο Παράρτημα Αχαΐας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Πάνω από όλα ευχαριστούμε τους Μαθητές και τις Μαθήτριες για τη συμμετοχή τους.

Για τη Διοικούσα Επιτροπή

Ο Πρόεδρος
Γεώργιος Αφράτης

Η Γενική Γραμματέας
Αθηνά Αλεξοπούλου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδες
Πρόλογος	3
3d Σχεδίαση και 3d Εκτύπωση - σχεδιάζοντας και κατασκευάζοντας το δικό μας αντικείμενο με το Tinkercad	4-7
Sarah Morris μια εικαστική προσέγγιση αναπαράστασης χώρου	8-9
Αλγεβρικά προβλήματα μέσω Γεωμετρίας	10-21
Από τις σκιές του Ήλιου στη σκιά της σελήνης	22-30
Η ρομποτική πλατφόρμα micro:bit & πώς να κατασκευάσουμε τη δική μας συσκευή αποστολής κρυπτογραφημένων μηνυμάτων	31-35
Μαθηματικά και Ποίηση	36-37
Μαθηματικές Μηχανές	38-46
Προβλήματα Πιθανοτήτων	47-52
Προσέγγιση του π	53-70
Πρώτοι αριθμοί	71-75
Τα Μαθηματικά με τη γλώσσα της καθημερινότητας	76-95
Το μονόχορδο του Πυθαγόρα	96-99
Ψηφιακή Ανακατασκευή Φυσικών Αντικειμένων και Χώρων	100-103
Ωρα για λίγη Χημεία	104-107

Η εικόνα του εξώφυλλου δημιουργήθηκε με την καθοδήγηση εργαλείου της Παραγωγικής Τεχνητής Νοημοσύνης, του Μεγάλου Γλωσσικού Μοντέλου chatGPT.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο πλαίσιο του 4ου Θερινού Μαθηματικού Σχολείου (ΘΜΣ) που διοργανώνεται στην Πάτρα, από το Παράρτημα Αχαΐας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ), υπό την αιγίδα του Πανεπιστημίου Πατρών, από 16 έως 27 Ιουνίου 2025, εκδίδονται τρεις τόμοι, ένας για κάθε επίπεδο διδασκαλίας του ΘΜΣ. Το ΘΜΣ περιλαμβάνει τρία επίπεδα διδασκαλίας με μαθητές και μαθήτριες, που στην νέα σχολική χρονιά 2025-2026 θα φοιτήσουν στις τάξεις Α', Β' και Γ' Γυμνασίου.

Στον συγκεκριμένο τόμο παρουσιάζονται επιλεγμένα θέματα από βασικούς κλάδους της Μαθηματικής Επιστήμης με μια προσέγγιση, που στηρίζεται σε ομαδικές συνεργασίες και διάλογο στην τάξη και η οποία επιδιώκει να οδηγήσει τα παιδιά να ανακαλύψουν τις μαθηματικές ιδέες και τα νοήματα που κρύβονται σε κάθε θέμα, αβίαστα και δημιουργικά. Ο κύριος σκοπός του εγχειρήματος είναι η κατανόηση των εννοιών και η ανακάλυψη και κατάκτηση της γνώσης.

Έχουν προετοιμαστεί διδασκαλίες, που θα κεντρίσουν το ενδιαφέρον των παιδιών, θα ψυχαγωγήσουν και θα ενθουσιάζουν όλα τα παιδιά ακόμα και αυτά που αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά με επιφυλακτικότητα, δισταγμό και φόβο.

Ο τόμος εμπεριέχει εκτός από θέματα Μαθηματικών, θέματα από άλλες επιστήμες, όπως Μουσική, Τέχνη, Τεχνολογία, Φυσική και Χημεία. Οι απλές και κατανοητές διδασκαλίες των θεμάτων, θα βοηθήσουν τα παιδιά να γνωρίσουν τη μεγάλη χρησιμότητα των μαθηματικών, ένα μικρό μέρος από το τεράστιο εύρος της περιοχής εφαρμογής τους, καθώς και τη σύνδεσή τους με άλλες Επιστήμες. Σε αυτό το βιβλίο επιλέξαμε να παρουσιάσουμε τα πρώτα θέματα από Τεχνολογία αιχμής, εισάγοντας τα παιδιά στο μέλλον που τα περιμένει. Συγκεκριμένα, υπάρχουν θέματα Ρομποτικής, 3d Σχεδίασης και Εκτύπωσης καθώς και Ψηφιακής ανακατασκευής φυσικών αντικειμένων.

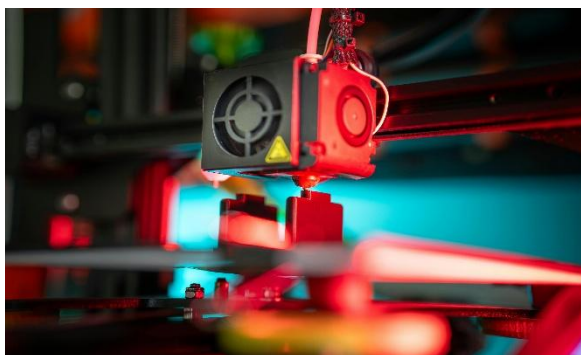
Στα προς διδασκαλία θέματα εμπεριέχονται, σπουδαία θέματα, όπως Αλγεβρικά προβλήματα μέσω Γεωμετρίας, Κρυπτογραφία, Πιθανότητες, Περί του π , καθώς και θέματα που αφορούν την επίλυση καθημερινών προβλημάτων. Επιπλέον η διδασκαλία εστιάζει στην κατανόηση και διαχείριση των δεδομένων του προβλήματος, στην επιλογή στρατηγικής επίλυσης και γενικότερα στην αξιοποίηση και ανάπτυξη μαθηματικών διαδικασιών και μεθόδων, οι οποίες οδηγούν στη λύση και στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και όχι στην απλή παράθεση μεθόδων επίλυσης.

Οι συμμετέχοντες Μαθητές και οι συμμετέχουσες Μαθήτριες, παραλαμβάνοντας αυτό το βιβλίο, θα έχουν τη δυνατότητα να επαναλάβουν, να εμπεδώσουν και να επεκτείνουν, διαδικασίες γνώσεις και εμπειρίες που θα αποκτήσουν κατά τη φοίτησή τους στο 4^ο Θερινό Μαθηματικό Σχολείο στην Αχαΐα. Την ευθύνη για την οργάνωση και λειτουργία του 4^{ου} Θερινού Μαθηματικού Σχολείου έχουν τα μέλη της Συντονιστικής Επιτροπής που ορίστηκαν από τη Διοικούσα Επιτροπή του Παραρτήματος Αχαΐας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Φένια Γιαννιώτη, Μαρία Γιαννίση, Όλγα Αντανασιώτη, Ευσταθία Γαρίνη, Αλίκη Κατσαΐτη.

Την επιμέλεια της έκδοσης του βιβλίου είχε η Μαρία Γιαννίση, Μαθηματικός.

3D ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ 3D ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΔΙΚΟ ΜΑΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΜΕ ΤΟ TINKERCAD

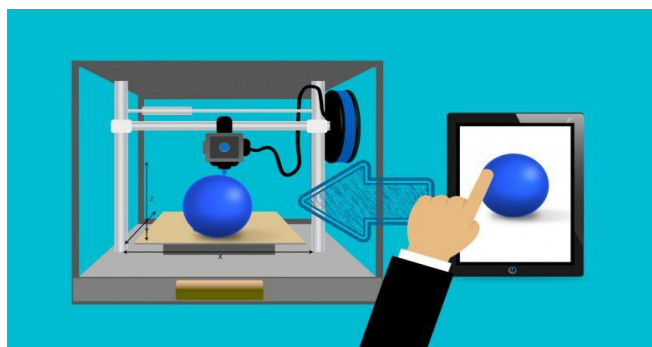
Ανατολιωτάκης Νικόλαος, Υποψήφιος Διδάκτορας Ρομποτικής



Η 3D εκτύπωση (3D printing) αποτελεί μια τεχνολογία αιχμής που επιτρέπει την κατασκευή αντικειμένων με ψηφιακό τρόπο, δημιουργώντας φυσικά μοντέλα από σχεδιασμένα αρχεία. Η τεχνολογία αυτή χρησιμοποιείται ήδη σε τομείς όπως η βιομηχανία, η ιατρική, η αρχιτεκτονική, η μόδα και η εκπαίδευση, επιτρέποντας σε μαθητές και δημιουργούς να σχεδιάζουν, να δοκιμάζουν και να υλοποιούν τις ιδέες τους στον φυσικό κόσμο.

Η εκπαιδευτική αξιοποίηση της 3D εκτύπωσης συνδυάζει στοιχεία σχεδιασμού, μηχανικής σκέψης, υπολογιστικής λογικής και δημιουργικής επίλυσης προβλημάτων. Μέσω απλών εργαλείων ψηφιακής σχεδίασης, όπως το Tinkercad, και φιλικών προς το χρήστη εκτυπωτών, οι μαθητές αποκτούν πρόσβαση σε έναν κόσμο όπου κάθε ιδέα μπορεί να πάρει μορφή.

Η 3D εκτύπωση (γνωστή και ως προσθετική κατασκευή – *additive manufacturing*) αποτελεί μία από τις πιο επαναστατικές τεχνολογίες της σύγχρονης εποχής. Αντί να αφαιρεί υλικό (όπως γίνεται στη γλυπτική ή τη μηχανουργική), προσθέτει υλικό στρώση-στρώση για να δημιουργήσει ένα τρισδιάστατο αντικείμενο από ψηφιακό αρχείο.



Η ιστορία της ξεκινά το 1984, όταν ο Chuck Hull εφευρίσκει και κατοχυρώνει την τεχνολογία της στερεολιθογραφίας (SLA), μιας μεθόδου που χρησιμοποιεί φως λέιζερ για να στερεοποιήσει υγρή ρητίνη. Το 1987 κατασκευάζεται ο πρώτος εμπορικός 3D εκτυπωτής. Κατά τη δεκαετία του '90 αναπτύσσονται νέες μέθοδοι, όπως η FDM (Fused Deposition Modeling) και η SLS (Selective Laser Sintering), που επιτρέπουν περισσότερες δυνατότητες στα υλικά και τις μορφές.

Μετά το 2005, το κίνημα RepRap άνοιξε τον δρόμο για προσιτούς, "ανοικτού κώδικα" εκτυπωτές, καθιστώντας τη 3D εκτύπωση προσβάσιμη σε εκπαιδευτικά ιδρύματα, makers και μαθητές. Σήμερα, η 3D εκτύπωση χρησιμοποιείται ευρέως σε τομείς όπως:

- η **ιατρική** (π.χ. εκτύπωση προθέσεων, χειρουργικών οδηγών),
- η **βιομηχανία** (πρωτότυπα εξαρτήματα),
- η **αρχιτεκτονική** (μοντέλα κτιρίων),
- η **μόδα και τέχνη** (κοσμήματα, installations),
- η **εκπαίδευση**, όπου οι μαθητές γίνονται δημιουργοί πραγματικών αντικειμένων.

Υπάρχουν διάφορες τεχνολογίες 3D εκτύπωσης που διαφοροποιούνται με βάση το υλικό, τον τρόπο κατασκευής και την ακρίβεια.

1. FDM (Fused Deposition Modeling)

Η πιο δημοφιλής μέθοδος. Το αντικείμενο δημιουργείται με εξώθηση θερμοπλαστικού νήματος (filament) το οποίο λιώνει και "ζωγραφίζει" στρώση-στρώση. Ιδανική για εκπαιδευτικά περιβάλλοντα.

2. SLA (Stereolithography)

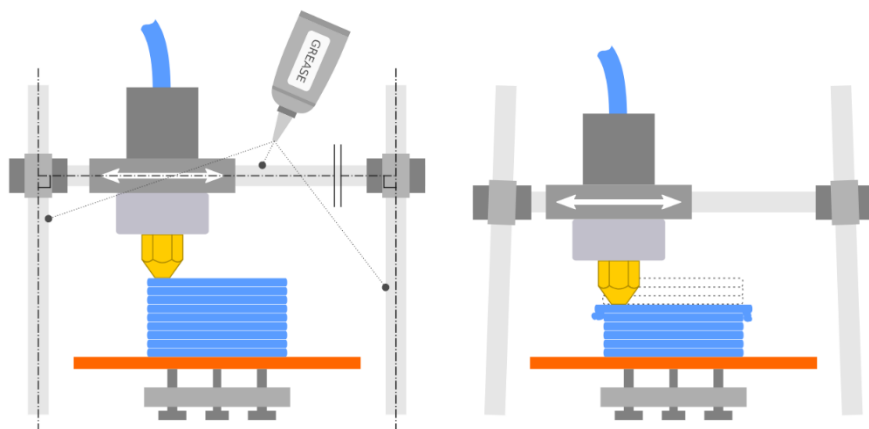
Χρησιμοποιεί υγρή ρητίνη και λέιζερ. Πολύ υψηλή ανάλυση, ιδανική για λεπτομερή μοντέλα ή κοσμήματα. Η εκτύπωση είναι πιο απαιτητική και ακριβή.

3. SLS (Selective Laser Sintering)

Χρησιμοποιεί λέιζερ και σκόνη (π.χ. νάιλον). Δεν χρειάζεται υποστηρίγματα. Χρησιμοποιείται κυρίως σε βιομηχανικές εφαρμογές.

4. Άλλες τεχνικές

- **PolyJet**: Εκτυπώνει με μελάνια ρητίνης σε πολύ υψηλή ανάλυση.
- **Binder Jetting**: Εκτυπώνει με σκόνες και υγρά συγκολλητικά.
- **DMLS (Direct Metal Laser Sintering)**: Εκτύπωση απευθείας σε μέταλλο.



Σε αυτό το εργαστήριο:

θα γνωρίσουμε:

- Τι είναι η **3D εκτύπωση** και πώς λειτουργεί.
- Πού χρησιμοποιείται στην **πραγματική ζωή** και γιατί θεωρείται επανάσταση στην κατασκευή.
- Το **Tinkercad** ως βασικό εργαλείο ψηφιακής μοντελοποίησης.
- Την έννοια του **STL αρχείου** και του **licer** για εκτυπώσιμα μοντέλα.

θα κατανοήσουμε:

- Την έννοια του **όγκου και του χώρου** μέσα από την τρισδιάστατη σχεδίαση.
- Τι σημαίνει **μοντελοποίηση με γεωμετρικά στερεά** (πρίσματα, κύβοι, κύλινδροι).
- Την ανάγκη για **ακρίβεια και συμβατότητα** στις διαστάσεις (π.χ. mm).
- Πώς μετατρέπεται ένα **ψηφιακό μοντέλο** σε **φυσικό αντικείμενο**.

θα υλοποιήσουμε:

- Ένα **πλήρες 3D σχέδιο** στο Tinkercad.
- Το **STL αρχείου** μαζί με βασικές ρυθμίσεις για εκτύπωση.

θα χρησιμοποιήσουμε:

- Tinkercad (στον browser).
- Γεωμετρικά σχήματα & εντολές ευθυγράμμισης.
- STL export – προσομοίωση Slicing.
- Πραγματικό 3D Printer για επίδειξη λειτουργίας.

Ερωτήσεις

1) Ποια είναι τα κύρια πλεονεκτήματα της 3D εκτύπωσης στην καθημερινή ζωή;

- ☐ Ταχύτητα παραγωγής
- ☐ Εξατομίκευση αντικειμένων
- ☐ Μείωση κόστους σε πρωτότυπα
- ☐ Όλα τα παραπάνω

- 2) Τι είναι το Tinkercad και ποιος είναι ο βασικός του σκοπός;
- ☐ Πλατφόρμα για μουσική παραγωγή
 - ☐ Λογισμικό για 3D σχεδιασμό στο διαδίκτυο
 - ☐ Παιχνίδι προσομοίωσης
 - ☐ Πρόγραμμα ζωγραφικής
- 3) Δημιούργησε έναν επίπεδο κύβο (Box) με διαστάσεις περίπου 60mm x 20mm x 3mm (μήκος x πλάτος x ύψος).
- 4) Πρόσθεσε με το εργαλείο Text, κάποιο μήνυμα στο αντικείμενο που σχεδιάσες.
- 5) Επέλεξε ένα αντικείμενο και προσπάθησε να το αναπαράγεις με απλά σχήματα και το εργαλείο Group.
- 6) Ας το κάνουμε flat και ας του προσθέσουμε μια τρύπα για να γίνει μπρελόκ.
- 7) Γιατί είναι σημαντικό να μην κάνουμε πολύ λεπτά ή πολύ μικρά εξαρτήματα;
- ☐ Γιατί φαίνονται άσχημα
 - ☐ Γιατί μπορεί να μην εκτυπωθούν σωστά ή να σπάσουν
 - ☐ Γιατί είναι δύσκολο να τα βρούμε στο πρόγραμμα
 - ☐ Γιατί ο εκτυπωτής τα αγνοεί
- 8) Τι σημαίνει να κάνουμε ένα αντικείμενο hole; Που το χρησιμοποιούμε;
-
-
-
- 9) Με ποιο τρόπο μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ένα αντικείμενο έχει το σωστό μέγεθος πριν το εκτυπώσουμε;
- ☐ Μετρώντας με τον χάρακα
 - ☐ Χρησιμοποιώντας την επιλογή "προβολή σε AR"
 - ☐ Χρησιμοποιώντας την εντολή "Inspect" ή τις αριθμητικές διαστάσεις
 - ☐ Δεν χρειάζεται, ο εκτυπωτής το κάνει αυτόματα
- 10) Ποια άλλη ιδέα θα ήθελες να σχεδιάσεις στο μέλλον;
-
-
-

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

- I. <https://www.tinkercad.com/>
- II. https://en.wikipedia.org/wiki/3D_printing

SARAH MORRIS ΜΙΑ ΕΙΚΑΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΧΩΡΟΥ

Αηδονίδης Ηλίας, Μαθηματικός και Εικαστικός

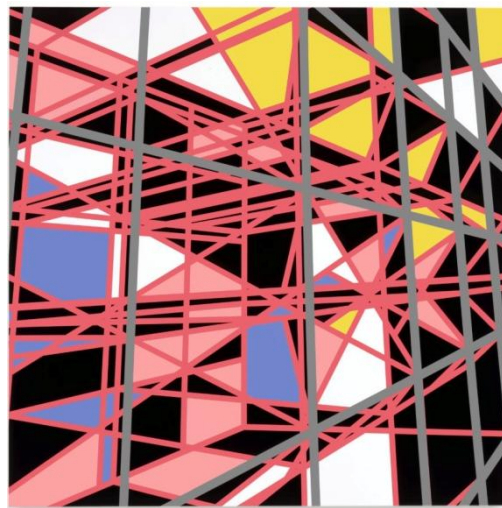
Η καλλιτέχνης, εμπνεόμενη από το αστικό περιβάλλον, τις γυάλινες όψεις των κτιρίων που θυμίζουν πλέγματα, την αρχιτεκτονική και τις ψυχολογίες των μεγαλουπόλεων που επηρεάζουν το παγκόσμιο κοινωνικοπολιτικό τοπίο, δημιουργεί μέσα από ένα παιχνίδι γραμμών κλιμακούμενης κλίσης, σημεία σύγκλισης και περιοχές απόκλισης, πολυεπίπεδους χώρους και αίσθηση βάθους πεδίου.

Πρόκειται για μια πρωτότυπη και σύγχρονη ματιά σχετικά με την αναπαράσταση ευκλείδειου χώρου (χωρίς αυτό να είναι κατ' ανάγκη πρόθεση της καλλιτέχνης) με σαφείς αναφορές σε γεωμετρικές και όχι μόνο έννοιες όπως επίπεδο, τομή, δέσμη ευθειών, βαθμιδωτή ανάπτυξη, αναλογίες, πύκνωση-αραίωση κλπ ή ρυθμός και δίκτυα.

Το έργο της Sarah Morris δείχνει πως πάντα βρίσκονται νέοι τρόποι έρευνας κλασικών ζητημάτων.

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει η εφαρμογή της δουλειάς της σε δημόσιους χώρους.

Οι παρακάτω φωτογραφίες αποτελούν ενδεικτικά παραδείγματα:





ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΩ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Δημήτριος Νικολακόπουλος

dnikolak@vols.utk.edu

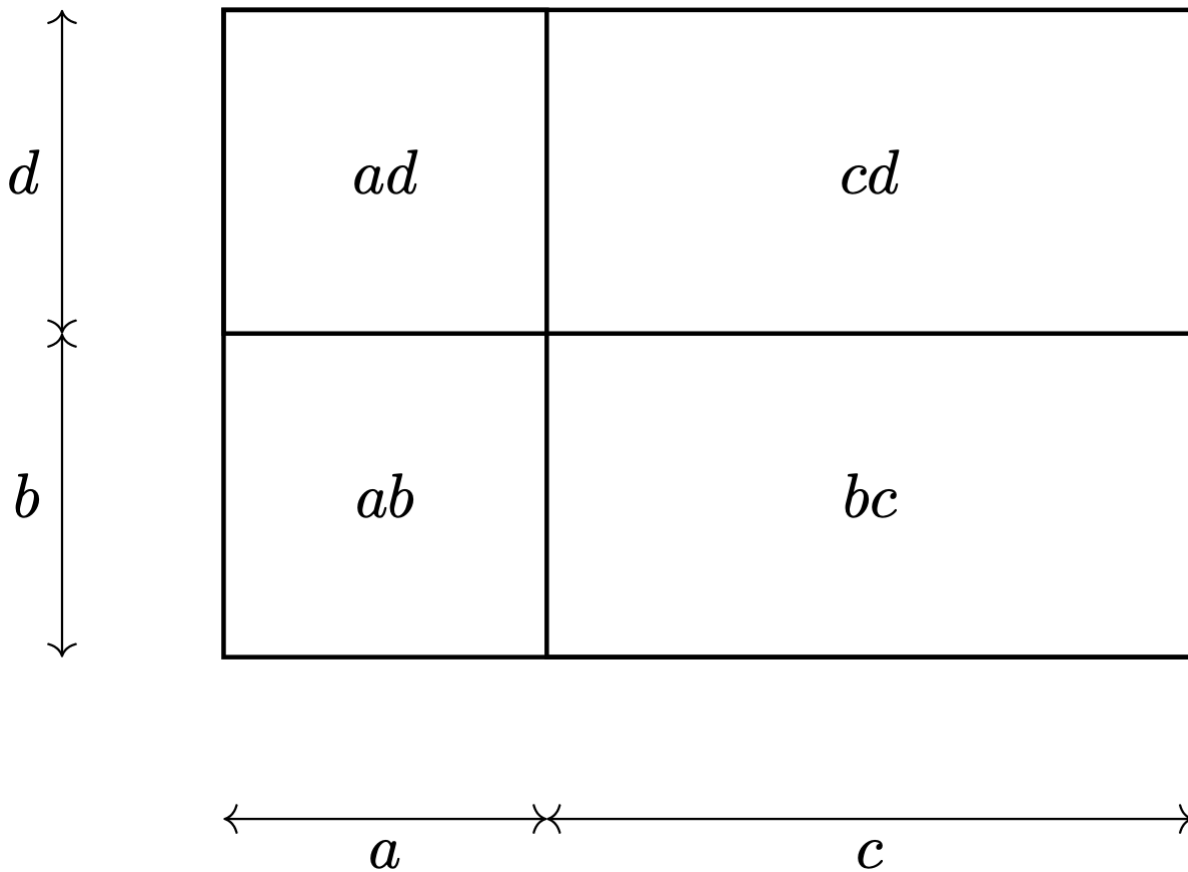
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Τενεσί, Κνοξβίλ

Πρόβλημα 1

Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι a, b, c , και d τέτοιοι ώστε $a+b+c+d=63$.
Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης $ab+bc+cd$.

Λύση:

Με γεωμετρική αναπαράσταση



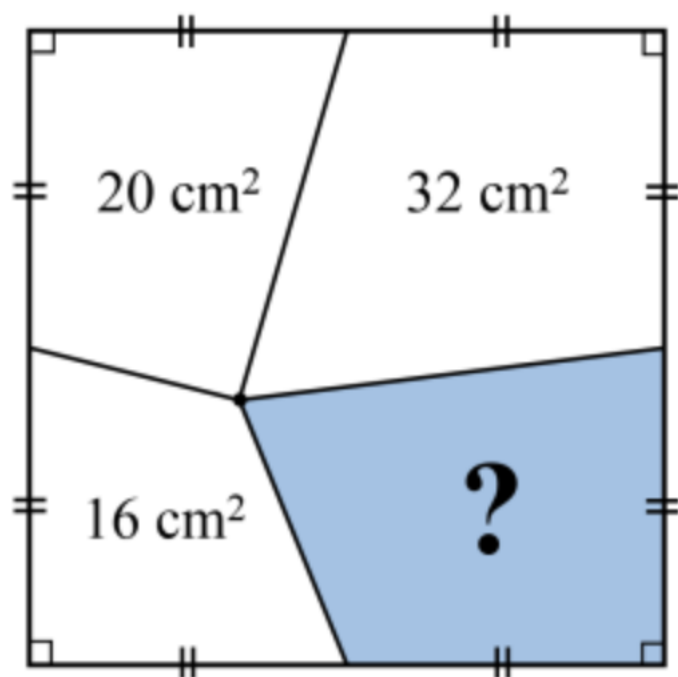
προκύπτει ότι:

$$ab+bc+cd=(a+c)(b+d)-ad$$

Για να μεγιστοποιηθεί η παράσταση, πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το ad . Η ελάχιστη τιμή του ad , είναι όταν a, d είναι θετικοί ακέραιοι, είναι 1.

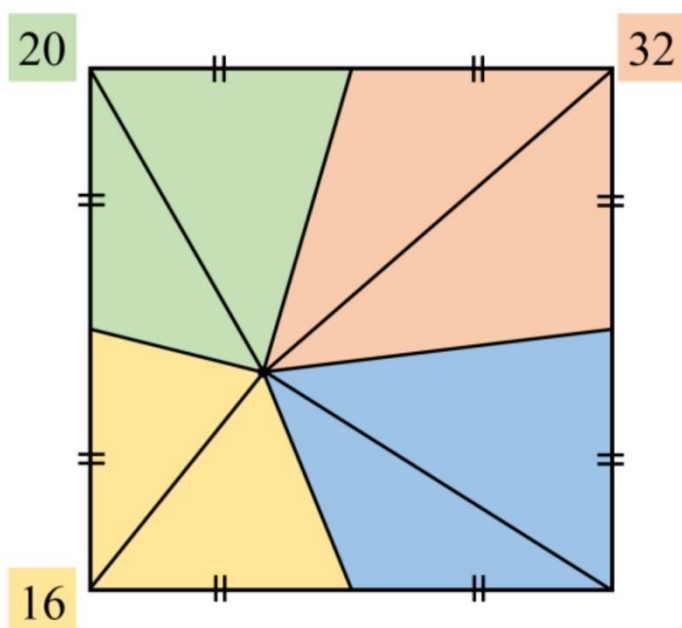
Άρα, $a=d=1$ μεγιστοποιεί την παράσταση.

Πρόβλημα 2

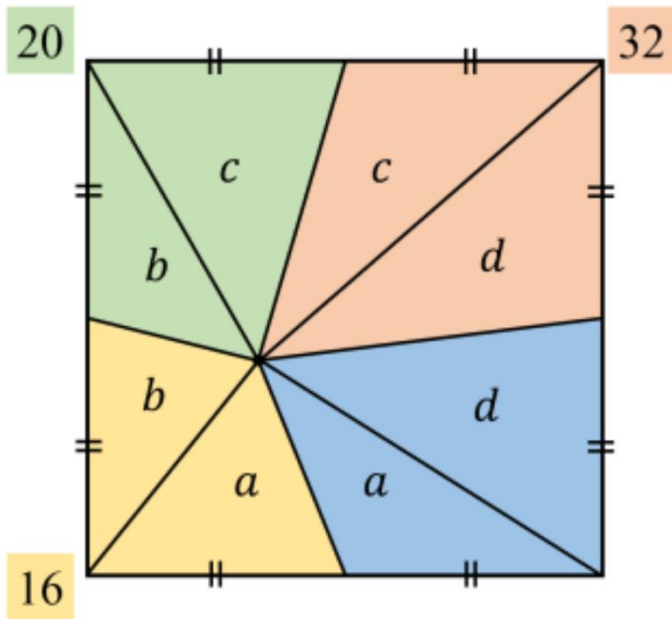


Λύση:

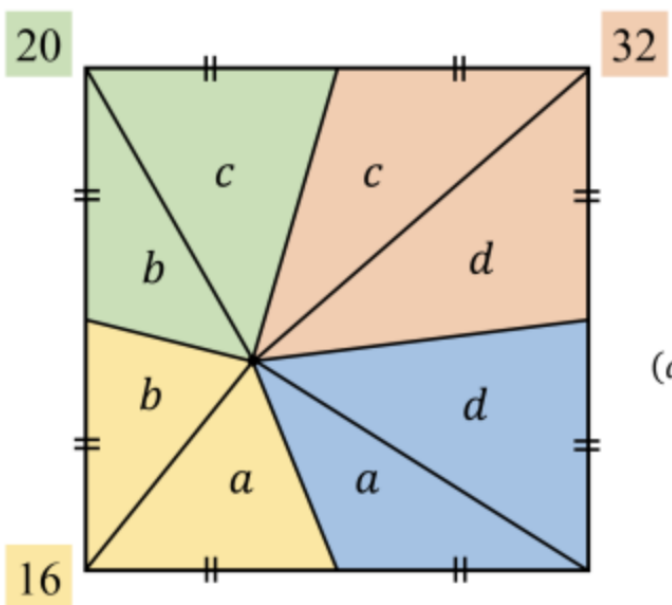
Συνδέουμε το εσωτερικό σημείο με τις γωνίες του τετραγώνου.



Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε ίσα-εμβαδικά τρίγωνα. Επομένως,



Συνεπώς,



$$a + b = 16$$

$$c + d = 32$$

$$b + c = 20$$

$$a + d = ?$$

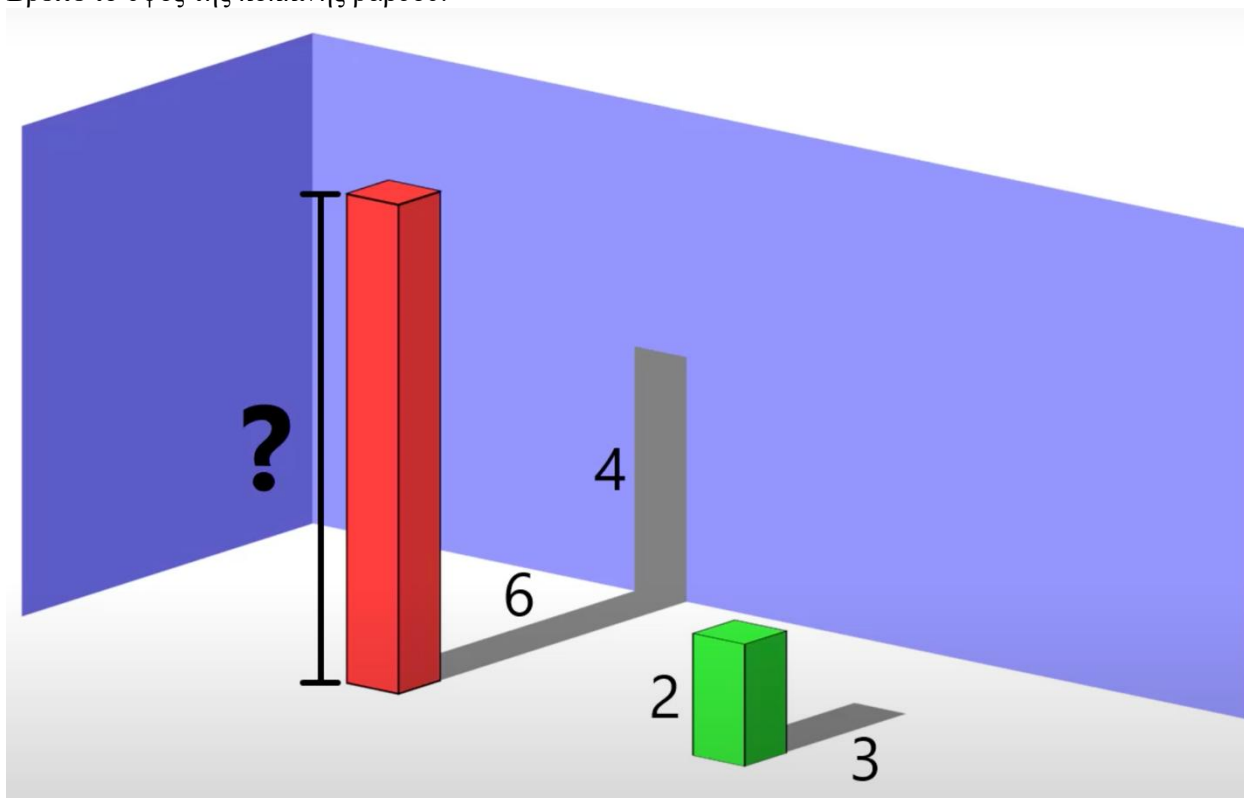
$$(a + b) + (c + d) = (b + c) + (a + d)$$

$$16 + 32 = 20 + (a + d)$$

$$16 + 32 - 20 = \boxed{28 = (a + d)}$$

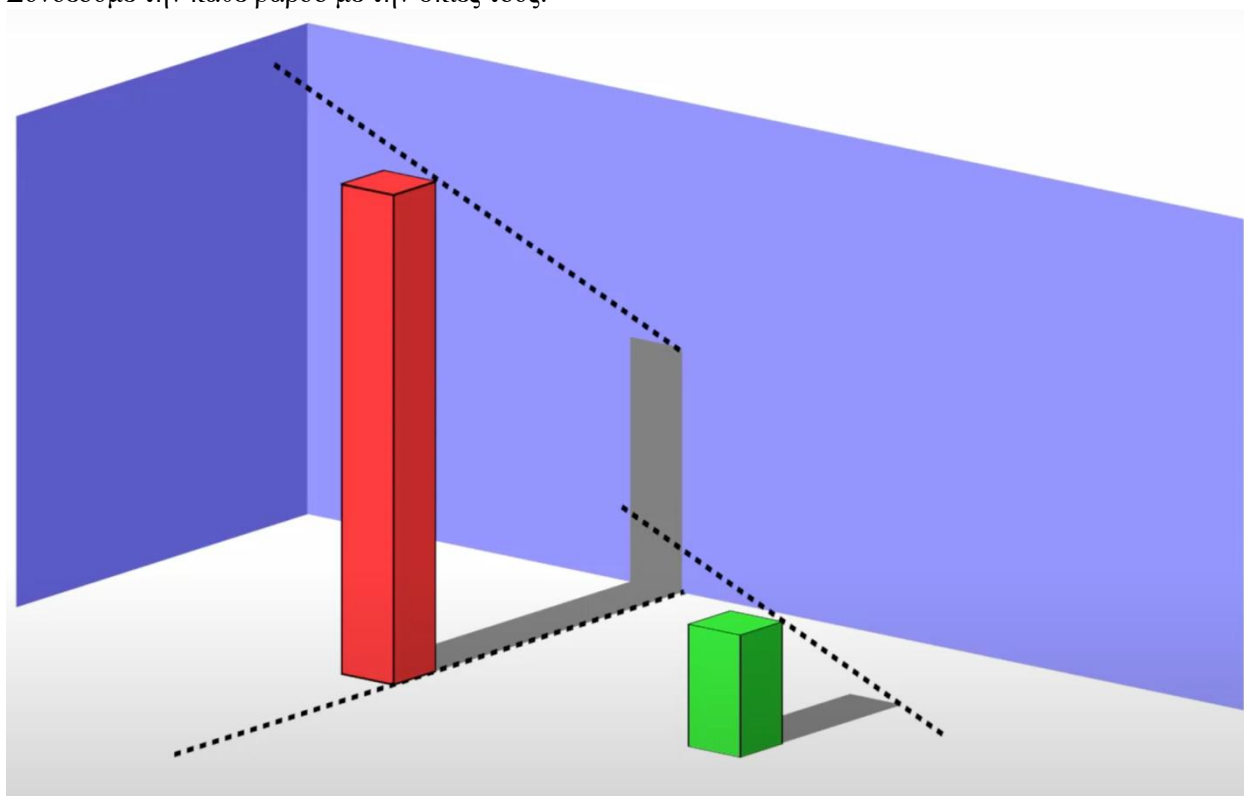
Πρόβλημα 3

Βρείτε το ύψος της κόκκινης ράβδου.

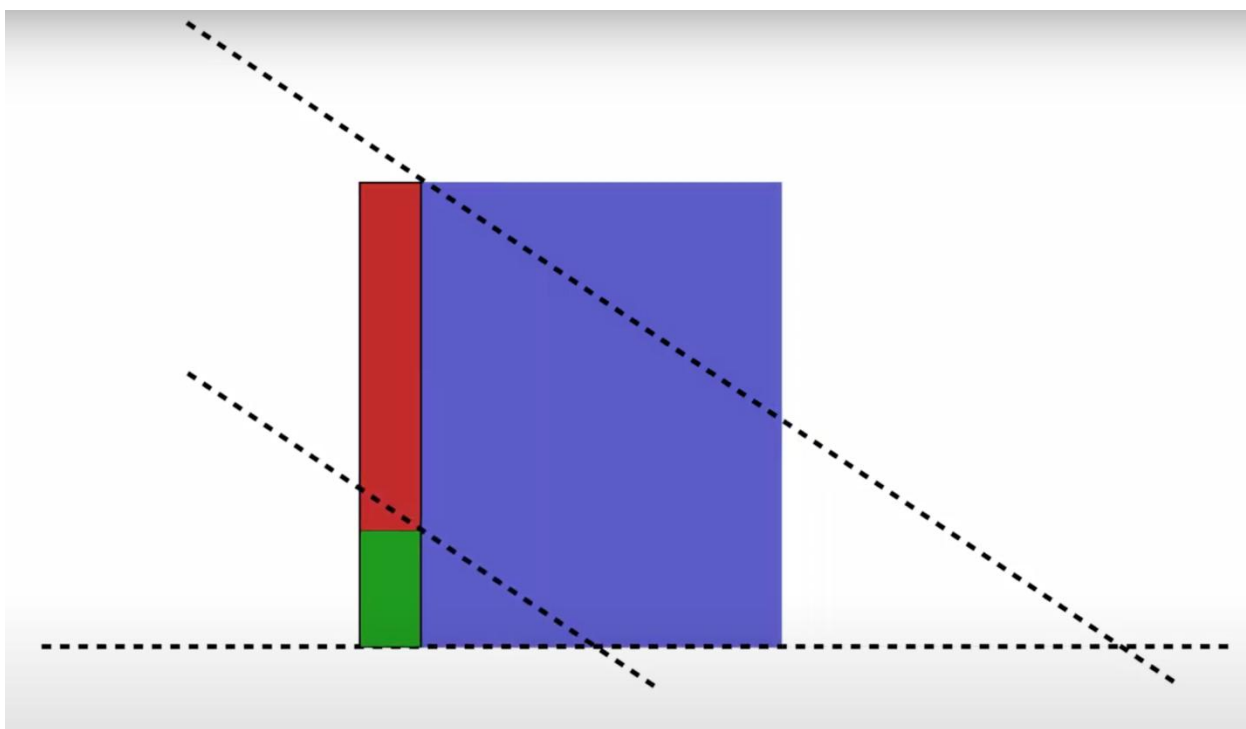
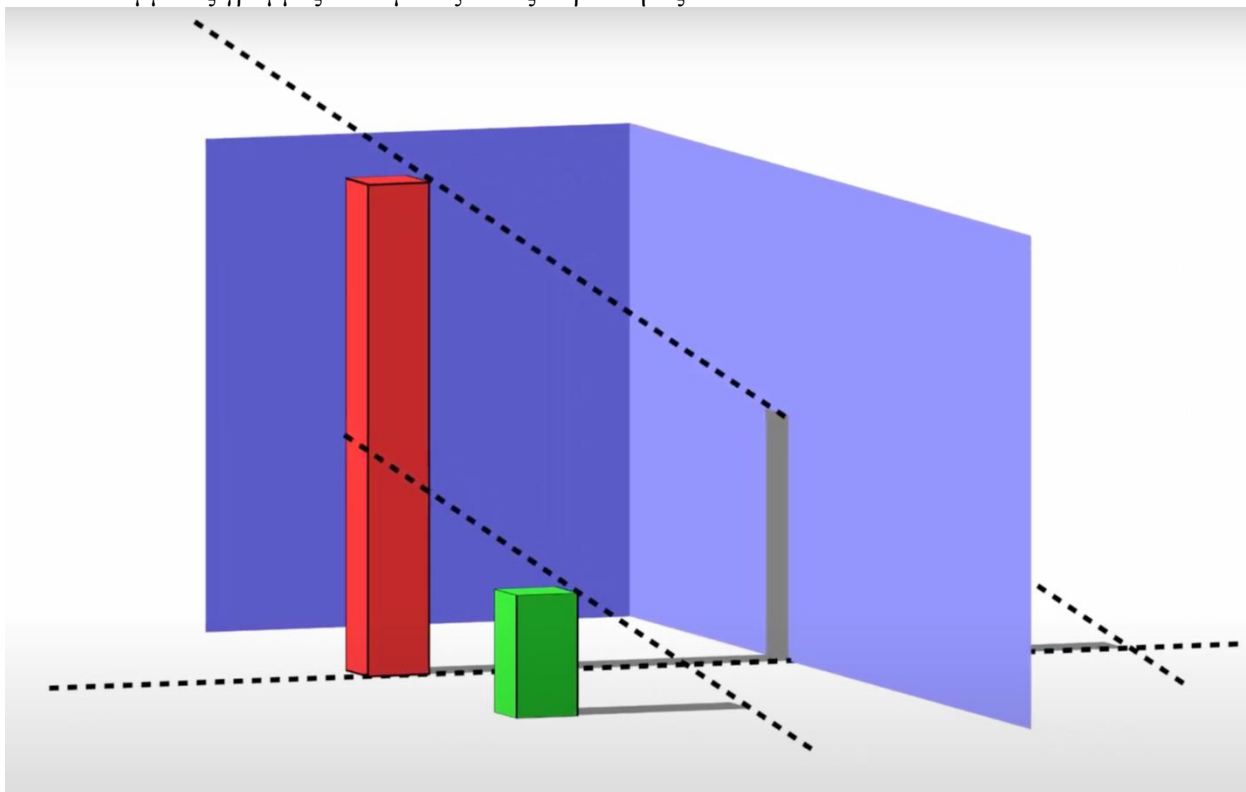


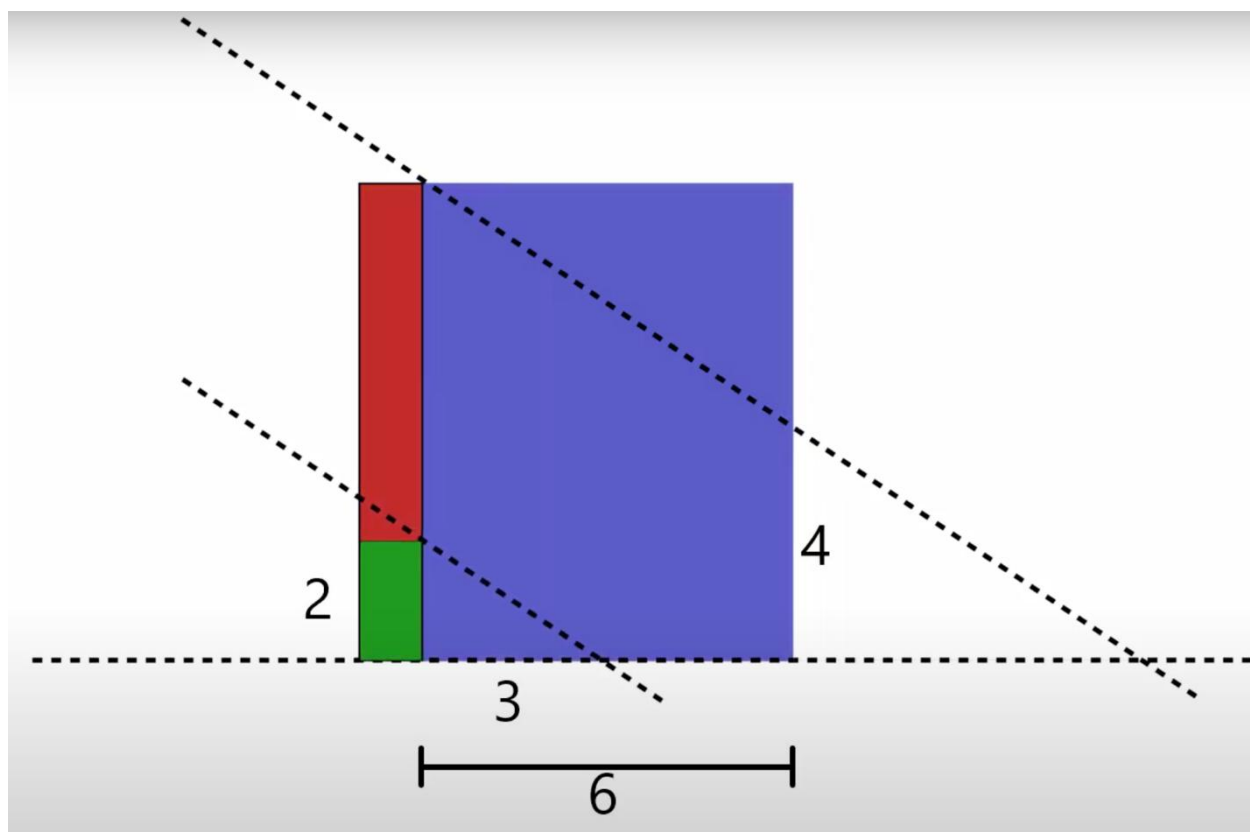
Λύση:

Συνδέουμε την κάθε ράβδο με την σκιές τους:

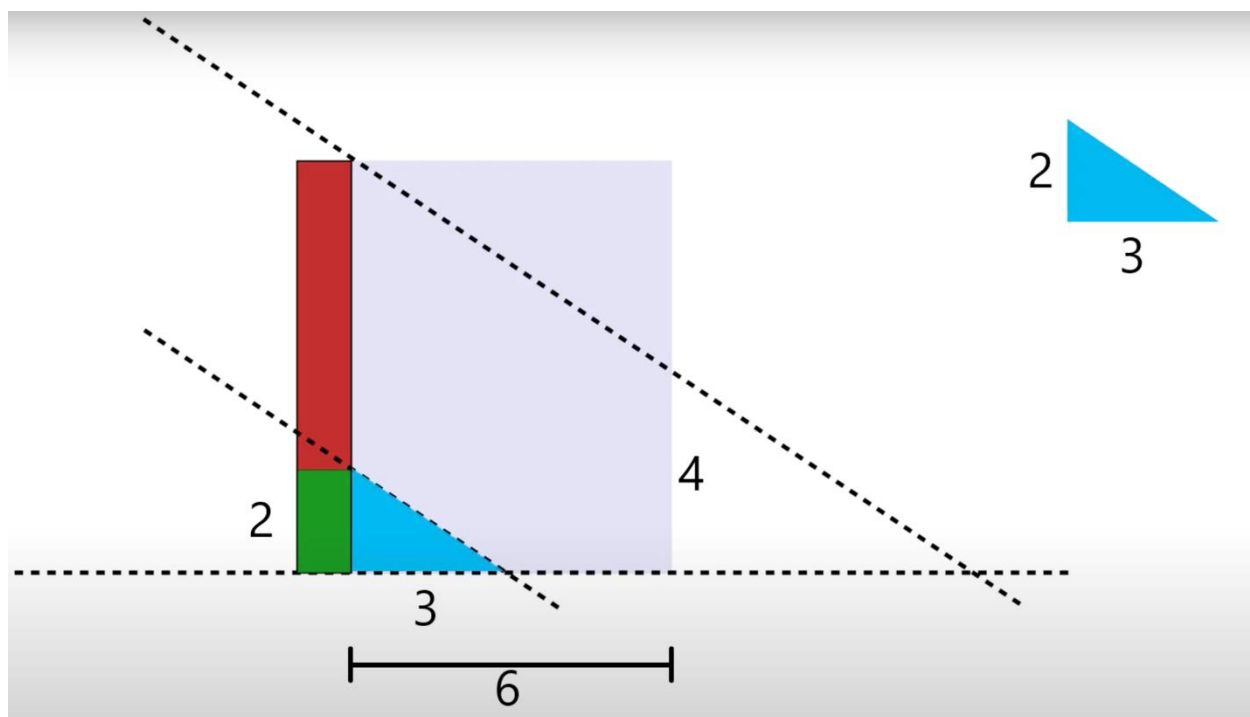


Οι διακεκομμένες γραμμές είναι μεταξύ τους παράλληλες:

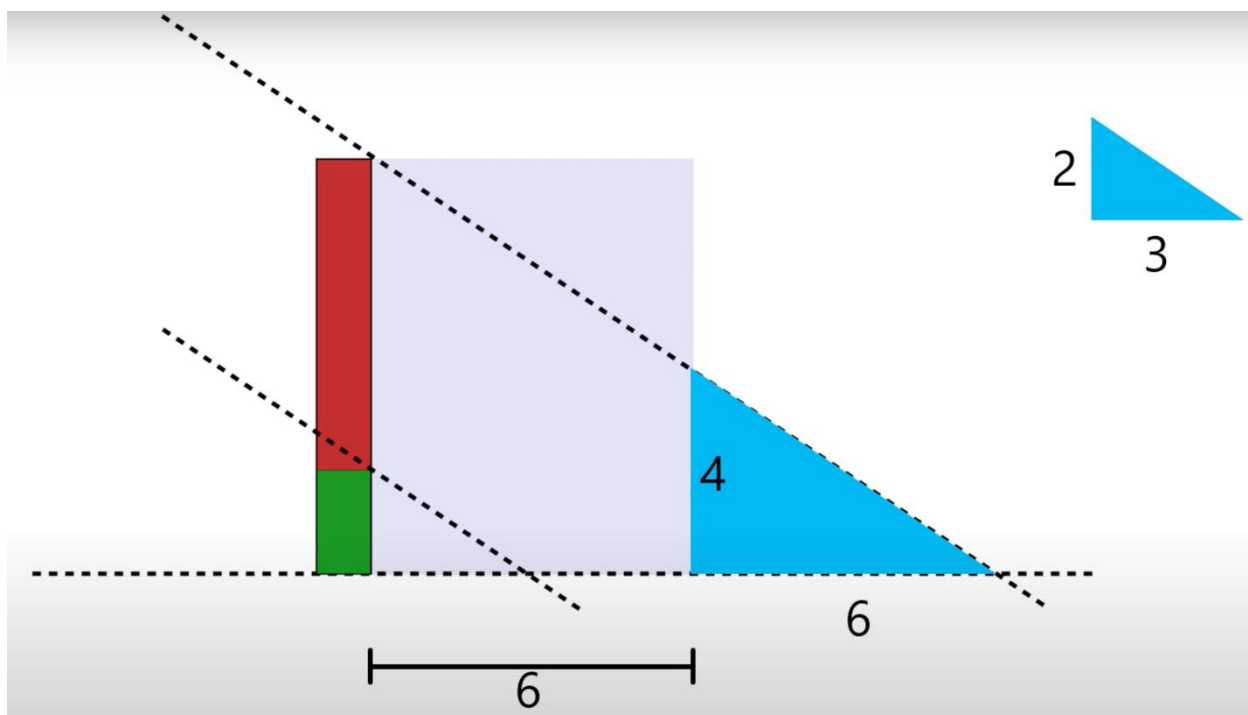
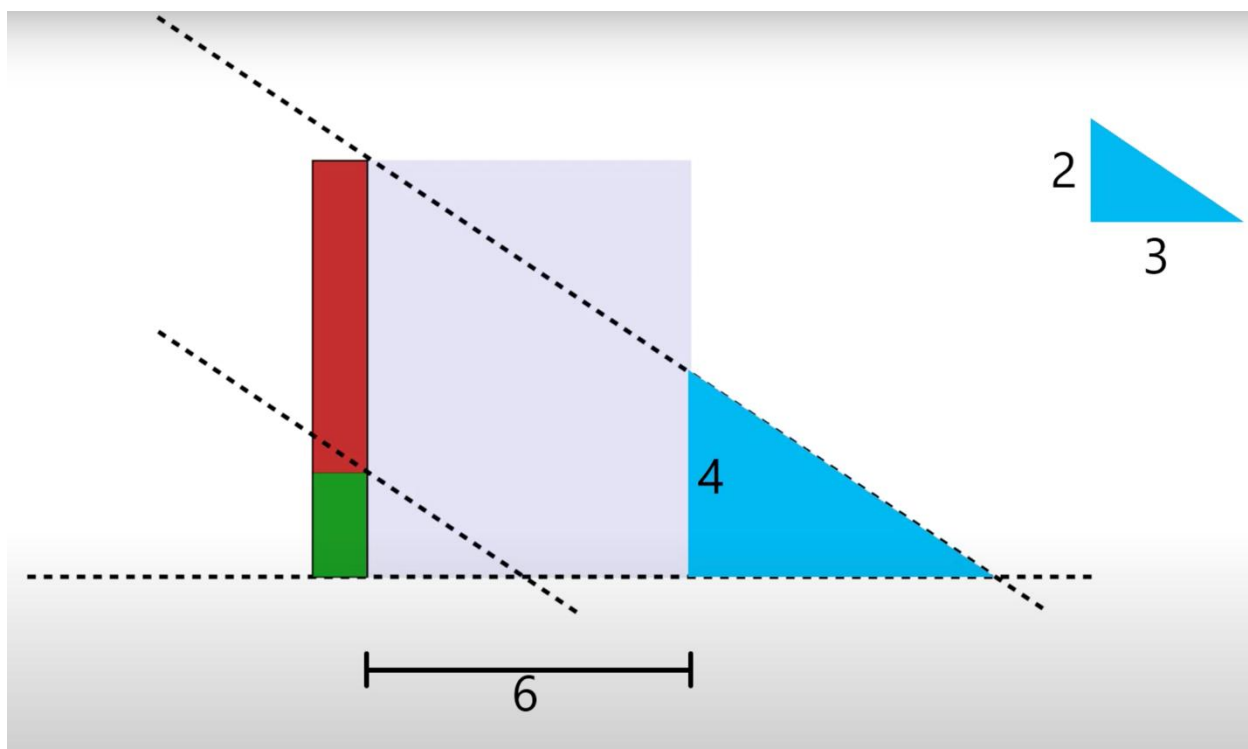


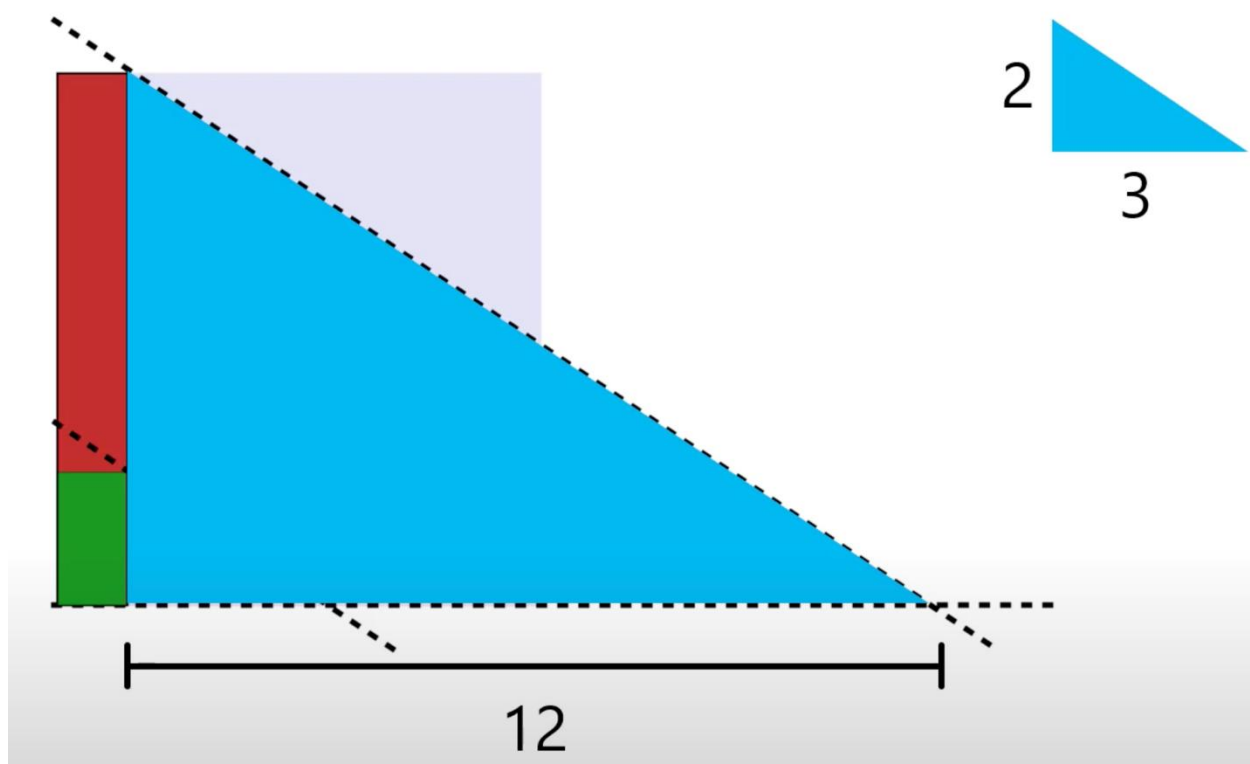
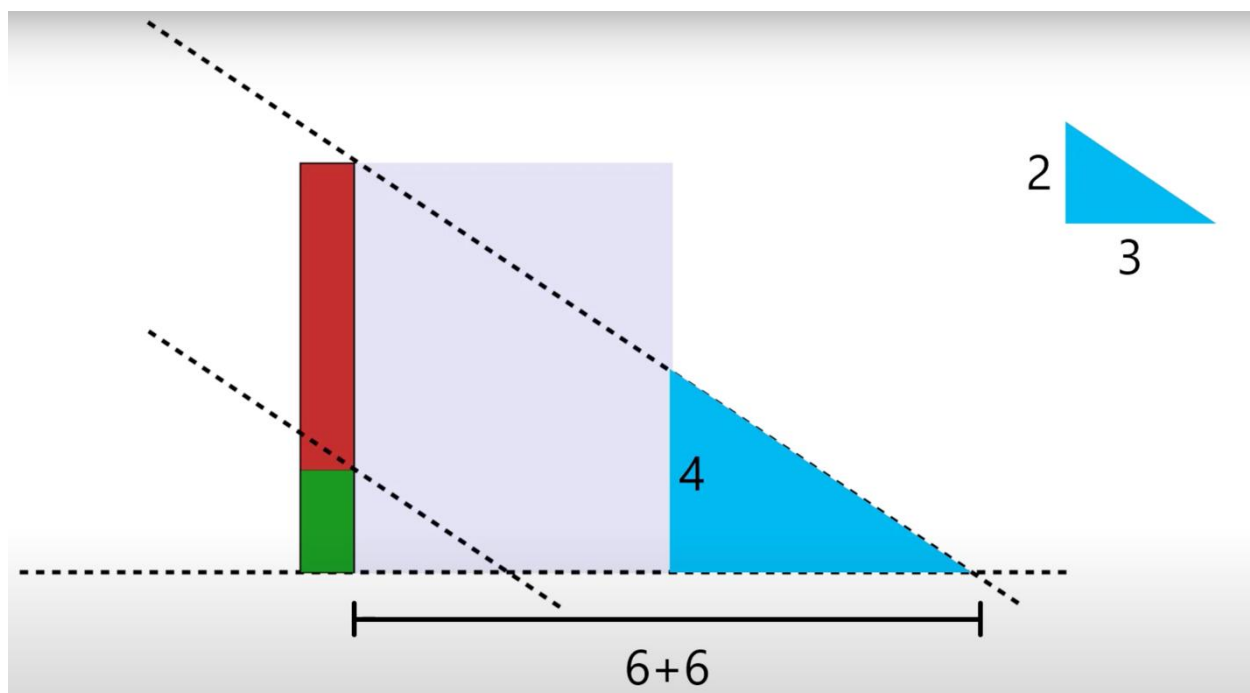


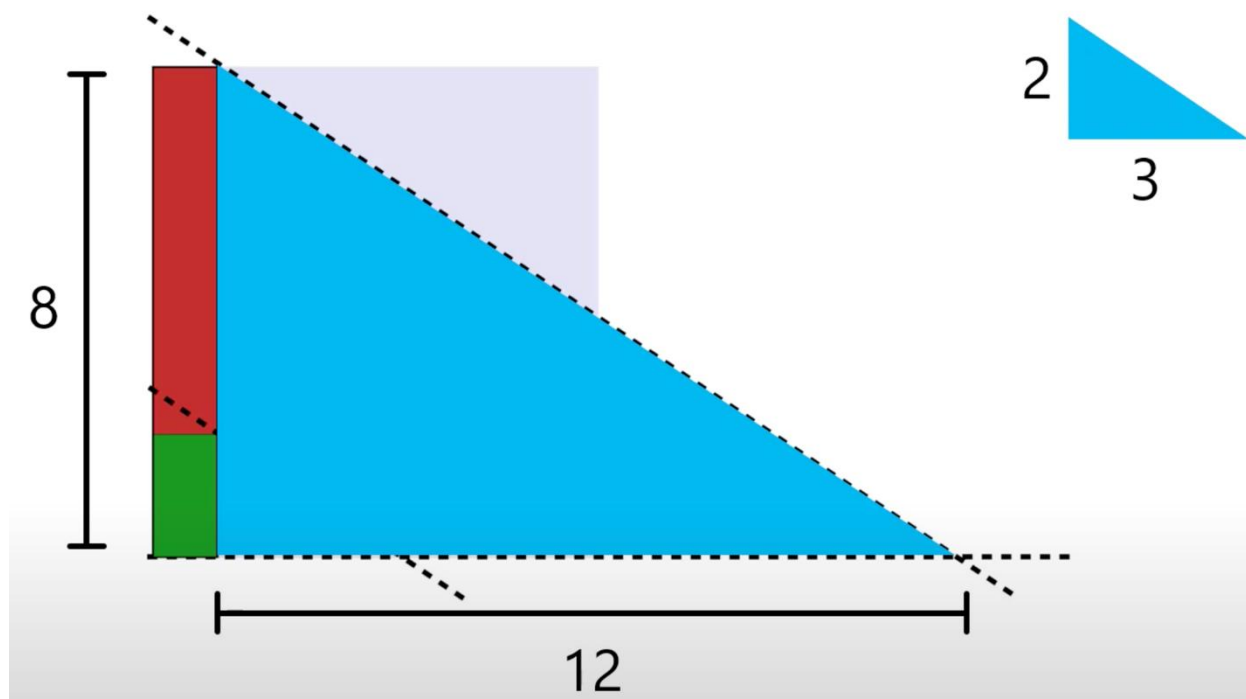
Όλα τα σχηματιζόμενα τρίγωνα είναι σμίκρυνση ή μεγέθυνση του μπλε τριγώνου που φαίνεται στο σχήμα παρακάτω.



Επομένως, τα τρίγωνα διατηρούν σταθερό λόγο $\frac{2}{3}$ ως προς τις κάθετες προσκείμενες πλευρές.







Οπότε το ύψος της κόκκινης ράβδου είναι 8.

Πρόβλημα 4

Για όλα τα $a, b, c > 0$, να δείξετε ότι: $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} > \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

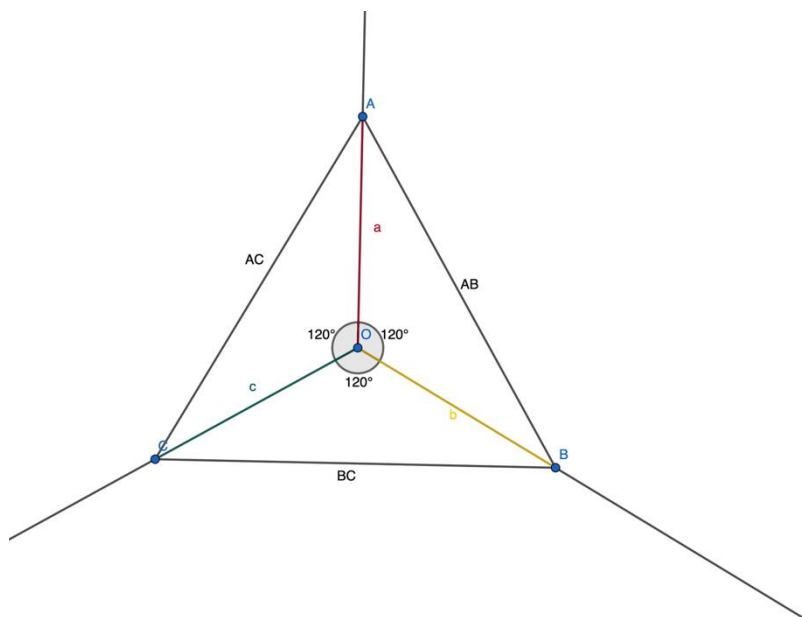
Λύση:

Η ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί γεωμετρικά. Θεωρούμε σημείο O στο επίπεδο και σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $OA = a$, $OB = b$ και $OC = c$ έτσι ώστε $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$. Εφαρμόζουμε τον νόμο του συνημιτόνου στα τρίγωνα OAB , OBC και OAC , τότε

$$AB^2 = a^2 + b^2 + ab \cos(120^\circ) = a^2 + b^2 + ab \cos(120^\circ)$$

$$BC^2 = b^2 + c^2 + bc \cos(120^\circ) = b^2 + c^2 + bc \cos(120^\circ)$$

$$AC^2 = a^2 + c^2 + ac \cos(120^\circ) = a^2 + c^2 + ac \cos(120^\circ)$$



και στη συνέχεια έχουμε την τριγωνική ανισότητα $AB + BC > AC$.

Ταυτότητα του Euler

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c , a, b, c ισχύει:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \end{aligned}$$

Ισχύει επίσης:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a + b + c = 0 \text{ ή } a = b = c$$

Πρόβλημα (Putnam 2006 - B1)

Να δείξετε ότι η καμπύλη $x^3 + 3xy + y^3 = 1$ περιέχει μόνο ένα σύνολο από διακεκριμένα σημεία A, B, και C, που σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Να υπολογιστεί το εμβαδό του.

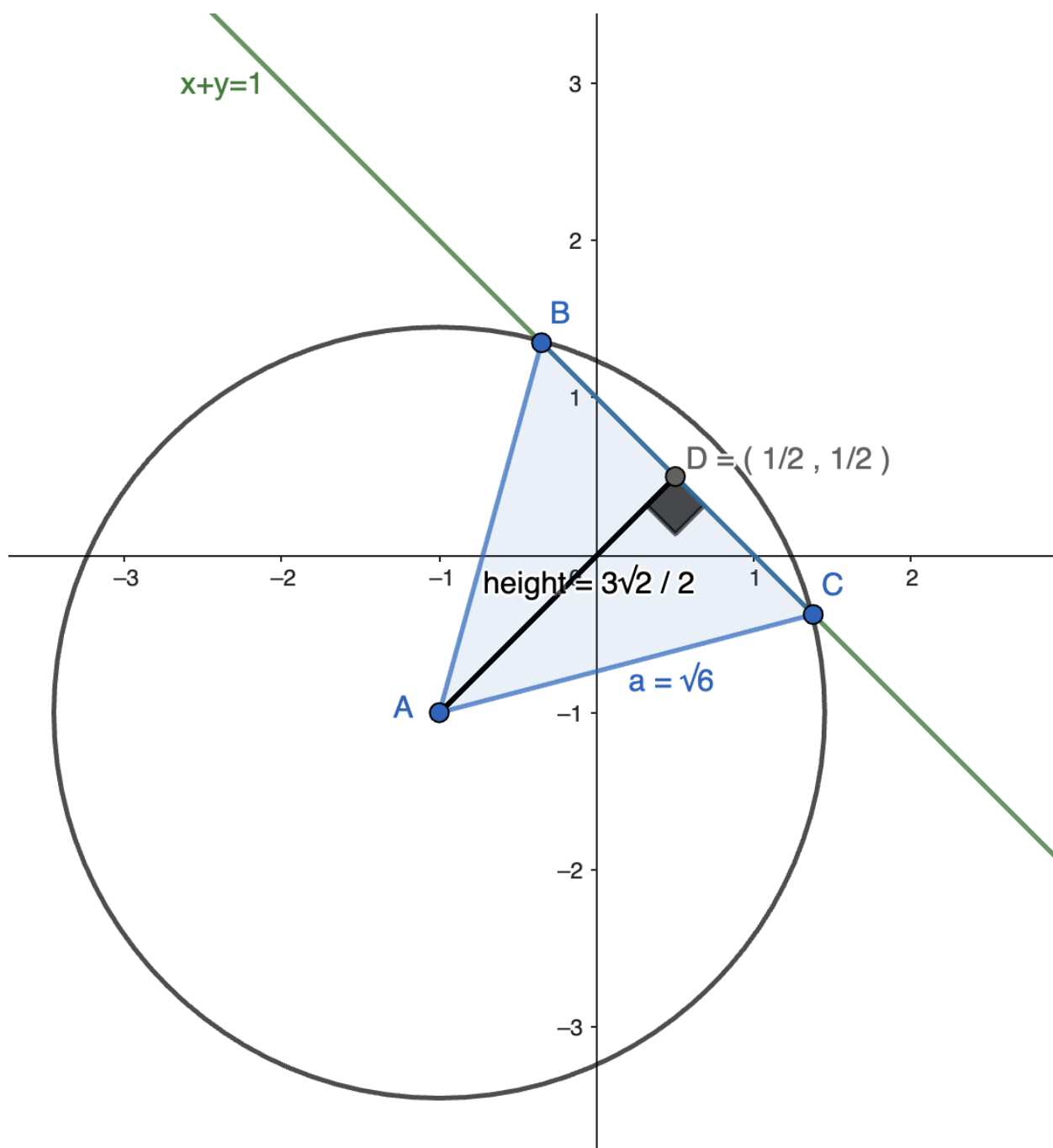
Λύση:

Η εξίσωση ισοδυναμεί με:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + (-1)^3 - 3xy(-1) &= 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + (-1)^3 = 3xy(-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + y - 1 = 0 \text{ ή } x = y = -1 \end{aligned}$$

Άρα τα σημεία της καμπύλης είναι:

- Είτε $x + y - 1 = 0$
- Είτε $x = y = -1$



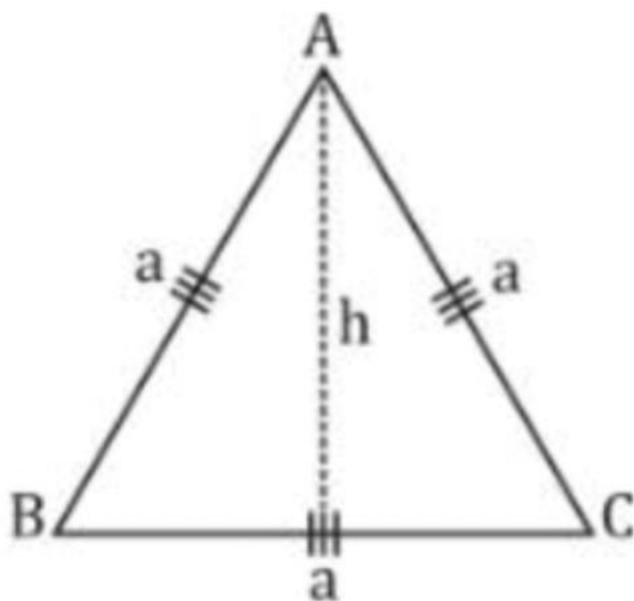
Το σημείο $(-1,-1)$ είναι απομονωμένο. Τα υπόλοιπα βρίσκονται στην ευθεία $y = -x + 1$.

Το τρίγωνο σχηματίζεται από το $(-1,-1)$ και δύο σημεία της ευθείας $y = -x + 1$.

Η απόσταση του σημείου $(-1,-1)$ από την ευθεία είναι η ίδια απόσταση μεταξύ των σημείων $(-1,-1)$ και $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$\sqrt{(-1 - \frac{1}{2})^2 + (-1 - \frac{1}{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι:



$$\text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow a = \sqrt{6}$$

Το εμβαδό είναι:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΚΙΕΣ ΤΟΥ ΗΛΙΟΥ ΣΤΗ ΣΚΙΑ ΤΗΣ ΣΕΛΗΝΗΣ

Κατσαϊτη Αλίκη, Φυσικός

Μια Ιστορική Ματιά στις Σκιές

Το γεγονός ότι οι αρχαίοι Έλληνες είχαν κατορθώσει συνδυάζοντας λογική και φαντασία να βάλουν τα θεμέλια σε όλες σχεδόν τις επιστήμες, είναι παγκόσμια γνωστό. Ειδικότερα στον τομέα της Αστρονομίας είναι εκπληκτικές οι μετρήσεις που έκαναν για τα μεγέθη και τις αποστάσεις των πιο σημαντικών ουράνιων σωμάτων της εποχής τους, της γης του ήλιου και της σελήνης, με απλούστατα μέσα, στοιχειώδεις γνώσεις γεωμετρίας και χρησιμοποιώντας ουσιαστικά το φως και τη σκιά.

Από την αρχαιότητα, οι σκιές μάς προσέφεραν γνώση. Ο Ερατοσθένης μέτρησε την περιφέρεια της γης από τη διαφορά σκιάς μεταξύ δύο πόλεων. Ο Αρίσταρχος υπολόγισε το μέγεθος της σελήνης σε σχέση με αυτό της γης, και την απόσταση της γης - ήλιου σε σχέση με την απόσταση γης – σελήνης. Για τον πρώτο υπολογισμό αξιοποίησε μια ολική έκλειψη σελήνης και σημείωσε τη διάρκεια κατά την οποία η σελήνη παρέμενε τελείως μέσα στην σκιά της γης.

Σήμερα μπορούμε να διδάξουμε τις ίδιες αρχές μέσα από εφαρμογές που συνδέουν καθημερινά φαινόμενα με την αστρονομία, όπως η σκιά ενός στύλου ή η σκιά της σελήνης στη γη κατά την έκλειψη.

Στόχοι

- Υπολογισμός του μήκους της σκιάς ενός αντικειμένου με χρήση τριγωνομετρίας.
- Κατανόηση της σχέσης μεταξύ γωνίας και σκιάς
- Σύνδεση γεωμετρίας με την ερμηνεία αστρονομικών φαινομένων όπως η έκλειψη ηλίου.

Πώς σχηματίζονται οι σκιές;

Η σκιά είναι μια περιοχή που σχηματίζεται πίσω από αντικείμενα λόγω της παρεμπόδισης της πορείας των ακτινών του ηλίου. Όταν ένα αδιαφανές αντικείμενο (δηλαδή αυτό το οποίο δεν επιτρέπει στο φως να περάσει από μέσα) τοποθετείται στην πορεία των ακτινών, το αντικείμενο εμφανίζει σκιά σε ένα άλλο αντικείμενο

όπως πχ στο έδαφος ή στον τοίχο. Αυτό συμβαίνει διότι οι ακτίνες ταξιδεύουν ευθύγραμμα, δεν λυγίζουν και δεν περνούν πίσω από τα αντικείμενα αυτά.

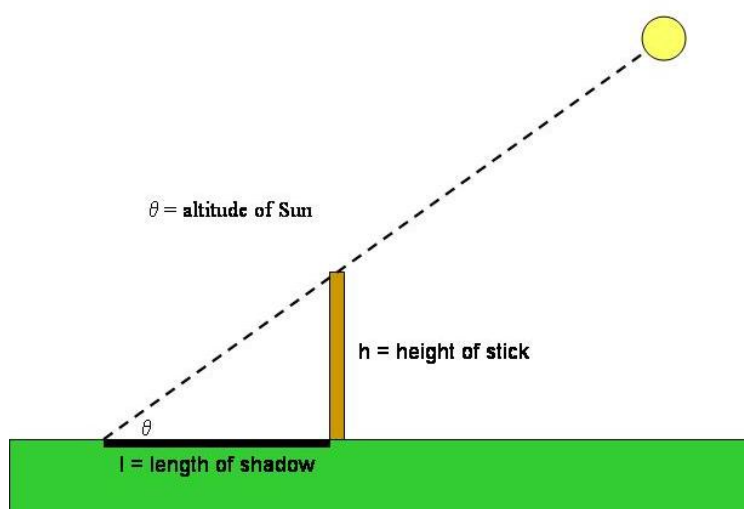
Όταν ο ήλιος φωτίζει ένα αντικείμενο στη γη, σχηματίζεται σκιά πίσω του. Το μήκος της σκιάς που δημιουργείται εξαρτάται από τη θέση του ήλιου στον ουρανό. Για παράδειγμα, οι σκιές που σχηματίζονται νωρίς το πρωί και αργά το απόγευμα είναι λιγότερο σκοτεινές και έχουν μεγαλύτερο μήκος σε σχέση με τις σκιές το μεσημέρι, όταν ο ήλιος είναι κατακόρυφος.

Αυτό περιγράφεται με τριγωνομετρία – σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο με γνωστή γωνία και πλευρά!

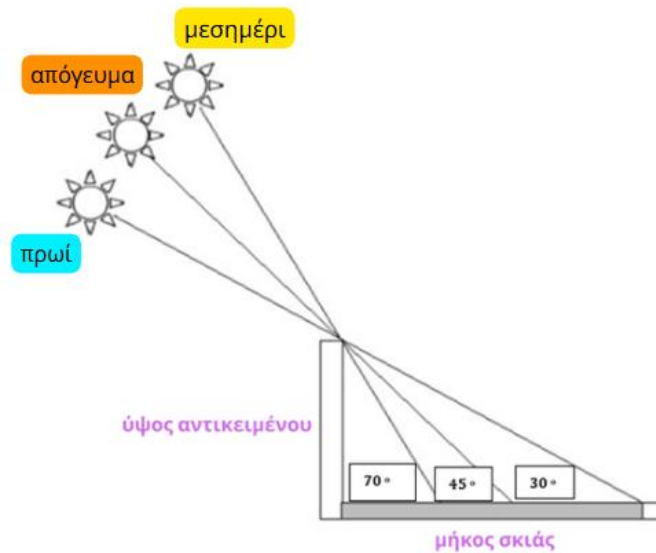
Η ίδια γεωμετρική λογική χρησιμοποιείται και κατά την ηλιακή έκλειψη, όταν η σελήνη ρίχνει σκιά στη γη!

Μέρος Α: Σκιά Αντικειμένου στη Γη

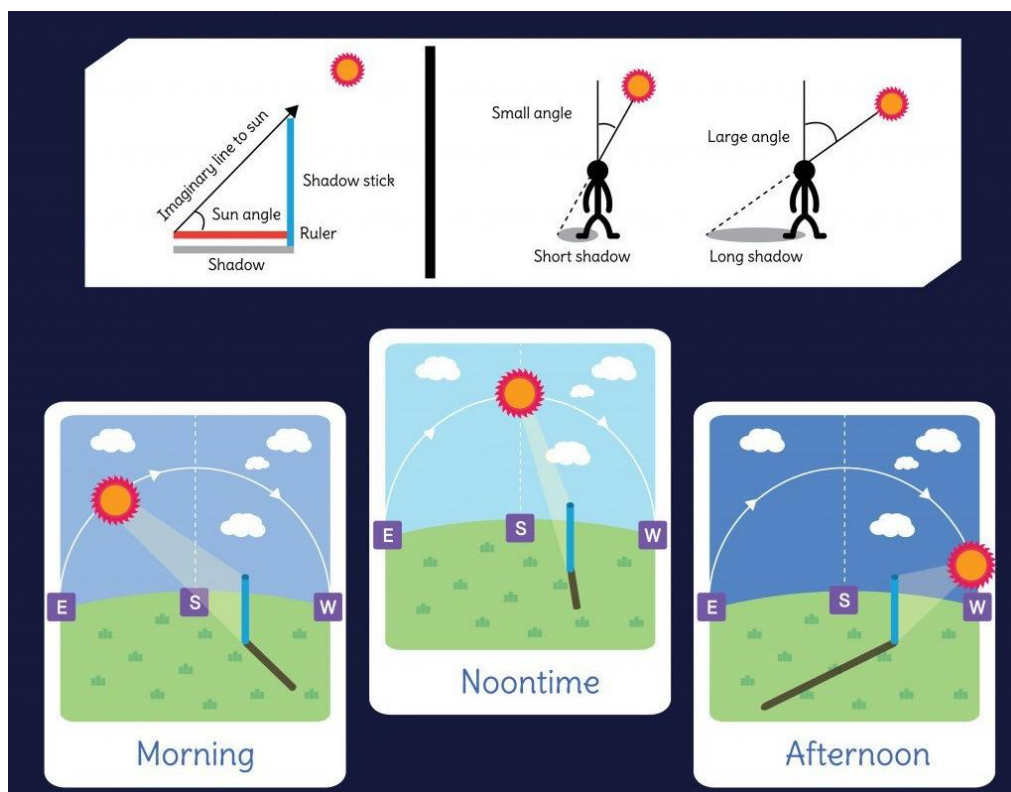
Ας δούμε τι γίνεται όταν το φως του ήλιου πέφτει πάνω σε ένα αντικείμενο. Όπως βλέπουμε και στα παρακάτω σχήματα, δημιουργείται ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο οι δύο κάθετες πλευρές αντιστοιχούν στο ύψος του αντικειμένου και στο μήκος της σκιάς του όταν αυτό φωτίζεται από τον ήλιο. Η γωνία θ που σχηματίζεται εξαρτάται από τη θέση του ηλίου.



Όπως βλέπουμε στις παρακάτω εικόνες, όσο ο ήλιος βρίσκεται ψηλά στον ουρανό, τόσο μεγαλύτερη είναι η γωνία θ και τόσο μικρότερο είναι το μήκος της σκιάς του αντικειμένου. Αυτό συμβαίνει τις μεσημεριανές ώρες όπου ο ήλιος βρίσκεται περίπου στις 70 μοίρες.



Τις πρωινές και τις απογευματινές ώρες, όπου η γωνία του ήλιου είναι από 30 έως 45 μοίρες, όπως στο σχήμα, ο ήλιος βρίσκεται πιο χαμηλά στον ουρανό και το μήκος της σκιάς θα αυξάνεται. Το μέγιστο μήκος σκιάς μέσα στη μέρα θα παρατηρείται όταν ο ήλιος βρίσκεται πολύ χαμηλά, δηλαδή στις μικρότερες γωνίες.



Για να υπολογίσουμε το μήκος της σκιάς ενός αντικειμένου όταν αυτό φωτίζεται θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της εφαπτομένης σε ορθογώνιο τρίγωνο, όπως την διδαχθήκαμε στη γεωμετρία της Β' Γυμνασίου.

Η εφαπτομένη της γωνίας θ στο ορθογώνιο τρίγωνο που προκύπτει ισούται με το πηλίκο του ύψους του αντικειμένου προς τη σκιά του:

$$\text{εφαπτομένη } \theta = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}} = \frac{\text{ύψος αντικειμένου}}{\text{μήκος σκιάς}}$$

Αντίστοιχα, αν ψάχνουμε το μήκος της σκιάς προκύπτει ότι:

$$\text{μήκος σκιάς} = \frac{\text{ύψος αντικειμένου}}{\text{εφ}\theta}$$

Ας το δούμε πειραματικά:

Θα χρησιμοποιήσουμε έναν φακό που θα έχει τον ρόλο του ήλιου. Με την χρήση του φακού θα φωτίζουμε {ένα αντικείμενο πχ μπουκάλι νερού, βιβλίο, χάρακα} συγκεκριμένου ύψους, το οποίο αρχικά θα μετρήσουμε και θα καταγράψουμε .

Θα ξεκινήσουμε να φωτίζουμε το αντικείμενο με τον φακό αρχίζοντας από μικρές γωνίες και θα αυξάνουμε σιγά σιγά τη γωνία που τον κρατάμε. Θα παρατηρούμε σε κάθε στάδιο το μήκος της σκιάς που σχηματίζεται πίσω από το αντικείμενο καθώς και το πόσο σκοτεινή ή πόσο αμυδρή εμφανίζεται η σκιά.

Αφού ολοκληρώσουμε την παρατήρηση αυτή θα καταγράψουμε θεωρητικά τα συμπεράσματά μας.

1. Πότε έχουμε τη μικρότερη και πότε τη μεγαλύτερη σκιά;

.....

2. Πότε εμφανίζεται πιο έντονη και πότε πιο αμυδρή η σκιά;

.....

Στην συνέχεια θα συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα ως εξής:

Στην 1^η στήλη έχουν καταγραφεί συγκεκριμένες τιμές της γωνίας που κρατάμε τον φακό. Αρχικά θα πρέπει να ανατρέξουμε στον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών από το βιβλίο των μαθηματικών της Β τάξης και να συμπληρώσουμε την 2^η στήλη με την εφαπτομένη της κάθε γωνίας.

Στη συνέχεια, με γνωστό το ύψος του αντικειμένου (που μετρήσαμε προηγουμένως) θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του μήκους της σκιάς για κάθε τιμή της εφθ και θα καταγράψουμε τις τιμές του μήκους (σε cm) στην 3^η στήλη

Ύψος αντικειμένου σε cm:

.....

Γωνία θ (°)	εφθ	μήκος σκιάς = $\frac{\text{ύψος αντικειμένου}}{\text{εφθ}}$
10		
20		
30		
40		
50		
60		
70		

Σε ποια γωνία έχουμε τη μικρότερη και σε ποια τη μεγαλύτερη σκιά; Συμφωνούν τα πειραματικά δεδομένα με την υπόθεση που κάναμε στην αρχή για τον τρόπο που μεταβάλλεται το μήκος της σκιάς;

.....

.....

.....

.....

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 1° - 89°							
Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	Γωνία (σε μοίρες)	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

Με βάση την προηγούμενη άσκηση προσπαθήστε να απαντήσετε μόνες σας/ μόνοι σας στις παρακάτω ερωτήσεις σχετικά με τη θέση του ήλιου στον ουρανό:

1. Ένας στύλος έχει ύψος 3 μέτρα. Πόσο είναι το μήκος της σκιάς του όταν:

α) Ο Ήλιος έχει ύψος 30° (πρωινές ώρες);

.....

..

.....

β) Ο Ήλιος έχει ύψος 70° (μεσημεριανές ώρες);

.....

.....

γ) Ο Ήλιος έχει ύψος 45° (απογευματινές ώρες);

.....

.....

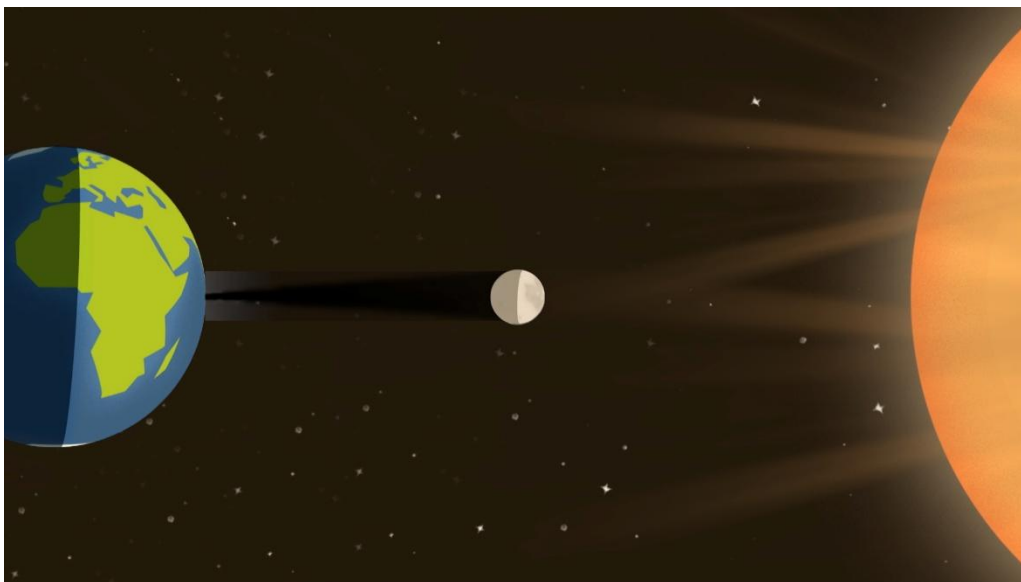
2. Αν η σκιά μεγαλώνει, τι συμπεραίνουμε για τη θέση του Ήλιου στον ουρανό;

.....

.....

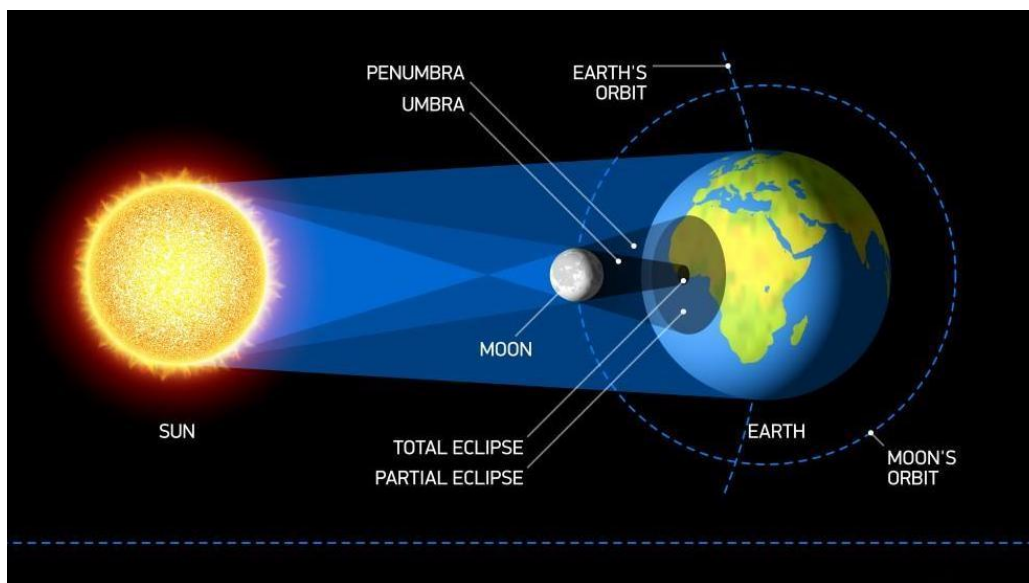
Μέρος Β: Σκιά Σελήνης και Έκλειψη Ηλίου

Το φως ταξιδεύει από τα άκρα του ήλιου στα άκρα της σελήνης. Η σελήνη όπως όλα τα αδιαφανή σώματα όταν φωτίζεται δημιουργεί σκιά. Η σκιά της σελήνης έχει σχήμα κώνου. Όταν τυχαίνει η σκιά αυτή να προσπίπτει στην επιφάνεια της γης τότε λέμε ότι έχουμε έκλειψη ηλίου!



Συγκεκριμένα, έκλειψη ηλίου ονομάζουμε το φαινόμενο κατά το οποίο η σελήνη βρίσκεται ανάμεσα στον ήλιο και στη γη με τέτοιο τρόπο ώστε να αποκρύπτει το φως του ήλιου το οποίο θα έφτανε στη γη.

Μια ολική έκλειψη ηλίου είναι ένα σπάνιο φαινόμενο όπου ο δίσκος της σελήνης κρύβει κάθε ίχνος του φωτός ηλιακού από τη γη. Αυτό μερικά και διαρκεί λεπτά



συμβαίνει διότι ο παρατηρητής στη γη, για εκείνο το χρονικό διάστημα, βρίσκεται μέσα στη σκιά της σελήνης! Η ολική έκλειψη συμβαίνει όταν η σελήνη βρίσκεται πιο κοντά στη γη (στο περίγειο),

όπου η σελήνη φαίνεται μεγαλύτερη στον ουρανό και η άκρη της σκιάς της (η μύτη του κώνου) πέφτει πάνω στην επιφάνεια της γης.

Πάλι με χρήση του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος της σκιάς ☺! Δηλαδή την απόσταση από τη Σελήνη μέχρι την άκρη της σκιάς της κατά την ολική έκλειψη ηλίου. Στο τρίγωνο που σχηματίζει η σκιά, η απέναντι κάθετη πλευρά είναι η ακτίνα της σελήνης και η προσκείμενη είναι το μήκος L (η γωνία θ αφορά την γεωμετρία του κώνου της σκιάς)

$$\text{μήκος σκιάς } L = \frac{\text{ακτίνα σελήνης}}{\varepsilon\varphi\theta}$$

Προσομοίωση έκλειψης ηλίου από Σιτσανλής Ηλίας:

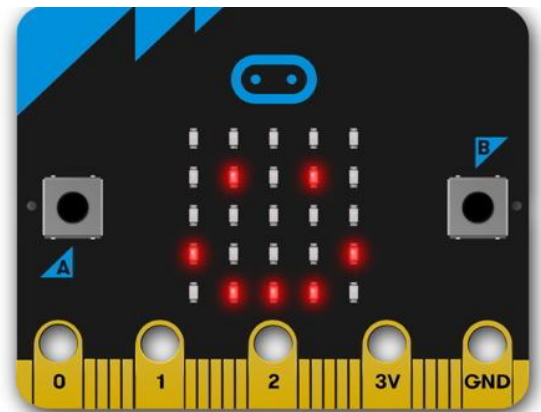
https://www.seilias.gr/index.php?option=com_content&task=view&id=156&Itemid=63

Η ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ ΠΛΑΤΦΟΡΜΑ MICRO:BIT & ΠΩΣ ΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΟΥΜΕ ΤΗ ΔΙΚΗ ΜΑΣ ΣΥΣΚΕΥΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΗΜΕΝΩΝ ΜΗΝΥΜΑΤΩΝ

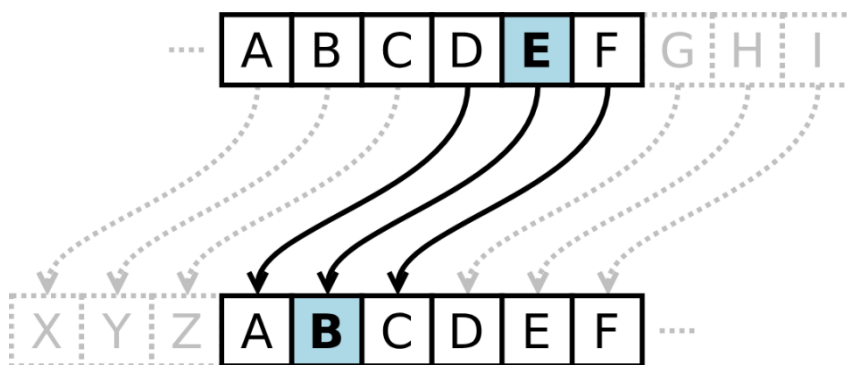
Ανατολιωτάκης Νικόλαος, Υποψήφιος Διδάκτορας Ρομποτικής

Η εκπαιδευτική ρομποτική αποτελεί μια διαθεματική προσέγγιση που ενισχύει την ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων, υπολογιστικής σκέψης και δημιουργικότητας μέσα από τη χρήση προγραμματιζόμενων συσκευών και εργαλείων. Μέσα από δραστηριότητες σχεδιασμού, προγραμματισμού και πειραματισμού με ρομποτικά συστήματα, δίνεται η δυνατότητα να ανακαλυφθούν έννοιες των μαθηματικών, της φυσικής, της τεχνολογίας και της πληροφορικής μέσα από πρακτικά παραδείγματα.

Το BBC micro:bit είναι μια μικρών διαστάσεων αλλά ισχυρή προγραμματιζόμενη πλακέτα, σχεδιασμένη ειδικά για εκπαιδευτική χρήση. Διαθέτει πλέγμα 25 LED που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εμφάνιση συμβόλων, αριθμών και μηνυμάτων. Περιλαμβάνει δύο κουμπιά εισόδου (Α και Β), αισθητήρα θερμοκρασίας, αισθητήρα φωτός, επιταχυνσιόμετρο (accelerometer) που ανιχνεύει κίνηση και κλίση, καθώς και μαγνητόμετρο (πυξίδα). Επιπλέον, έχει δυνατότητα ασύρματης επικοινωνίας μέσω ραδιοκυμάτων και Bluetooth, που επιτρέπει τη σύνδεση με άλλες συσκευές ή με άλλες πλακέτες micro:bit. Διαθέτει θύρες για σύνδεση με εξωτερικά κυκλώματα και μπορεί να προγραμματιστεί είτε με οπτικό περιβάλλον (MakeCode) είτε με γλώσσες κειμένου όπως η Python. Η πολυλειτουργικότητα και η απλότητά του το καθιστούν ιδανικό για δραστηριότητες STEM που εστιάζουν τόσο στον προγραμματισμό όσο και στην αλληλεπίδραση με τον φυσικό κόσμο.



Η κρυπτογραφία βρίσκει εφαρμογή σε πλήθος καθημερινών τεχνολογιών και δραστηριοτήτων, στις οποίες απαιτείται ασφάλεια επικοινωνίας ή προστασία προσωπικών δεδομένων. Χρησιμοποιείται στην ηλεκτρονική αλληλογραφία (email), στις διαδικτυακές τραπεζικές συναλλαγές, στην αποστολή μηνυμάτων σε εφαρμογές όπως το WhatsApp και το Signal, στην αποθήκευση κωδικών και ευαίσθητων πληροφοριών σε βάσεις δεδομένων, αλλά και σε ασύρματες συνδέσεις Wi-Fi και δίκτυα κινητής τηλεφωνίας. Παράλληλα, εφαρμόζεται σε τομείς όπως η εθνική ασφάλεια, η στρατιωτική επικοινωνία και η προστασία πνευματικής ιδιοκτησίας.



Στο πλαίσιο του εργαστηρίου, η κρυπτογραφία συνδυάζεται με τη χρήση του micro:bit, με στόχο την κατανόηση και εφαρμογή βασικών αρχών της μέσα από έναν βιωματικό, παιγνιώδη και τεχνολογικά ενισχυμένο τρόπο. Προγραμματισμός του micro:bit πραγματοποιείται ώστε να είναι δυνατή η κρυπτογράφηση και αποκρυπτογράφηση απλών μηνυμάτων, βασισμένων στον ιστορικό αλγόριθμο Caesar cipher. Παράλληλα, αξιοποιείται η δυνατότητα ασύρματης επικοινωνίας της συσκευής για τη μετάδοση κρυπτογραφημένων μηνυμάτων μεταξύ διαφορετικών micro:bit, δίνοντας στην έννοια της «μυστικής αποστολής» μια πρακτική και συνεργατική διάσταση.

Σε αυτό το εργαστήριο:

θα γνωρίσουμε:

- Τις βασικές δυνατότητες και αισθητήρες του micro:bit και πώς αξιοποιούνται σε διαδραστικές εφαρμογές.
- Την έννοια και τον σκοπό της κρυπτογράφησης.
- Την ιστορική προέλευση της κρυπτογραφίας μέσα από το Caesar Cipher.

θα κατανοήσουμε:

- Πώς οι λειτουργίες του **micro:bit** (όπως η εισαγωγή χαρακτήρων, η μετατροπή σε αριθμούς και η επικοινωνία μεταξύ συσκευών) μπορούν να αξιοποιηθούν για την επίλυση ενός προβλήματος **μεταφοράς και αποκρυπτογράφησης δεδομένων**.
- Την αξία της **υπολογιστικής σκέψης** και των **αλγορίθμων** μέσα από ένα πραγματικό σενάριο χρήσης.
- Την έννοια του "κλειδιού" (key) στην κρυπτογράφηση.
- Τη διαφορά μεταξύ κρυπτογράφησης και αποκρυπτογράφησης.
- Τις βασικές εφαρμογές της κρυπτογραφίας στην καθημερινή ψηφιακή ζωή (π.χ. συνομιλίες, ηλεκτρονικές συναλλαγές).

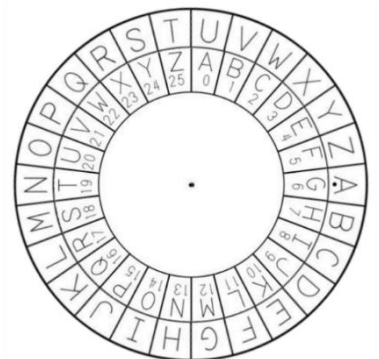
θα υλοποιήσουμε:

- Αλγόριθμο κρυπτογράφησης (Caesar Cipher) με χρήση micro:bit.
- Πρόγραμμα που μετατρέπει αλφαριθμητικά δεδομένα με βάση λογικούς κανόνες (shift).
- Ασύρματη επικοινωνία μεταξύ δύο micro:bit, όπου το ένα στέλνει κρυπτογραφημένο μήνυμα και το άλλο το λαμβάνει και το αποκρυπτογραφεί.

θα χρησιμοποιήσουμε:

- μεταβλητές,
- αλγορίθμους με επαναλήψεις και συνθήκες,
- είσοδο/έξοδο δεδομένων,
- ασύρματη επικοινωνία (radio module).

Ο **Caesar cipher** (Κρυπτογράφηση του Καίσαρα) είναι ένας από τους **αρχαιότερους και απλούστερους** τρόπους κρυπτογράφησης. Πήρε το όνομά του από τον **Ιούλιο Καίσαρα**, Ρωμαίο στρατηγό και πολιτικό, ο οποίος τον χρησιμοποιούσε για να στέλνει **μυστικά μηνύματα** στους στρατηγούς του. Η βασική του ιδέα ήταν απλή αλλά αποτελεσματική για την εποχή: κάθε γράμμα του μηνύματος αντικαθίσταται με ένα **άλλο γράμμα του αλφαβήτου**, μετακινημένο κατά έναν σταθερό αριθμό θέσεων.



Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κρυπτογραφήσουμε τη λέξη **"ΚΑΛΗΜΕΡΑ"** και επιλέγουμε μετατόπιση κατά **+3 θέσεις** στο αλφάβητο.

Κανονικό γράμμα +3 θέσεις

K	N
A	Δ
Λ	O
H	K
M	Π
E	Z
P	Y
A	Δ

Το κρυπτογραφημένο μήνυμα είναι: **"ΝΔΟΚΠΖΥΔ"**

Για να γίνει η **αποκρυπτογράφηση**, απαιτείται η γνώση του αριθμού μετατόπισης (που ονομάζεται "**κλειδί**") και η αντίστροφη μετατόπιση κατά -3 θέσεις.

Αν και ο Caesar cipher μπορεί να "σπάσει" εύκολα σήμερα με τη χρήση υπολογιστών ή δοκιμών, αποτελεί **θεμέλιο λίθο** της ιστορίας της κρυπτογραφίας και είναι ιδανικός για την κατανόηση βασικών εννοιών, όπως **κλειδί, αλγόριθμος και συμμετρική κρυπτογράφηση**.

Ερωτήσεις

- 11) Ποιες λειτουργίες του micro:bit μπορούμε να αξιοποιήσουμε για την υλοποίηση ενός συστήματος ασφαλούς αποστολής μηνυμάτων;
- ☐ Κουμπιά εισόδου (A & B)
 - ☐ LED οθόνη
 - ☐ Ραδιοεπικοινωνία
 - ☐ Αισθητήρας φωτός
 - ☐ Θερμοκρασία
- 12) Ποιος είναι ο βασικός σκοπός της κρυπτογράφησης;
- a) να σβήνουμε δεδομένα
 - b) να στέλνουμε μηνύματα πιο γρήγορα
 - c) να διατηρούμε τα δεδομένα απόρρητα
 - d) να συμπιέζουμε τα αρχεία
- 13) Κωδικοποιήστε τις παρακάτω λέξεις με το αντίστοιχο κλειδί τους:
- i. ΑΡΙΘΜΟΣ (με κλειδί – 3)
 - ii. ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ (με κλειδί – 5)
 - iii. ΗΛΙΟΣ (με κλειδί – 2)
- 14) Με ποιον τρόπο θα εφαρμόσουμε την κωδικοποίηση στο micro:bit;
- 15) Αν χρησιμοποιείται το ίδιο κρυπτογραφημένο μήνυμα ξανά και ξανά με το ίδιο κλειδί, ποιος κίνδυνος μπορεί να προκύψει; Σε ενδεχόμενο κίνδυνο πως θα προστατεύσουμε τα μηνύματα μας;
- 16) Υλοποιήστε κώδικα στο MakeCode που να μετατρέπει ένα μήνυμα σε κωδικοποιημένο μέσω του Caesar cipher.
- 17) Δοκιμάστε να φτιάξετε τον δικό σας αλγόριθμο κωδικοποίησης. Περιγράψτε τον παρακάτω:
-
-
-
-

- 18) Κάντε τις απαραίτητες αλλαγές στο πρόγραμμα σας για να κωδικοποιεί με τον νέο αλγόριθμο.
- 19) Χρησιμοποιήστε το radio module από δύο micro:bit ώστε να υλοποιήσουμε έναν πομπό που θα κωδικοποιεί και έναν δέκτη ο οποίος θα αποκωδικοποιεί ένα μήνυμα.
- 20) Χωριστείτε σε ομάδες και δοκιμάστε να στείλετε με τον micro:bit-πομπό ένα μυστικό μήνυμα σε μια άλλη ομάδα η οποία θα προσπαθήσει να το αποκωδικοποιήσει με τον αντίστοιχο micro:bit-δέκτη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

- I. <https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CF%81%CF%85%CF%80%CF%84%CE%BF%CE%B3%CF%81%CE%B1%CF%86%CE%AF%CE%B1>
- II. <https://makecode.microbit.org/>

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΟΙΗΣΗ

Παναγιώτης Κουνάβης, Μαθηματικός

Τα μαθηματικά στην ποίηση

Γράμματα και αριθμοί. Γραφή και αρίθμηση. Τα πρώτα πράγματα που μαθαίνει το παιδί. Στην αρχή τόσο η γραφή με την ανάγνωση όσο και η αρίθμηση με τις αριθμητικές πράξεις εξυπηρετούν πρακτικές καθημερινές ανάγκες. Σιγά-σιγά σε μερικούς ανθρώπους ξεπερνούν τις πρακτικές ανάγκες, ανεβαίνουν σ' άλλο πνευματικό επίπεδο και γίνονται πνευματικές δημιουργίες. Κορυφή της γραφής είναι η Ποίηση και της αρίθμησης τα Μαθηματικά. Τι είναι Ποίηση και τι Μαθηματικά; Υπάρχουν πολλές απαντήσεις τόσες όσοι και οι δημιουργοί τους ή ακόμα και όσοι οι αποδέκτες τους. Όποιος διαβάσει και αγαπάει την ποίηση καταλαβαίνει τι είναι ποίηση έστω κι αν δεν μπορεί να το διατυπώσει και να το εκφράσει. Το ίδιο, όποιος ασχολείται με τα μαθηματικά αντιλαμβάνεται ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο ένα χρήσιμο εργαλείο που βοηθούν στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων και στην κατανόηση άλλων επιστημών. Νοιώθουν ότι είναι και κάτι άλλο, έστω κι αν δεν μπορούν να το ορίσουν με ακρίβεια. Εκείνο που είναι σίγουρο είναι τόσο τα Μαθηματικά όσο και η Ποίηση είναι δύο πανάρχαιες πνευματικές και δημιουργικές δραστηριότητες του ανθρώπου, αυτόνομες και αυτοδύναμες, που βοηθούν στην κατανόηση του κόσμου και ομορφαίνουν την ζωή.

Μερικές ενδιαφέρουσες γνώμες και απόψεις τόσο επιστημόνων όσο και ποιητών.

Ο μεγάλος μαθηματικός Poincaré έγραψε:

«Ο επιστήμονας δε μελετά τη φύση επειδή είναι χρήσιμο να κάνει κάτι τέτοιο. Τη μελετάει, επειδή βρίσκει ευχαρίστηση σ' αυτό, και βρίσκει ευχαρίστηση, γιατί είναι όμορφη. Αν η φύση δεν ήταν όμορφη, δε θα ήταν άξια να τη γνωρίσουμε και η ζωή δε θα ήταν άξια να την ζήσουμε. Εννοώ την εσωτερική ομορφιά που έρχεται με την αρμονική τάξη των μερών και την οποία μία καθαρή ευφυΐα μπορεί να συλλάβει. Ένας μαθηματικός αντλεί από την εργασία του την ίδια συγκίνηση που αισθάνεται και ένας καλλιτέχνης, η χαρά του είναι το ίδιο μεγάλη και της ίδιας ποιότητας».

Σχετικά με το τι είναι ομορφιά ο Dirac γράφει:

«Η μαθηματική ομορφιά δεν μπορεί να οριστεί περισσότερο από ό,τι μπορεί να οριστεί η ομορφιά στην τέχνη, αλλά εκείνοι που μελετούν τα μαθηματικά δεν έχουν συνήθως καμία δυσκολία στο να την εκτιμούν».

Πραγματικά ακόμα και ο άνθρωπος που μαθαίνει τα στοιχειώδη μαθηματικά χαίρεται, όταν πετυχαίνει να αποδείξει και την πιο στερεότυπη άσκηση. Όταν μάλιστα η απόδειξη είναι << κομψή >> ή όταν ένα πρόβλημα που έλυσε ήταν << ωραίο >>, τότε αισθάνεται την ίδια ευχαρίστηση και αισθητική απόλαυση όση και με το διάβασμα ενός ποιήματος ή με την ακρόαση ενός μουσικού έργου ή ακόμα και με την παρακολούθηση ενός ωραίου κινηματογραφικού έργου ή μιας θεατρικής παράστασης. Ο άγγλος μαθηματικός Hardy στο βιβλίο του «Η απολογία ενός μαθηματικού, ένα από τα ποιητικότερα βιβλία που γράφτηκαν για τα μαθηματικά, σημειώνει: << Ο μαθηματικός, όπως ένας ζωγράφος ή ένας ποιητής, είναι ένας σχεδιαστής. Τα σχεδιαγράμμάτα του είναι φτιαγμένα με ιδέες. Ο ζωγράφος φτιάχνει σχέδια με σχήματα και χρώματα, ο ποιητής με λέξεις. Και στην ποίηση μετρούν οι ιδέες. Η ποίηση δεν είναι το πράγμα που λέγεται, αλλά ο τρόπος με τον οποίο το λέμε. Τα μαθηματικά σχεδιάσματα, όπως εκείνα ενός ζωγράφου ή ενός ποιητή, πρέπει να είναι όμορφα. Οι ιδέες, όπως τα

χρώματα ή οι λέξεις, πρέπει να ταιριάζουν μεταξύ τους με αρμονικό τρόπο. Η ομορφιά είναι το πρώτο κριτήριο: δεν υπάρχει μόνιμη θέση στον κόσμο για άσχημα μαθηματικά».

Ο ποιητής Paul Valery γράφει σχετικά:

«Μία κοπιώδης, αλλόκοτη μαθηματική ανακάλυψη μετράει λίγο. Μόνο η κομψότητα είναι χρήσιμη, γόνιμη, βαθιά, αφού δίχως αυτήν τα μαθηματικά είναι σπαζοκεφαλιές και μ' αυτήν μοντέλα. Η κομψότητα είναι ουσιαστική». Ενδιαφέρουσα είναι η άποψη του Ιάννη Ξενάκη, που συνδυάζει τα μαθηματικά με τη μουσική.

Λέει: «Τα μαθηματικά κινούνται στο χώρο της φαντασίας. Μαθηματική σκέψη είναι η ικανότητα της συνδυαστικής. Πολλοί μαθηματικοί εργάζονται σαν τους καλλιτέχνες, όπως οι καλλιτέχνες, ξεκινούν με μία σύλληψη που προσπαθούν εκ των υστέρων να αποδείξουν. Συλλαμβάνουν κάτι και μετά το επαληθεύουν. Τόσο στα μαθηματικά όσο και στην τέχνη, ο δρόμος είναι το απόλυτο σκοτάδι, τα μαθηματικά υπάρχουν, για να επιβεβαιώνουν την αναγκαιότητα ενός φανταστικού κόσμου. Χωρίς μαθηματικά, τα όνειρα και η φαντασία θα ήταν στο κενό».

Ο άγγλος ποιητής Shelley στο έργο του Μία υπεράσπιση της ποίησης, συνδέει την επιστήμη με την ποίηση. Γράφει:

«Η ποίηση είναι πραγματικά κάτι θείο. Είναι συγχρόνως το κέντρο και η περιφέρεια της γνώσης, είναι αυτό το οποίο καταλαβαίνει όλη την επιστήμη και αυτό στο οποίο όλη η επιστήμη πρέπει να αναφέρεται. Είναι συγχρόνως η ρίζα και το λουλούδι όλων των άλλων συστημάτων σκέψης.

Οι ποιητές είναι οι μάντιες μιας έμπνευσης χωρίς προηγούμενο, οι καθρέφτες των γιγαντιαίων σκιών, τις οποίες το μέλλον ρίχνει πάνω στο παρόν. Οι ποιητές είναι οι μη αναγνωρισμένοι νομοκάνονες του κόσμου».

Θα δούμε πως βλέπουν οι ποιητές την ποίηση.

Γράφει ο καθηγητής και ποιητής Νάσος Βαγενάς:

Η ποίηση ως αντανάκλαση της ανθρωπίνης ευαισθησίας δεν μπορεί παρά να εκφράζει και κάθε νέο στοιχείο που αφήνει

τα ίχνη του στην ευαισθησία μιας εποχής. Και η δική μας εποχή, με την εκπληκτική διεύρυνση της γνώσης και την έφοδο της επιστήμης ακόμα και στις πιο απλές καθημερινές μας χειρωνακτικές, εκφράζεται με μια ευαισθησία πολύ πιο πλατιά από την ευαισθησία των προηγούμενων αιώνων. Ωστόσο, κατά βάθος, αισθάνεται κανείς πως τα καινούργια πράγματα που λέει η ποίηση δεν είναι πράγματα θεμελιώδη. Απλώς φωτίζουν με νέο φως τα βασικά συναισθήματα που αποτελούν το περιεχόμενό της: τον έρωτα, τον χρόνο, την ελευθερία και τον θάνατο.

Όλα τα άλλα συναισθήματα είναι απόρροιες αυτών των βασικών συναισθημάτων. Κατά βάθος η ποίηση λέει συνεχώς τα ίδια.

Ο ποιητής Μανόλης Αναγνωστάκης δίνει τη δική του άποψη, που κατά κάποιον τρόπο συνδέει την ποίηση με τα μαθηματικά. Γιατί και στην ποίηση όπως σ' όλες τις εκδηλώσεις της ανθρώπινης δραστηριότητας εκείνο που έχει σημασία είναι η γνησιότητα, η απόδειξη και όχι η φιλολογία, η επίδειξη.

Την ποίηση με την επιστήμη συνδέει και ο σκηνοθέτης Θόδωρος Αγγελόπουλος, που λέει:

Η ποίηση είναι η μόνη δύναμη που αντέχει στον χρόνο. Γιατί η ποίηση κατάγεται από την φαντασία και στην φαντασία καταργείται ο χρόνος. Και στην επιστήμη γίνεται αυτό πολύ συχνά. Και μας φαίνεται περίεργο, γιατί θεωρούμε ότι η επιστήμη δεν έχει σχέση με την ποιητική πράξη. Κι όμως, η επιστημονική αναζήτηση στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στη φαντασία.

Έτσι κατανοούμε τη ρήση του Πλάτωνα:

«ο θεός πάντα γεωμετρεί», ή του Γαλιλαίου, ότι «το μεγάλο βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικά σύμβολα».

Συμπληρωματικά στα παραπάνω είναι και η γνώμη του Χάϊζεμπεργκ (βραβείο Νόμπελ 1932).

«Μόνο δύο γλώσσες έχει ο άνθρωπος για να αντιμετωπίσει την πραγματικότητα, τα μαθηματικά και την ποίηση».

Πολύ εύστοχα ο Νίκος Ταμπάκης (Μηχανικός – φιλόσοφος) έγραψε:

«Τη φράση του Χάϊζεμπεργκ προτιμώ να τη διαβάσω λίγο διαφορετικά: Μαθηματικά και ποίηση είναι τα δύο παράθυρά μας προς τον κόσμο. Η θέα που το καθένα τους προσφέρει είναι πολύ διαφορετική από το άλλο, όμως κατά έναν παράδοξο τρόπο, είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους, γεγονός που αντανακλά και τη δική μας δίδυμη φύση: Λογική – Συναισθημα».

Ένα ποίημα του Γιάννη Ρίτσου με τίτλο:

“ Πιθανότητες ”

“ Κάτασπρο το καΐκι, κι από πίσω οι βάρκες κόκκινες. Τις μέτρησε, τις ξαναμέτρησε: Έξη, Αναρωτήθηκε ποιο νόημα νάχει ο αριθμός και ποιο το μέτρημα. Σε λίγο έσβησε μέσα στο λυκόφως και ο αριθμός και το μέτρημα, μαζί κι η ερώτηση. Μπορεί λοιπόν να υπάρχει εκείνο που ονομάζουμε << ομορφιά >> μπορεί και νάνε η σιωπηλή, ανεξήγητη βεβαιότητα μιας ευτυχίας αναβλημένης.

Άλλο ένα ποίημα του Άρη Αλεξάνδρου με τίτλο:

“ Επιταγές και δέματα ”

“ Τα κανονίζεις όπως – όπως.

Τριάντα τα εκατό, πενήντα τα εκατό

Μα ποιος θα πάρει τη μισή μου ξενιτειά

Ποιος θα δεχθεί να πάρει

Τριάντα τα εκατό από τη μισή του ξενιτειά

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

Γεώργιος Κ. Ντόντος, Μαθηματικός (Ph.D.) 9^{οο} ΓΕΛ Πάτρας & συντονιστής EMM9ΓΑΠ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

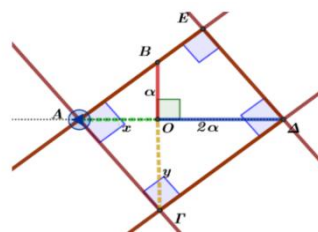
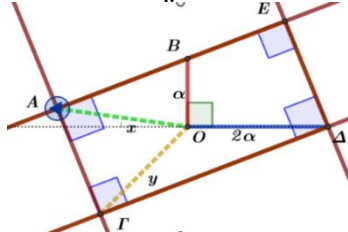
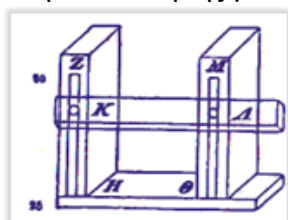
Αρχικά, τίθενται τα ερωτήματα:

- Πώς θα υπολογισθεί μία τετραγωνική ρίζα ή μία κυβική ρίζα ενός θετικού αριθμού?
- Πώς ένα σώμα (μικρό ή μεγάλο) θα κινηθεί εντελώς ευθύγραμμα χωρίς να συρθεί πάνω σε χάρακα ή ράγα?
- Πώς θα χαραχθούν κάποιες σημαντικές γεωμετρικές καμπύλες που προϋπάρχουν του ανθρώπου ή τις ανακάλυψε αργότερα?
- Πώς θα αντιγράψω ή θα μεγενθύνω ένα σχήμα ή πως θα το σμικρύνω?
- Πώς μία συγκεκριμένη κίνηση θα μεταφερθεί κάπου αλλού και θα υποστεί κάποια στροφή?
- Πώς θα τριχοτομήσω μία γωνία?
- Πώς θα εμβαδομετρήσω τον Νομό Αχαΐας πάνω στον χάρτη?

Μια **μαθηματική μηχανή** είναι ένας μηχανισμός που σχεδιάστηκε και κατασκευάστηκε για να εξαναγκάσει ένα σημείο ή ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ένα επίπεδο σχήμα να μετακινηθεί ή να μετασχηματιστεί σύμφωνα με έναν μαθηματικό νόμο που έχει καθοριστεί από τον σχεδιαστή της (Maschietto & Bussi, 2005). Είναι κατασκευασμένη έτσι ώστε να ενσωματώνει μαθηματικές έννοιες και σχέσεις που συχνά αναδεικνύουν σημαντικές στιγμές της ιστορίας των Μαθηματικών. Ο **Καρτέσιος** (1596-1650) στο έργο του “*Geometrie*” αποκαλούσε κάποιες μαθηματικές μηχανές ως «άλλους διαβήτες» (Descartes, 1925).

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ & ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΥΤΩΝ

(Α) Κυβιστής του Πλάτωνα: Ο Έλληνας μαθηματικός Ευτόκιος (480-540 μ.Χ.) αποδίδει στον Πλάτωνα (427-347 π.Χ.) την παρακάτω λύση του Δηλίου προβλήματος, η οποία για να υλοποιηθεί απαιτεί μηχανικά όργανα και για το λόγο αυτό οι ερευνητές εικάζουν ότι η λύση αυτή ίσως μην είναι του Πλάτωνα αλλά του Ευδόξου (407-355 π.Χ.) (Σταμάτης, 1949). Θεωρώντας ότι γνωστός κύβος έχει πλευρά μήκους α , τοποθετούνται και σταθεροποιούνται στο επίπεδο δύο κάθετα τμήματα OB και OD με μήκη α και 2α αντιστοίχως (εικόνα 1). Στη συνέχεια στο σημείο B αρθρώνεται περιστροφικά και με δυνατότητα ολίσθησης μέσω του B η ράβδος ABE . Επίσης στο σταθερό σημείο Δ αρθρώνονται περιστροφικά δύο κάθετες μεταξύ τους ράβδοι με δυνατότητα να ολισθαίνουν μέσω του Δ αλλά και να περιστρέφονται στο Δ . Η μία εξ αυτών αρθρώνεται κάθετα, περιστροφικά και με δυνατότητα ολίσθησης στο E της ράβδου ABE . Στα σημεία A και Γ των ABE και $\Delta\Gamma$ αρθρώνεται ράβδος $A\Gamma$ κάθετη με τις ABE και $\Delta\Gamma$ και με περιστροφικές αρθρώσεις στα A και Γ καθώς και με δυνατότητα ολίσθησης μέσω αυτών των σημείων.

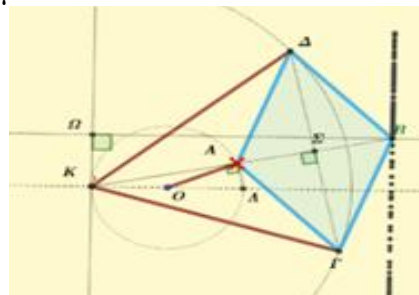


Εικόνα 1: «Κυβιστής του Πλάτωνα» (Σταμάτης, 1949) <https://www.geogebra.org/m/smk9jtac>

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι πρόκειται για ένα επίπεδο και ορθογώνιο πλαίσιο αρθρωμένων ράβδων που είναι αρθρωμένες μεταξύ τους με δυνατότητα αυξομείωσης των μηκών τους και με περιστροφικές αρθρώσεις στα σταθερά σημεία B και Δ του ορθογωνίου. Μετακινώντας την κορυφή A (κέρσορας) πρέπει τα τμήματα $BO = \alpha$ και $OD = y$ να γίνουν συνευθειακά καθώς και τα τμήματα

$OD=2a$ και $OA=x$ να γίνουν επίσης συνευθειακά. Σε αυτήν την θέση και λόγω των ορθογωνίων τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ προκύπτουν οι σχέσεις $x^2 = ay$ και $y^2 = 2ax$. Άρα $y = \frac{x^2}{a}$ και $\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = 2ax \Rightarrow x^3 = 2a^3$, το οποίο ερμηνεύεται πως το τμήμα x είναι η ακμή εκείνου του κύβου με διπλάσιο όγκο από κύβο με ακμή ίση με a . Όταν το $a = 1$ τότε κατασκευάζει γεωμετρικά την $\sqrt[3]{2}$.

(B) Ευθυγράφος Peaucellier - Lipkin: Η προσπάθεια κατασκευής μηχανισμού που μετατρέπει μια κυκλική κίνηση σε τελείως ευθύγραμμη επετεύχθη ταυτόχρονα και ανεξάρτητα το 1873 από τον Γάλλο μηχανικό Charles-Nicolas Peaucellier (1832-1919) και το 1871 από τον Λιθουανό μαθηματικό Lipman Lipkin (1846-1875) ο οποίος σπούδασε δίπλα στον Chebyshev (digitaleditions.sheridan, n.d.). Ας υποθέσουμε ότι οι πλευρές του ρόμβου έχουν μήκος 4, η ακτίνα του μεγάλου κύκλου ισούται με 9 και η ακτίνα του μικρού κύκλου ισούται με 3 (εικόνα 2). Τα σημεία K και O δεν μετακινούνται αλλά περιστρέφονται ομοεπίπεδα. Επίσης το K ανήκει στον μικρό κύκλο κέντρου O . Οι μεγάλες ακτίνες είναι αρθρωμένες περιστροφικά στο K αλλά και στις κορυφές Δ και Γ του ρόμβου. Η μικρή ακτίνα είναι αρθρωμένη περιστροφικά στο O καθώς και στην πλησιέστερη κορυφή A του ρόμβου. Το σημείο A είναι η «είσοδος» του μηχανισμού και η κορυφή B του �όμβου είναι η «έξοδος» του όπου έχει τοποθετηθεί και μία γραφίδα. Στο σημείο K έχει χαραχθεί ευθεία κάθετη με την διάκεντρο KO . Από την κορυφή B του ρόμβου έχει χαραχθεί ευθεία $B\Omega$ παράλληλη με την KO , και επομένως κάθετη με την κάθετη στην KO . Τα τρίγωνα $K\Delta\Lambda$ και $K\Lambda\Gamma$ ισούνται λόγω κριτηρίου Π-Π-Π, και προκύπτει ότι οι γωνίες $K\Delta\Lambda$ και $K\Lambda\Gamma$ ισούνται. Άρα ισούνται και οι παραπληρωματικές γωνίες τους. Άρα η KA οφείλει να είναι συγγραμμική με την διαγώνιο AB του ρόμβου. Συνεπώς τα σημεία τα σημεία K, A, Σ, B είναι συνευθειακά και $(KA) \cdot (KB) = ((K\Sigma) - (A\Sigma)) \cdot ((K\Sigma) + (A\Sigma)) = (K\Sigma)^2 - (A\Sigma)^2 = [(K\Delta)^2 - (\Delta\Sigma)^2] - [(A\Delta)^2 - (\Delta\Sigma)^2] = 9^2 - (\Delta\Sigma)^2 - 4^2 + (\Delta\Sigma)^2 = 81 - 16 = 65 = ct$. Τα τρίγωνα $K\Omega B$ και $K\Lambda\Lambda$ είναι ορθογώνια και όμοια λόγω του ότι οι γωνίες ΩBK και $\Lambda K\Lambda$ ισούνται ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $B\Omega$ και KO τεμνόμενων από την KB . Άρα $\frac{(KA)}{(KB)} = \frac{(A\Lambda)}{(\Omega K)} = \frac{(KA)}{(\Omega B)} \Rightarrow (\Omega B) = \frac{(KA) \cdot (KB)}{(K\Lambda)} = \frac{65}{4} = ct$. Τελικά, για κάθε θέση του σημείου B , η απόσταση του B από την σταθερή ευθεία $K\Omega$ παραμένει ίδια, που μεταφράζεται πως η γραφίδα B χαράσσει ευθεία γραμμή ή αλλιώς το σημείο B κινείται ευθύγραμμα.

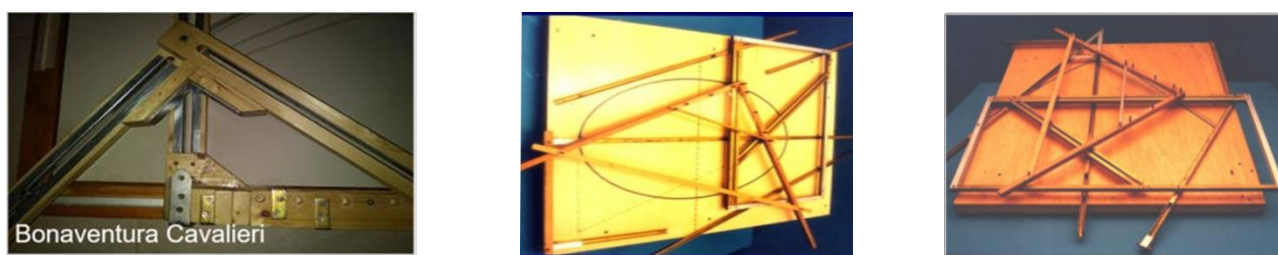


Εικόνα 2: Ο ευθυγράφος Peaucellier-Lipkin του EMM9ΓΛΠ - <https://www.geogebra.org/m/t7qunmrf>

(Γ) Ο Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ήταν Ιταλός μαθηματικός και καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Bologna. Ο Galileo Galilei (1564 -1642) τον εκτιμούσε ιδιαίτερα για τις γνώσεις του στην Γεωμετρία. Συνδέεται με τους μαθηματικούς Marin Mersenne (1588 -1648) και Evangelista Torricelli (1608-1647) λόγω της εργασίας του στα προβλήματα οπτικής και κίνησης (mathshistory.st-andrews, n.d). Σημαντική η εργασία του με τα «αδιαίρετα» (indivisibles), πρόδρομα του απειροστικού λογισμού, καθώς και η εισαγωγή των λογαρίθμων στην Ιταλία για θέματα γεωγραφίας και αστρονομίας. Μελέτησε σε βάθος τις κωνικές τομές για την κατασκευή διαθλαστικών και ανακλαστικών τηλεσκοπίων.

Ο παραβολογράφος του ανα-κατασκευάστηκε το 2017 από το EMM9ΓΛΠ (εικόνα 3/α). Χαράσσει παραβολικό τόξο, τετραγωνίζει ορθογώνια παραλληλόγραμμα και εξάγει τετραγωνικές ρίζες

αριθμών. Αναφέρει ο Cavalieri (1632) ότι η ιδέα κατασκευής του μηχανισμού (τα δύο Δ) είναι του Βυζαντινού μαθηματικού-μηχανικού **Ισίδωρου από την Μίλητο** (442- 537 μ.Χ.) (Johnston Allman, 1877, σ. 163). Επίσης υπάρχει σχετική πληροφορία για την αρχική κατασκευή του μηχανισμού από τον **Μέναιχο** (375-300 π.Χ.), ο οποίος διέθετε μια μηχανική συσκευή για την κατασκευή κωνικών τομών, την οποία χρησιμοποίησε για να λύσει το Δήλιο πρόβλημα (Taimina, 2007). Ο μηχανισμός τετραγωνίζει ορθογώνια και εξάγει τετραγωνικές ρίζες και επίσης εσωκλείει την μετρική σχέση του ύψους προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου. Μπορεί να μετατραπεί και σε εφαπτομενικογράφο, χαράσσοντας το παραβολικό τόξο μέσα από την εφαπτομένη του, τοποθετώντας καταλλήλως δύο ακόμη άκαμπτες ράβδους και επιλύει γεωμετρικά την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση. Επίσης με κατάλληλες προσθήκες ράβδων, μπορεί να εμβαδομετρήσει και το χωρίο κάτω από το χαρασσόμενο παραβολικό τόξο (Ντόντος, 2024).

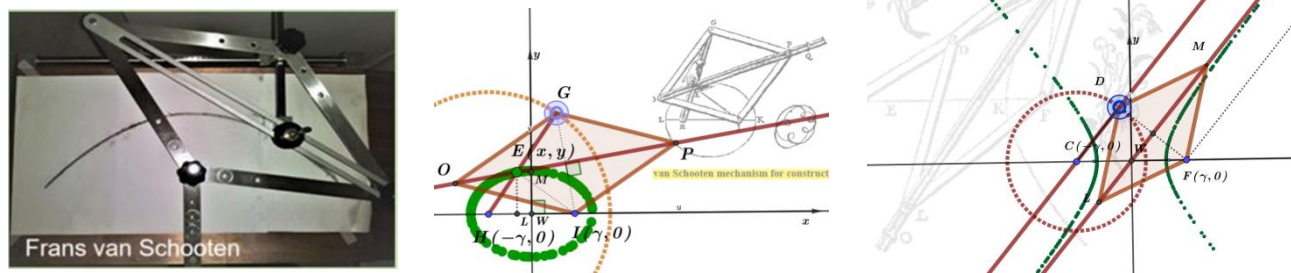


Εικόνα 3: Ο παραβολογράφος, ο ελλειψογράφος και ο υπερβολογράφος Cavalieri <https://www.geogebra.org/m/rnkttmh9> & <https://www.geogebra.org/m/eqqxcmx7>

Ο Cavalieri κατασκεύασε επίσης ελλειψογράφο και υπερβολογράφο (εικόνες 3/β & 3/α), μαθηματικές μηχανές που χρησίμευσαν στην λείανση των φακών και κατόπτρων για το τηλεσκόπιο του, και περιγράφονται σε προσομοίωση στο GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/sbujgzkv> & <https://www.geogebra.org/m/sbujgzkv>).

(Δ) Ο Ολλανδός μαθηματικός **Frans van Schooten** (1615-1660) ήταν ο σημαντικότερος συνεργάτης του **René Descartes** (1596-1650). Κατασκεύασε παραβολογράφο, ελλειψογράφο και υπερβολογράφο για πολλούς λόγους.

Ο παραβολογράφος του ανα-κατασκευάστηκε από το EMM9ΓΑΠ το 2017 & 2020 (εικόνα 4/α). Χαράσσει παραβολικά τόξα και ανήκει στην κατηγορία των «ρομβοειδών» τεχνουργημάτων. Αναδεικνύει τον «ισοαποστατικό» ορισμό της παραβολής (Schooten, 1646). Λειτουργεί και ως εφαπτομενικογράφος, χαράσσοντας παραβολικά τόξα μέσω της εμφανούς εφαπτομένης-ράβδου, επιλύοντας γεωμετρικά μία διαφορική εξίσωση (Ντόντος, 2024). Επίσης μπορεί να υπολογισθεί η τοπική καμπυλότητα του χαρασσόμενου τόξου μέσα από τα μήκη των άκαμπτων ράβδων των μηχανών (Ντόντος, 2024). Ο ελλειψογράφος και ο υπερβολογράφος βρίσκεται στο στάδιο προσομοίωσης (εικόνες 4/β & 4/γ).



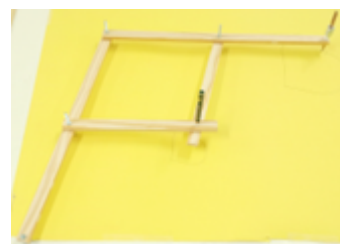
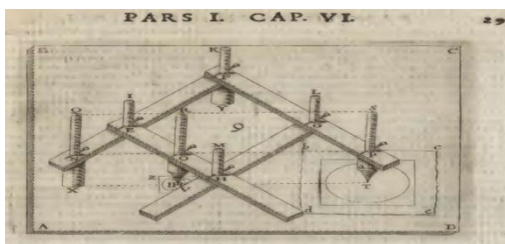
Εικόνα 4: παραβολογράφος, ελλειψογράφος και υπερβολογράφος van Schooten <https://www.geogebra.org/m/fafjvqkq> & <https://www.geogebra.org/m/tfjdcrv4> & <https://www.geogebra.org/m/gs8z376s>

(Ε) Ο παντογράφος ομοιοθεσίας του Scheiner έχει «πηγή έμπνευσης» τον παντογράφο του μαθηματικού- μηχανικού **Ήρωνα** (1^{ος} ή 2^{ος} αι. π.Χ.), την πρώτη συσκευή αντιγραφής, μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης σχεδίων (εικόνα 5). Δύο ράβδοι, κάθετα αρθρωμένες, στο τέλος των οδοντωτών κανόνων φέρουν στο άκρο τους την ακίδα ανάγνωσης του πρωτότυπου σχεδίου και τη γραφίδα αντιγραφής, και είναι ευθυγραμμισμένες με το κέντρο των οδοντωτών τροχών (archaiologia.gr/blog, n.d.).



Εικόνα 5: Ο παντογράφος του Ήρωνα ανα-κατασκευασμένος και εκτίθεται σε Μουσείο.
https://www.youtube.com/watch?v=DXNEL_a9C60

Ο **Christoff Scheiner** (1573-1650) ήταν Ιησουίτης θεολόγος και μαθηματικός. Δάσκαλος του στα Μαθηματικά ήταν ο **Johann Lantz** (1564-1638). Έζησε παράλληλα με τον **Galilei Galileo** (1564-1642) και είχε επηρεασθεί από το έργο του μαθηματικού **Christoph Clavius** (1537-1612) ο οποίος χρησιμοποίησε μη Ευκλείδειες διαδικασίες χάραξης καμπυλών (Bos, 2001). Στο Ντίλιγκεν της Βαυαρίας το 1603, συνεργάστηκε με κάποιον ζωγράφο, ο οποίος χρησιμοποιούσε έναν μηχανισμό σχεδιασμού περιγραμμάτων σε χαρτί. Το έργο του Scheiner για τους παντογράφους δημοσιεύτηκε 28 έτη αργότερα, το 1631 (mathshistory.st-andrews.n.d). Ο παντογράφος του είναι ένα «ρομβοειδής» μηχανισμός που ενσωματώνει την έννοια της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας τριγώνων (Scheiner, 1631). Έχει έναν βαθμό ελευθερίας και στην είσοδο και στην έξοδο του έχει μολύβια ή άλλα εργαλεία χάραξης-κοπής ή λείανσης (εικόνα 6/α). Ανα-κατασκευάστηκε από το ΕΜΜ9ΓΛΠ χρησιμοποιώντας τέσσερις άκαμπτες ξύλινες ράβδους οι οποίες αρθρώθηκαν περιστροφικά ανά δύο (εικόνα 6/β). Οι δύο ράβδοι έχουν διπλάσιο μήκος των υπολοίπων και η μία εκ των μεγαλύτερων αρθρώθηκε περιστροφικά σε ξύλινη επιφάνεια. Ο χειριστής μπορεί να χρησιμοποιήσει όποιο μολύβι θέλει (είσοδος μηχανισμού) και να σχεδιάσει ένα σχήμα που το άλλο μολύβι (έξοδος μηχανισμού) θα σχεδιάσει ή θα κόψει μεγαλύτερο ή μικρότερο όμοιο-ομοιόθετο σχήμα με πόλο το σταθεροποιημένο σημείο στην ξύλινη επιφάνεια.



Εικόνα 6: (α) Ο παντογράφος από το βιβλίο του Scheiner (1631) και (β) η ανακατασκευή του στο ΕΜΜ9ΓΛΠ (2024-25)
<https://www.geogebra.org/m/wudzrn44>

Η κατασκευή της προσομοίωσης του με λογισμικό GeoGebra είχε μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας και ενδιαφέροντος, διότι αναδεικνύονται καθοριστικά οι γεωμετρικές ιδιότητες του μηχανισμού, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες λόγω των υλικών κατασκευής, διαστάσεων, αρθρώσεων και γεωμετρίας. Τα υποχρεωτικά βήματα των αναγκαίων γεωμετρικών κατασκευών στο GeoGebra, δεν ήταν εμφανή κατά την κατασκευή από φυσικά υλικά. Θεωρώντας παραμετρικά μήκος ρ , σε σταθερό σημείο A (εικόνα 7/α) κατασκευάστηκε κύκλος (A, ρ) και σε τυχαίο σημείο B (ελεύθερο στο επίπεδο) κατασκευάστηκε κύκλος (B, ρ) . Ένα εκ των δύο σημείων τυχαίας τομής τους ορίστηκε Γ . Στη συνέχεια με κέντρο το «δεσμευμένο» Γ (από τον (A, ρ) και την θέση του B), κατασκευάστηκε κύκλος (Γ, ρ) που περνά από το A και τέμνει την ημιευθεία $A\Gamma$ στο δεσμευμένο σημείο Δ . Στη συνέχεια με εντολή «αξονικής συμμετρίας» (από το λογισμικό) ως προς την ευθεία $B\Delta$ ορίζεται ως E

το συμμετρικό του Γ . Το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι ρόμβος (για οποιαδήποτε θέση του B) επειδή οι διαγώνιοι $B\Delta$ και ΓE είναι κάθετοι μεταξύ τους (λόγω αξονικής συμμετρίας) και από το ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ η κάθετη ΓE είναι και διάμεσος της $B\Delta$, και επιπλέον λόγω αξονικής συμμετρίας και η διαγώνιος ΓE είναι διχοτομημένη. Συνολικά, το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ έχει διαγωνίους κάθετες μεταξύ τους και διχοτομημένες. Η ημιευθεία AB τέμνει την ημιευθεία ΔE στο Ω . Στη συνέχεια, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $BE\Omega$ ισούνται με κριτήριο Γ -Π- Γ , και προκύπτει ότι $E\Omega = \rho$. Επομένως, τα τρίγωνα $A\Gamma B$ και $A\Delta\Omega$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$ και σε οποιαδήποτε θέση του «κέρσορα» (είσοδος) B και λόγω της κοινής γωνίας A προκύπτει και η συγγραμμικότητα των σημείων A , B και Ω . Τίθεται το ερώτημα εάν «τα σχήματα που χαράσσει ο κέρσορας B και η έξοδος Ω , είναι όμοια και με τι λόγο ομοιότητας; Επίσης, το παραγόμενο σχήμα έχει υποστεί μετατόπιση ή και αλλαγή προσανατολισμού»; Υποθέτοντας ότι το B χάραξε ευθύγραμμο τμήμα BB_1 (εικόνα 7/β) παρατηρείται πως και το Ω χαράσσει τμήμα $\Omega\Omega_1$. Τα ευθύγραμμα τμήματα $AB\Omega$ και $AB_1\Omega_1$ δημιουργούν τα τρίγωνα ABB_1 και $A\Omega\Omega_1$, τα οποία είναι επίσης όμοια με $\lambda = 2$, επειδή $\frac{A\Omega}{AB} = \frac{A\Omega_1}{AB_1} = 2$ και έχουν κοινή την περιεχόμενη γωνία A . Επομένως, $\frac{\Omega\Omega_1}{BB_1} = 2 \Leftrightarrow \Omega\Omega_1 = 2 \cdot BB_1$ και λόγω της ομοιότητας αυτών των τριγώνων (σε οποιαδήποτε θέση B_1 του κέρσορα B) προκύπτει $BB_1 // \Omega\Omega_1$ καθώς επίσης $\widehat{B} = \widehat{\Omega}$ και $\widehat{B_1} = \widehat{\Omega_1}$. Οι τελευταίες σχέσεις μας δείχνουν ότι το τμήμα $\Omega\Omega_1$ είναι πάντα διπλάσιο του BB_1 και έχουν την ίδια «κλίση». Εάν στη συνέχεια δεχτούμε πως κάθε σχήμα που χαράσσεται από τα δύο μολύβια, αποτελείται από την ένωση διαδοχικών «απειροελάχιστων» ευθυγράμμων τμημάτων που χαράσσονται με τέτοιο τρόπο, είναι προφανές ότι το παραγόμενο σχήμα είναι όμοιο με το αρχικό και με $\lambda = 2$ (μεγέθυνση 200%) και έχει τον ίδιο προσανατολισμό (κλίση) αλλά μετατοπισμένο ευθυγράμμως σε διπλάσια απόσταση του αρχικού από το σημείο-πόλο A (ομοιοθεσία).



Εικόνα 7: προσομοίωση του παντογράφου Scheiner με το λογισμικό GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/skrdw4dk>

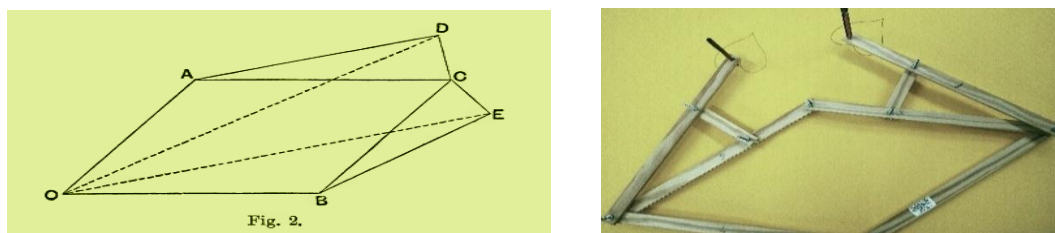
Ο παντογράφος του Scheiner χρησιμοποιείται ακόμη στην βιομηχανία, στον σχεδιασμό την ζωγραφική και την μηχανολογία. Παραδείγματα είναι ο σχεδιασμός επί μουσικών οργάνων και επίπλων, στα κεντήματα, στην λείανση επιφανειών, στην κοπή λαμαρινών, στην αντιγραφή σχεδίων σε οποιαδήποτε κλίμακα και στην ηλεκτροκίνηση τρόλεϋ-τραμ-τραίνων (εικόνες 8).



Εικόνα 8: Εφαρμογές του παντογράφου Scheiner στην βιομηχανία και στα ηλεκτρικά τρένα

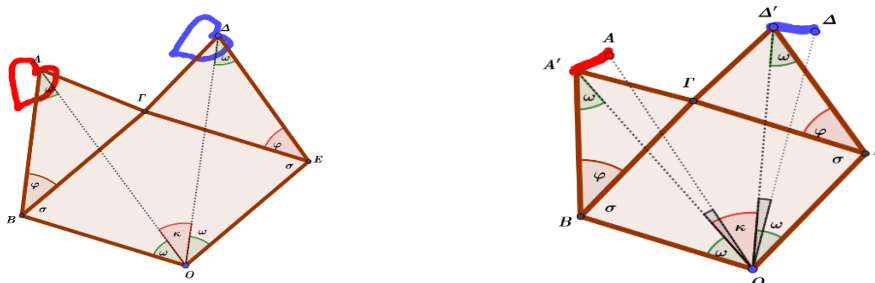
(ΣΤ) Ο **James Joseph Sylvester** (1814 -1897) ήταν σημαντικός μαθηματικός ο οποίος, παρά τις δυσκολίες που του προξένησε η Εβραϊκή καταγωγή του, χρημάτισε Καθηγητής στα Πανεπιστήμια Λονδίνου, Βιρτζίνια, Οξφόρδης, John Hopkins και στην Βασιλική Στρατιωτική Ακαδημία του Λονδίνου. Επίσης ήταν πρόεδρος της Μαθηματικής Εταιρείας του Λονδίνου, μέλος της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου και μέλος της Ακαδημίας Επιστημών του Παρισιού. Το 1875 ο Ρώσος

μαθηματικός και μηχανικός **Pafnuty Lvovich Chebyshev** (1821-1894) τον επισκέφτηκε και συζήτησαν για τις μηχανικές συνδεσμολογίες (mechanical linkages) που μπορούν να χαράξουν ευθείες γραμμές. Σε μία διάλεξη του Sylvester με τίτλο «στις πρόσφατες ανακαλύψεις για την μηχανική μετατροπή της κίνησης» που έδωσε στο Βασιλικό Ίδρυμα του Λονδίνου, ακροατής ήταν και ο μαθηματικός-μηχανικός **Sir Alfred Bray Kempe** (1849-1922) που ενθουσιάστηκε από το θέμα. Ο Kempe, ο Chebyshev και ο Sylvester συνεργάστηκαν για τους μηχανικές συνδεσμολογίες, πραγματοποιώντας σημαντικές κατασκευές (mathshistory.st-andrews, n.d). Από τους απλούστερους μαθηματικούς μηχανισμούς που παρουσίασε ο Sylvester ήταν ο πλαγιογράφος (εικόνα 9/α), ή αλλιώς στρεβλός παντογράφος του (University of Michigan Historical Library Digital Math Collection, n.d) που έχει επίσης έναν βαθμό ελευθερίας και φέτος κατασκευάστηκε από το EMM9ΓΛΠ (εικόνα 9/β). Αντιγράφει το σχήμα που ο χειριστής σχεδιάζει και το περιστρέφει επίπεδα κατά προκαθορισμένη γωνία $\varphi = \widehat{DAC} = \widehat{DOE} = \widehat{CBE}$ (εικόνα 10/α).



Εικόνα 9: (α) ο πλαγιογράφος του JJ Sylvester (1909) από συλλογή άρθρων του (3^{ος} τόμος, σελ. 27) και (β) η κατασκευή του (EMM9ΓΛΠ) <https://www.geogebra.org/m/smyuf3rk>

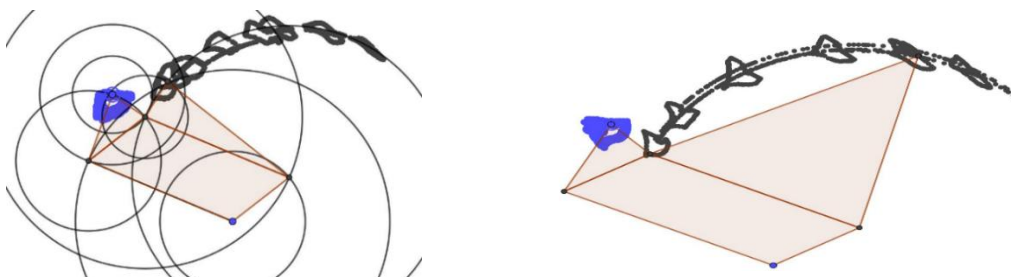
Το σημείο O είναι σταθερό και μπορεί να περιστρέφεται. Το τετράπλευρο $OBGE$ είναι ρόμβος (εικόνα 8/α). Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελή, ίσα μεταξύ τους με κορυφές τα B και E . Τα A και Δ έχουν μολύβια και σχεδιάζοντας με το A το Δ σχεδιάζει επίσης. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABO έχουμε $2\omega + \varphi + \sigma = 180^\circ$. Επίσης στον ρόμβο έχουμε $2\sigma + 2(2\omega + \kappa) = 360^\circ \Rightarrow \sigma + 2\omega + \kappa = 180^\circ$ και προκύπτει ότι $\kappa = \varphi = ct$, δηλαδή αν και μεταβάλλονται όλες οι γωνίες του ρόμβου όμως δεν μεταβάλλεται το μέτρο της γωνίας κ που έχουν τα νοητά τμήματα OA και OD . Εάν η γραφίδα A χαράξει ένα ευθύγραμμο τμήμα AA' (εικόνα 10/β), τα τμήματα OA και OD ισούνται, καθώς και $OA' = OD'$. Η γωνία στο AOA' ισούται με την γωνία $\Delta OD'$, και ισούνται με την συγκεκριμένη γωνία στροφής έτσι ώστε να χαραχθούν τα ίσα τμήματα AA' και $\Delta\Delta'$ λόγω της προφανούς ισότητας των τριγώνων AOA' και $\Delta OD'$. Όλο το σχήμα που σχεδιάζει κάθε μολύβι, αποτελεί σύνολο τέτοιων μικρών ευθυγράμμων τμημάτων. Άρα, σχεδιάζεται ίσο σχήμα με το αρχικό το οποίο έχει περιστραφεί επίπεδα κατά γωνία ίση με την γωνία φ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ (Ντόντος κ. συν., 2024).



Εικόνα 10: προσομοίωση και ανάλυση πλαγιογράφου J.J.Sylvester <https://www.geogebra.org/m/cqpatyvp>

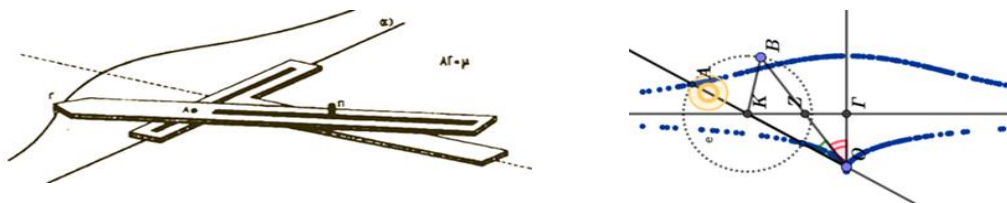
Στα παρακάτω σχήματα (εικόνα 11), παρουσιάζεται εικόνα από προσομοίωση του, και αποτελεί γενικότερη περίπτωση του πλαγιογράφου, όπου δεν υπάρχει ρόμβος αλλά παραλληλόγραμμο καθώς και τα 2 τρίγωνα δεν είναι κατ' ανάγκη ίσα ή όμοια. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται και κάποια «χωρική» περιστροφή του σχήματος γύρω από κάποιον άξονα, ή ίσως παρατηρείται η πλάγια

προβολή του αρχικού σχήματος, από τον τρισδιάστατο χώρο στις δύο διαστάσεις (χαρτί). Αυτό μας προβλημάτισε θετικά και φάνηκε ένας πιθανός «ευρύτερος» γεωμετρικός μετασχηματισμός που υφίσταται το σχήμα, αγγίζοντας «διαισθητικά» την έννοια του τρισδιάστατου γεωμετρικού μετασχηματισμού ή και την προβολική γεωμετρία.



Εικόνα 11: επεκτάσεις του πλαγιογράφου J.J. Sylvester <https://www.geogebra.org/m/a9du2suy>

(Ζ) Ο **Νικομήδης** (200 π.Χ.) με την κογχοειδή καμπύλη του και με τον μηχανισμό χάραξής της (εικόνα 12) κατάφερε να δώσει έναν μηχανικό τρόπο να επιλυθούν τα γεωμετρικά προβλήματα του διπλασιασμού του κύβου και της **τριχοτόμησης γωνίας**. Η καμπύλη αυτή είναι ο επίπεδος γεωμετρικός τόπος των αντιδιαμετρικών σημείων Γ και Γ' που αποτελούν την τομή μίας ημιευθείας με σταθερή αρχή και ενός κύκλου του οποίου το κέντρο σύρεται πάνω σε μία ευθεία (ε) (School of Mathematics and Statistics/ University of St. Andrews, n.d.).



Εικόνα 12 : μηχανισμός χάραξης της κογχοειδούς καμπύλης και τριχοτόμηση γωνίας. <https://www.geogebra.org/m/a7e95yde>

(Η) Υπάρχει η μαθηματική μηχανή, το **εμβαδόμετρο** που μετρά εμβαδά. Ο χρήστης «ιχνηλατεί» τα όρια μιας κλειστής περιοχής με το «**σημείο ιχνηθέτης**». Επιστρέφοντας στο σημείο εκκίνησης, το εμβαδόν της περιοχής μπορεί να διαβαστεί από έναν μετρητή-τροχό που βρίσκεται πάνω στον μηχανισμό (εικόνα 13/α). Το κύριο μέρος είναι μια κινητή ράβδος, που ονομάζεται **βραχίονας ιχνηθέτης**, με το **σημείο ιχνηθέτης** στο ένα άκρο. Ο **τροχός** είναι προσαρτημένος στη ράβδο με τον άξονά της παράλληλο προς τη ράβδο και είναι εξοπλισμένος με μια κλίμακα που συνήθως βαθμονομείται σε τετραγωνικές ίντσες ή τετραγωνικά εκατοστά (εικόνα 13/β). Μπορεί να κυλήσει τόσο προς τα εμπρός όσο και προς τα πίσω. Μετρά μια κατευθυνόμενη απόσταση, δηλαδή, την συνιστώσα της κίνησής του που είναι κάθετη στον βραχίονα του ιχνηθέτη. Τα μαθηματικά του πώς αυτή η κατευθυνόμενη απόσταση μπορεί να δώσει το εμβαδόν της περιοχής βασίζονται σε ολοκληρώματα και στο θεώρημα Green, αλλά μπορούν να δοθούν απλά, πρακτικά και κομψά, και αποτελούν τη βάση του τρόπου λειτουργίας ενός εμβαδόμετρου.

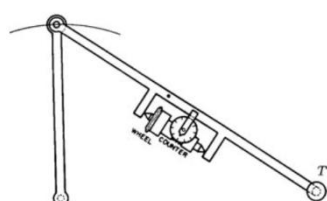


Figure 3. Polar planimeter [9].



Εικόνα 13: εμβαδόμετρο AMSLER (νέο απόκτημα του ΕΜΜ9ΓΑΠ)

ΠΗΓΕΣ

- Σταμάτης, Ε. (1949). *Το Δήλιον πρόβλημα και η τριχοτόμησης γωνίας* (ιδίου (Ed.); 1st ed.). <https://evangelosstamatis.files.wordpress.com/2011/06/1972-epistimonikai-ergasiai-arthra-tomos-a.pdf>
- Descartes, R. (1925). *The Geometry of Rene Descartes* (1st ed.). Open Court Publishing Company.
- Ντόντος, Γ. (2024). *Μηχανές δημιουργίας γεωμετρικών καμπυλών και εφαρμογή τους στην διδακτική πράξη* (διδακτορική διατριβή) Πανεπιστήμιο Πάτρας/ΠΤΔΕ, Πάτρα. <https://doi.org/10.12681/eadd/56847>
- Taimina, D. (2007). Historical mechanisms for drawing curves. *Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics, December*, 89–104. <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859766.011>
- Schooten, F. (1646). *De organica conicarum sectionum in plano descriptione* (Ex Officina Elzeviriorum (Ed.); 1st ed.). <https://play.google.com/books/reader?id=6xNiAAAAcAAJ&pg=GBS.PP16>
- Cavalieri, B. (1632). *Lo specchio ustorio, ovvero, Trattato delle settioni coniche, et alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora*. (1st ed.). <https://play.google.com/books/reader?id=ZX64AAAAIAAJ&pg=GBS.PA186&hl=en>
- Scheiner, C. (1631). *Pantographice seu ars delineandi* (Rom) <https://dn721005.ca.archive.org/0/items/christophorische00sche/christophorische00sche.pdf>
- Sylvester, J. J. (1909). *THE COLLECTED MATHEMATICAL PAPERS OF JAMES JOSEPH SYLVESTER* (Cambridge University Press, Ed.; 1st ed., Vol. 3). <https://archive.org/details/TheCollectedMathematicalPapersOfJamesJosephSylvesterVolumeIi>
- Foote, R. L., & Sandifer, E. (n.d.). *Area Without Integration: Make Your Own Planimeter*. Retrieved June 6, 2025, from <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/papers/foote.sandifer.reprint.pdf>
- Johnston Allman, G. (1877). *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Queen's University in Ireland (Ed.); 1st ed.). University Press. <https://archive.org/search?query=external-identifier%3A%22urn%3Aoclc%3Arecord%3A1045621609%22>
- Bos, H. J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness* (G. Toomer, Ed.; 1st ed.). Springer-Verlag.
- Maschietto, M., & Bartolini Bussi, M. G. (2005). The Laboratory of Mathematical Machines of Modena. *European Mathematical Society Magazine*. https://www.researchgate.net/publication/240631363_THE_LABORATORY_OF_MATHEMATICAL_MACHINES_OF_MODENA
- Ντόντος, Γ., Παναγιωτόπουλος, Λ., Τσέτικα, Α., Αλποχωρίτης, Μ., Αναλυτής, Γ., Βόσσου, Δ., Γουλιάμη, Δ., Καϊμακάς, Κ., Καρακάσης, Κ., Καρέλα, Ο., Κοκκίνης, Δ., Κύρκος, Α., Λούβαρη, Ε., Παπακώστας, Α., & Τσάτης, Α. (2024). Μαθηματικές Μηχανές. Στο Α. Μπαλωμένου, Γ. Αφράτης, & Λ. Κωνσταντόπουλος (Eds.), *Πρακτικά 1^{ου} Μαθητικού Μαθηματικού Συνεδρίου Δυτικής Ελλάδος* (pp. 173–179). Ε.Μ.Ε. <https://1o-mathetiko-mathematiko-synedrio.webnode.gr/>

https://digitaleditions.sheridan.com/publication/?i=814988&article_id=4722915&view=articleBrowse
Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 6/6/2025 και ώρα 12:23

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri> Τελευταία τροποποίηση Ιούλιος 2014,
Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 5/6/2025 και ώρα 22:40.

Παντογράφος του Ήρωνα (n.d.). Retrieved June 6, 2025, from archaiologia.gr/blog.
<https://www.archaiologia.gr/blog/photo/%cf%80%ce%b1%ce%bd%cf%84%ce%bf%ce%b3%cf%81%ce%ac%cf%86%ce%bf%cf%82-%ce%bc%ce%bf%cf%85%cf%83%ce%b5%ce%af%ce%bf-%ce%b1%cf%81%cf%87%ce%b1%ce%af%ce%b1%cf%82-%ce%b5%ce%bb%ce%bb%ce%b7%ce%bd/>

Christoph Scheiner (n.d.). Retrieved June 6, 2025, from the free online resource “MacTutor”.
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Scheiner/>

James Joseph Sylvester (n.d.). Retrieved June 6, 2025, from the free online resource “MacTutor”.
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sylvester/>

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nicomedes/> Τελευταία τροποποίηση 1/Απριλίου/
1999. Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 6/6/2025 και ώρα 19:07

Αρχείο προσομοιώσεων στο GeoGebraTube <https://www.geogebra.org/u/gkdodos>

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Γιαννιώτη Φένια

Πείραμα τύχης καλείται ένα πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα του, όσες φορές και να το επαναλάβουμε.

Ένα πείραμα τύχης πρέπει να πληροί δύο προϋποθέσεις :

- 1) Πρέπει τα αποτελέσματα να είναι "συγκεκριμένα".
- 2) Πρέπει να είναι ίδια η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα αποτέλεσμα.

Παραδείγματα:

- Ρίχνω μία μπάλα από ύψος και με εξετάζω που θα καταλήξει. Είναι πείραμα τύχης;

Όχι, γιατί ξέρω με βεβαιότητα ότι θα καταλήξει στο έδαφος, λόγω της βαρύτητας.

- Ζητάω από έναν μαθητή να διαλέξει έναν αριθμό. Είναι πείραμα τύχης;

Όχι, γιατί δεν είναι συγκεκριμένα τα αποτελέσματα.

- Ρίχνω ένα κέρμα μία φορά. Είναι πείραμα τύχης;

Ναι, και τα πιθανά αποτελέσματα είναι Κ (κεφάλι) και Γ (γράμματα).

- Ρίχνω ένα κέρμα δύο φορές. Είναι πείραμα τύχης;

Ναι, και τα πιθανά αποτελέσματα είναι ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ.

- Ρίχνω ένα κέρμα, το οποίο είναι χτυπημένο από την μία μεριά που απεικονίζει γράμματα. Είναι πείραμα τύχης;

Όχι, γιατί η πιθανότητα να φέρω γράμματα είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να φέρω κεφάλι.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ρίχνω ένα κέρμα μία φορά. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει Γ;

Απάντηση : $\frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ρίχνω ένα ζάρι μία φορά. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει :

- 1) Ο αριθμός 1
- 2) Αριθμός μικρότερος του 6
- 3) Αριθμός μικρότερος του 7
- 4) Αριθμός μικρότερος του 1
- 5) Άρτιος αριθμός

Απάντηση:

- 1) $\frac{1}{6}$
- 2) $\frac{5}{6}$
- 3) $\frac{6}{6} = 1$
- 4) $\frac{0}{6} = 0$
- 5) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Από την παραπάνω άσκηση καταλαβαίνουμε ότι η πιθανότητα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\text{Πιθανότητα} = \frac{\text{Επιθυμητά αποτελέσματα}}{\text{όλα τα αποτελέσματα}}$$

Επίσης, καταλαβαίνουμε ότι η πιθανότητα είναι ένα αριθμός από το 0 ως το 1.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σε ένα δοχείο υπάρχουν 5 κόκκινες, 3 μπλε και 2 κίτρινες μπάλες. Η πιθανότητα να επιλέξω κίτρινη μπάλα είναι $\frac{2}{10}$ και μπλε είναι $\frac{3}{10}$. Τί αλλαγές μπορώ να κάνω στις μπάλες ώστε η πιθανότητα να διαλέξω κίτρινη μπάλα να είναι μεγαλύτερη από το να διαλέξω μπλε; Σε κάθε περίπτωση πρέπει να υπάρχουν μόνο 10 μπάλες στο δοχείο.

Απάντηση: Μπορώ να βάλω 2 κίτρινες και να βγάλω 2 κόκκινες ή μπορώ να βγάλω μία μπλε και να βάλω μία κίτρινη, κλπ.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε ένα δοχείο υπάρχουν 30 μπάλες, κόκκινες και μπλε. Αν η πιθανότητα να διαλέξω κόκκινη είναι διπλάσια από το να διαλέξω μπλε, πόσες μπλε και πόσες κόκκινες μπάλες έχουμε;

$$\text{Απάντηση: Πιθανότητα μπλε} = \frac{x}{30} \quad \text{Πιθανότητα κόκκινη} = \frac{2x}{30}$$

Άρα οι κόκκινες μπάλες είναι διπλάσιες από τις μπλε. Οπότε οι μπλε είναι 10 και οι κόκκινες είναι 20.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Σε ένα δοχείο υπάρχουν μπλε, κόκκινες, κίτρινες και πράσινες μπάλες. Αν η πιθανότητα για κόκκινη είναι $1/10$, για μπλε $4/10$ και για κίτρινη είναι $2/10$, πόσες πράσινες μπάλες έχω;

Απάντηση:

Αφού η πιθανότητα να επιλέξω κόκκινη είναι $1/10$, αν είχα 10 μπάλες στο δοχείο, θα υπήρχε μόνο μία κόκκινη. Άρα τώρα που έχω 100 μπάλες οι κόκκινες είναι 10. Ομοίως, οι μπλε είναι 40 και οι κίτρινες είναι 20. Άρα οι πράσινες είναι : $100 - 20 - 40 - 10 = 30$

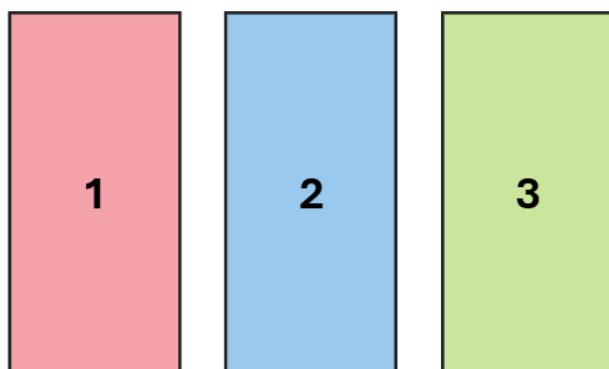
$$\text{Οπότε: Πιθανότητα πράσινης} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

Το σύνολο το οποίο έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα του πειράματος τύχης καλείται ενδεχόμενο.

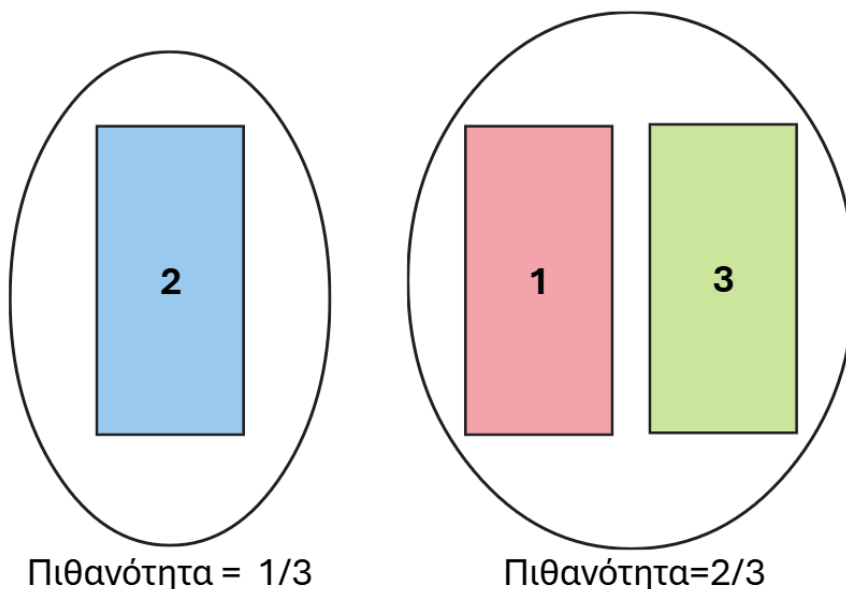
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Σε ένα τηλεπαιχνίδι υπάρχουν τρεις πόρτες. Πίσω από μία υπάρχει ένα έπαθλο και οι άλλες δύο είναι κενές. Ο διαγωνιζόμενος διαλέγει μία πόρτα. Στην συνέχεια, ο παρουσιαστής ανοίγει μία από τις άλλες δύο πόρτες, γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχει έπαθλο από πίσω. Δίνεται η επιλογή στον διαγωνιζόμενο να αλλάξει πόρτα. Τι πρέπει να κάνει;

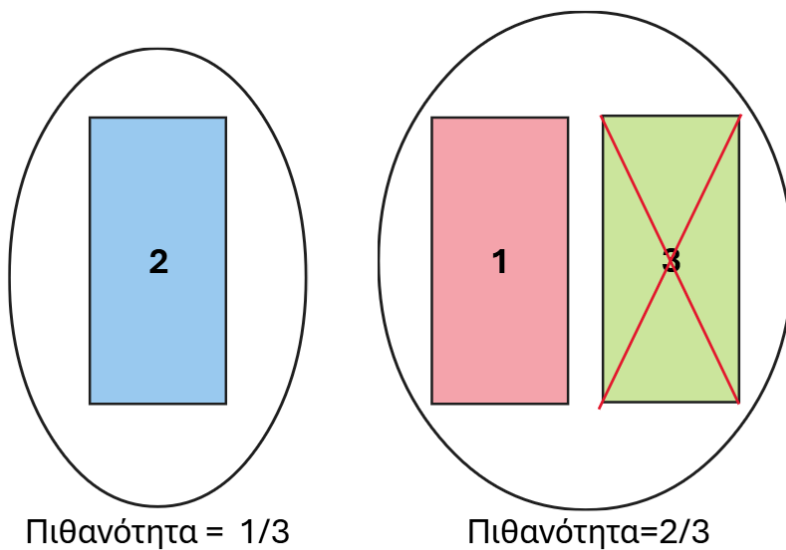
Απάντηση: Ονομάζω τις πόρτες 1,2,3.



Έστω ότι ο διαγωνιζόμενος επιλέγει την πόρτα 2. Τότε έχουν δημιουργηθεί δύο ενδεχόμενα. Το πρώτο ενδεχόμενο περιέχει μόνο την πόρτα 2 και έχει πιθανότητα $1/3$. Το δεύτερο ενδεχόμενο περιέχει τις πόρτες 1 και 3 και έχει πιθανότητα $2/3$.



Αφού ο παρουσιαστής ξέρει ότι η πόρτα που ανοίγει δεν περιέχει έπαθλο, η πιθανότητα του ενδεχομένου μετά το άνοιγμα της πόρτας παραμένει ίδια. Άρα πλέον υπάρχουν δυο ενδεχόμενα. Το πρώτο περιέχει την πόρτα 2, με πιθανότητα $1/3$, και το δεύτερο περιέχει μία από τις πόρτες 1 και 3, με πιθανότητα $2/3$. Οπότε πρέπει να αλλάξει πόρτα.



Στην παρακάτω άσκηση μελετάμε την πιθανότητα να μην συμβεί ένα ενδεχόμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ρίχνω ένα ζάρι μία φορά. Ποια είναι η πιθανότητα:

- 1) να έρθει 3;
- 2) να μην έρθει 3;

Απάντηση:

- 1) $\frac{1}{6}$
- 2) Τα επιθυμητά αποτελέσματα είναι : 1,2,4,5,6

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι : $\frac{5}{6}$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να μην εμφανιστεί ένα ενδεχόμενο είναι :

$$1 - (\text{Πιθανότητα ενδεχομένου})$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Σε ένα δοχείο υπάρχουν κόκκινες, μπλε και κίτρινες μπάλες. Αν η πιθανότητα να επιλέξω κίτρινη είναι $\frac{1}{10}$, ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξω κόκκινη ή μπλε;

Απάντηση: Ψάχνω την πιθανότητα να μην επιλέξω κίτρινη. Άρα:

$$\text{Πιθανότητα κόκκινης ή μπλε} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ρίχνω ένα κέρμα 2 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθουν γράμματα και στις 2 ρίψεις;

Απάντηση: Τα πιθανά αποτελέσματα είναι ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1/4$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ρίχνω ένα κέρμα 3 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει ΓΓΓ;

Απάντηση : $1/8$

Αν ρίξουμε ένα κέρμα 100 φορές πάλι θα δούμε ότι η πιθανότητα να έρθουν μόνο γράμματα είναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}$ εκατό φορές. Αυτό συμβαίνει γιατί οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Δηλαδή, το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης δεν επηρεάζει την επόμενη. Τέτοια ενδεχόμενα καλούνται ανεξάρτητα, και η πιθανότητα εμφάνισης και των δύο είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ρίχνω ένα κέρμα και υπάρχει $1/2$ πιθανότητα να βρέξει. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρω γράμματα και να βρέξει;

Απάντηση: Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα. Άρα η πιθανότητα να βρέξει και να φέρω γράμματα είναι :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η πιθανότητα βροχής μία μέρα του Ιανουαρίου είναι $2/3$. Ποια είναι η πιθανότητα να βρέξει τουλάχιστον μία μέρα την πρώτη εβδομάδα του Ιανουαρίου;

Απάντηση: Θα βρούμε την πιθανότητα να μην βρέξει καμία μέρα της εβδομάδας. Αφού είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα τότε η πιθανότητα είναι:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2187}$$

Άρα, η πιθανότητα να βρέξει τουλάχιστον μία μέρα την πρώτη εβδομάδα του Ιανουαρίου είναι :

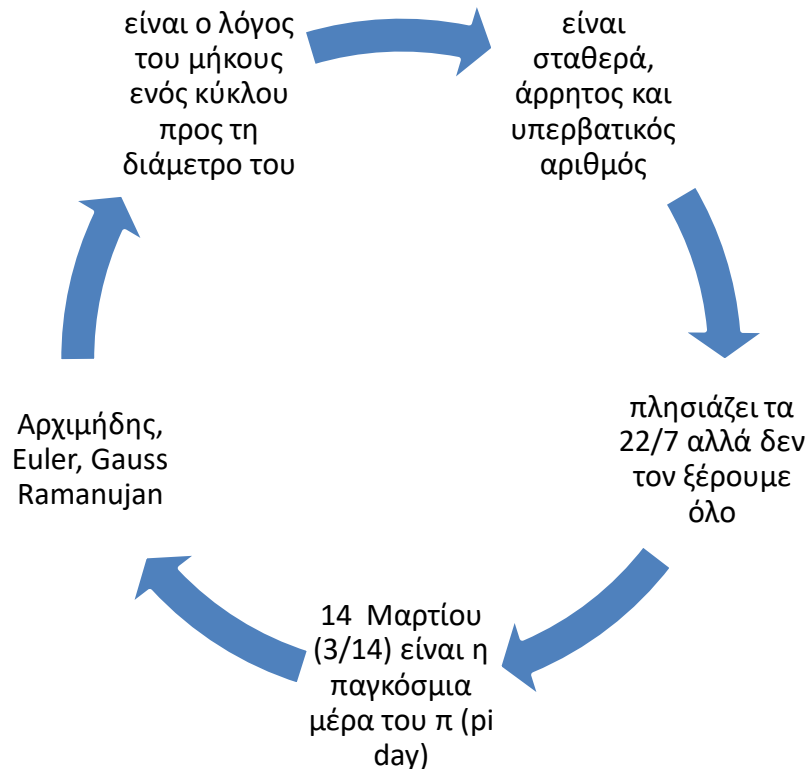
$$1 - \frac{1}{2187} = \frac{2186}{2187}.$$

Οπότε είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα βρέξει τουλάχιστον μία μέρα της ζητούμενης εβδομάδας.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ π

Στρατόπουλος Βασίλειος, Μαθηματικός

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή κατασκευή ενός τετραγώνου ισεμβαδικού με τον κύκλο, με τη χρήση κανόνα και διαβήτη, είναι ένα από τα σημαντικότερα της ιστορίας των μαθηματικών. Και από την αρχαιότητα σε πολλούς λαούς σε αυτό το πρόβλημα εμφανίζεται ένας περίεργος άρρητος αριθμός, ο π . Σήμερα τον π τον συναντάμε αρκετά με τον πιο γνωστό τύπο αυτόν του μήκους του κύκλου με ακτίνα R : $L = 2\pi R$

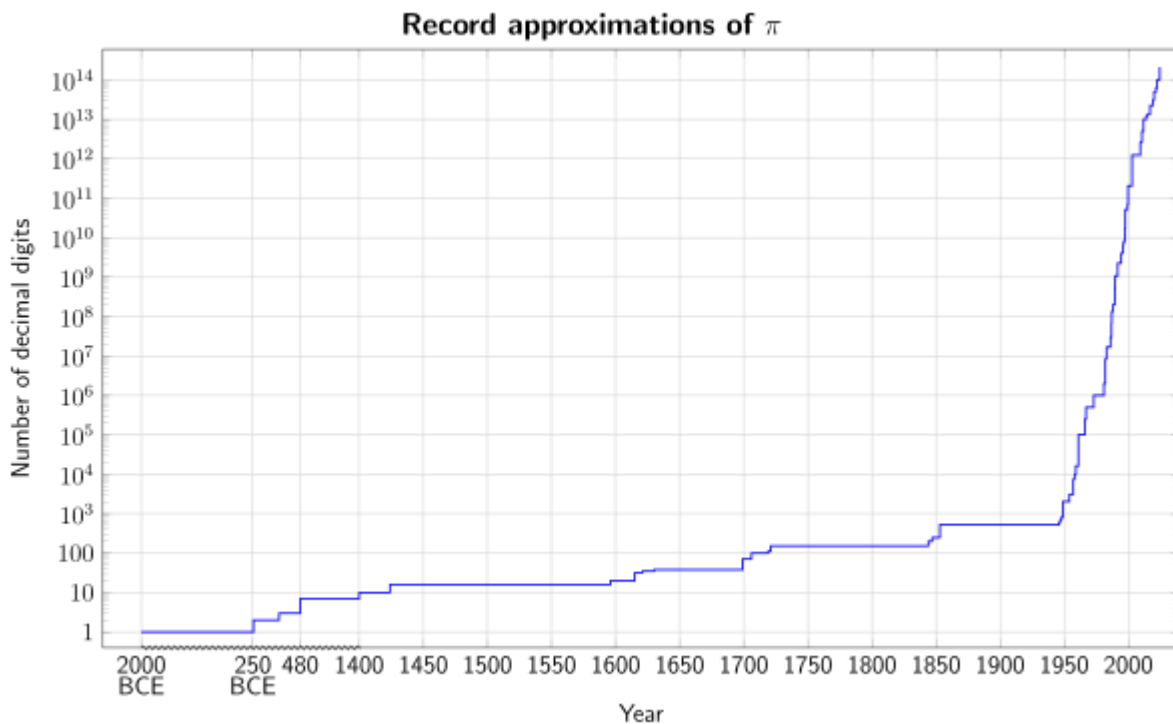


Για να λυθούν καλύτερα τα προβλήματα έπρεπε να ξέρουμε με όσο το δυνατόν καλύτερη ακρίβεια αυτόν τον αριθμό και για την προσέγγιση του προσπάθησαν πάρα πολλοί μαθηματικοί και φυσικά δεν τον έχουμε μάθει πλήρως (και ούτε πρόκειται!)

Στον κάτω πίνακα έχουμε μερικές χαρακτηριστικές προσεγγίσεις του π

Ημερομηνία	Ποιος/μέσο	Τιμή/ πληροφορίες	Δεκαδικά ψηφία
2000 π.Χ.	Αιγύπτιοι	$\pi=256/81=3,16$ σαν λύση	1 (σωστό)
250 π.Χ.	Αρχιμήδης	$\pi=22/7=3,1428$ αποδεικτικά	2 (σωστά)

		(μέθοδος εξάντλησης)	
480	Zu Chongzhi	3,1415926 (μέθοδος εξάντλησης)	7
1706	Machin	Με συγκλίνουσα σειρά	100
1947	Ferguson - αριθμομηχανή	1 έτος υπολογισμού	808
1949	Reitwiesner - πρώτος Η/Υ (ENIAC)	70 ώρες υπολογισμού	2037
4/2025 (ρεκόρ Γκίνες)	Linus – Kioxia πρόγραμμα y-cruncher	226 ημέρες υπολογισμού	3×10^{14}



Αυτό λοιπόν είναι ένα μικρό κομμάτι του...

$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620$
 $89986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174$
 $50284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783$
 $16527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558$
 $81748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116$
 $09433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752$

72489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370
 27705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896
 09173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021
 96086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631
 85950244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332
 08381420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780
 53217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182
 79682303019520353018529689957736225994138912497217752834791315155748572424541506
 95950829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701671139009848824
 01285836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977472684710404753
 46462080466842590694912933136770289891521047521620569660240580381501935112533824
 30035587640247496473263914199272604269922796782354781636009341721641219924586315
 03028618297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275
 59602364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746728909777727938
 00081647060016145249192173217214772350141441973568548161361157352552133475741849
 46843852332390739414333454776241686251898356948556209921922218427255025425688767
 17904946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800
 64225125205117392984896084128488626945604241965285022210661186306744278622039194
 94504712371378696095636437191728746776465757396241389086583264599581339047802759
 00994657640789512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026
 40136394437455305068203496252451749399651431429809190659250937221696461515709858
 38741059788595977297549893016175392846813826868386894277415599185592524595395943
 10499725246808459872736446958486538367362226260991246080512438843904512441365497
 62780797715691435997700129616089441694868555848406353422072225828488648158456028
 50601684273945226746767889525213852254995466672782398645659611635488623057745649
 80355936345681743241125150760694794510965960940252288797108931456691368672287489
 40560101503308617928680920874760917824938589009714909675985261365549781893129784
 82168299894872265880485756401427047755513237964145152374623436454285844479526586
 78210511413547357395231134271661021359695362314429524849371871101457654035902799
 34403742007310578539062198387447808478489683321445713868751943506430218453191048
 48100537061468067491927819119793995206141966342875444064374512371819217999839101
 59195618146751426912397489409071864942319615679452080951465502252316038819301420
 93762137855956638937787083039069792077346722182562599661501421503068038447734549
 20260541466592520149744285073251866600213243408819071048633173464965145390579626
 85610055081066587969981635747363840525714591028970641401109712062804390397595156
 77157700420337869936007230558763176359421873125147120532928191826186125867321579
 19841484882916447060957527069572209175671167229109816909152801735067127485832228
 71835209353965725121083579151369882091444210067510334671103141267111369908658516
 39831501970165151168517143765761835155650884909989859982387345528331635507647918
 53589322618548963213293308985706420467525907091548141654985946163718027098199430
 99244889575712828905923233260972997120844335732654893823911932597463667305836041

42813883032038249037589852437441702913276561809377344403070746921120191302033038
 01976211011004492932151608424448596376698389522868478312355265821314495768572624
 33441893039686426243410773226978028073189154411010446823252716201052652272111660
 39666557309254711055785376346682065310989652691862056476931257058635662018558100
 72936065987648611791045334885034611365768675324944166803962657978771855608455296
 54126654085306143444318586769751456614068007002378776591344017127494704205622305
 38994561314071127000407854733269939081454664645880797270826683063432858785698305
 23580893306575740679545716377525420211495576158140025012622859413021647155097925
 92309907965473761255176567513575178296664547791745011299614890304639947132962107
 34043751895735961458901938971311179042978285647503203198691514028708085990480109
 41214722131794764777262241425485454033215718530614228813758504306332175182979866
 22371721591607716692547487389866549494501146540628433663937900397692656721463853
 06736096571209180763832716641627488880078692560290228472104031721186082041900042
 29661711963779213375751149595015660496318629472654736425230817703675159067350235
 07283540567040386743513622224771589150495309844489333096340878076932599397805419
 34144737744184263129860809988868741326047215695162396586457302163159819319516735
 38129741677294786724229246543668009806769282382806899640048243540370141631496589
 79409243237896907069779422362508221688957383798623001593776471651228935786015881
 61755782973523344604281512627203734314653197777416031990665541876397929334419521
 54134189948544473456738316249934191318148092777710386387734317720754565453220777
 09212019051660962804909263601975988281613323166636528619326686336062735676303544
 77628035045077723554710585954870279081435624014517180624643626794561275318134078
 33033625423278394497538243720583531147711992606381334677687969597030983391307710
 98704085913374641442822772634659470474587847787201927715280731767907707157213444
 73060570073349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304781643
 78851852909285452011658393419656213491434159562586586557055269049652098580338507
 22426482939728584783163057777560688876446248246857926039535277348030480290058760
 75825104747091643961362676044925627420420832085661190625454337213153595845068772
 46029016187667952406163425225771954291629919306455377991403734043287526288896399
 58794757291746426357455254079091451357111369410911939325191076020825202618798531
 88770584297259167781314969900901921169717372784768472686084900337702424291651300
 50051683233643503895170298939223345172201381280696501178440874519601212285993716
 23130171144484640903890644954440061986907548516026327505298349187407866808818338
 51022833450850486082503930213321971551843063545500766828294930413776552793975175
 46139539846833936383047461199665385815384205685338621867252334028308711232827892
 12507712629463229563989898935821167456270102183564622013496715188190973038119800
 49734072396103685406643193950979019069963955245300545058068550195673022921913933
 91856803449039820595510022635353619204199474553859381023439554495977837790237421
 61727111723643435439478221818528624085140066604433258885698670543154706965747458
 55033232334210730154594051655379068662733379958511562578432298827372319898757141
 59578111963583300594087306812160287649628674460477464915995054973742562690104903

77819868359381465741268049256487985561453723478673303904688383436346553794986419
27056387293174872332083760112302991136793862708943879936201629515413371424892830
72201269014754668476535761647737946752004907571555278196536213239264061601363581
55907422020203187277605277219005561484255518792530343513984425322341576233610642
50639049750086562710953591946589751413103482276930624743536325691607815478181152
84366795706110861533150445212747392454494542368288606134084148637767009612071512
49140430272538607648236341433462351897576645216413767969031495019108575984423919
86291642193994907236234646844117394032659184044378051333894525742399508296591228
50855582157250310712570126683024029295252201187267675622041542051618416348475651
69998116141010029960783869092916030288400269104140792886215078424516709087000699
28212066041837180653556725253256753286129104248776182582976515795984703562226293
4860034158722980534989650226291748788202734209222453398562647669149055628425039
12757710284027998066365825488926488025456610172967026640765590429099456815065265
30537182941270336931378517860904070866711496558343434769338578171138645587367812
30145876871266034891390956200993936103102916161528813843790990423174733639480457
59314931405297634757481193567091101377517210080315590248530906692037671922033229
09433467685142214477379393751703443661991040337511173547191855046449026365512816
22882446257591633303910722538374218214088350865739177150968288747826569959957449
06617583441375223970968340800535598491754173818839994469748676265516582765848358
84531427756879002909517028352971634456212964043523117600665101241200659755851276
17858382920419748442360800719304576189323492292796501987518721272675079812554709
58904556357921221033346697499235630254947802490114195212382815309114079073860251
52274299581807247162591668545133312394804947079119153267343028244186041426363954
80004480026704962482017928964766975831832713142517029692348896276684403232609275
24960357996469256504936818360900323809293459588970695365349406034021665443755890
04563288225054525564056448246515187547119621844396582533754388569094113031509526
17937800297412076651479394259029896959469955657612186561967337862362561252163208
62869222103274889218654364802296780705765615144632046927906821207388377814233562
82360896320806822246801224826117718589638140918390367367222088832151375560037279
83940041529700287830766709444745601345564172543709069793961225714298946715435784
68788614445812314593571984922528471605049221242470141214780573455105008019086996
03302763478708108175450119307141223390866393833952942578690507643100638351983438
93415961318543475464955697810382930971646514384070070736041123735998434522516105
07027056235266012764848308407611830130527932054274628654036036745328651057065874
88225698157936789766974220575059683440869735020141020672358502007245225632651341
05592401902742162484391403599895353945909440704691209140938700126456001623742880
21092764579310657922955249887275846101264836999892256959688159205600101655256375
67856672279661988578279484885583439751874454551296563443480396642055798293680435
22027709842942325330225763418070394769941597915945300697521482933665556615678736
40053666564165473217043903521329543529169414599041608753201868379370234888689479
15107163785290234529244077365949563051007421087142613497459561513849871375704710

17879573104229690666702144986374645952808243694457897723300487647652413390759204
 34019634039114732023380715095222010682563427471646024335440051521266932493419673
 97704159568375355516673027390074972973635496453328886984406119649616277344951827
 36955882207573551766515898551909866653935494810688732068599075407923424023009259
 00701731960362254756478940647548346647760411463233905651343306844953979070903023
 46046147096169688688501408347040546074295869913829668246818571031887906528703665
 08324319744047718556789348230894310682870272280973624809399627060747264553992539
 94428081137369433887294063079261595995462624629707062594845569034711972996409089
 41805953439325123623550813494900436427852713831591256898929519642728757394691427
 25343669415323610045373048819855170659412173524625895487301676002988659257866285
 61249665523533829428785425340483083307016537228563559152534784459818313411290019
 99205981352205117336585640782648494276441137639386692480311836445369858917544264
 73998822846218449008777697763127957226726555625962825427653183001340709223343657
 79160128093179401718598599933849235495640057099558561134980252499066984233017350
 35804408116855265311709957089942732870925848789443646005041089226691783525870785
 95129834417295351953788553457374260859029081765155780390594640873506123226112009
 37310804854852635722825768203416050484662775045003126200800799804925485346941469
 77516493270950493463938243222718851597405470214828971117779237612257887347718819
 68254629812686858170507402725502633290449762778944236216741191862694396506715157
 79586756482399391760426017633870454990176143641204692182370764887834196896861181
 55815873606293860381017121585527266830082383404656475880405138080163363887421637
 14064354955618689641122821407533026551004241048967835285882902436709048871181909
 09494533144218287661810310073547705498159680772009474696134360928614849417850171
 80779306810854690009445899527942439813921350558642219648349151263901280383200109
 77386806628779239718014613432445726400973742570073592100315415089367930081699805
 36520276007277496745840028362405346037263416554259027601834840306811381855105979
 70566400750942608788573579603732451414678670368809880609716425849759513806930944
 94015154222219432913021739125383559150310033303251117491569691745027149433151558
 85403922164097229101129035521815762823283182342548326111912800928252561902052630
 16391147724733148573910777587442538761174657867116941477642144111126358355387136
 10110232679877564102468240322648346417663698066378576813492045302240819727856471
 98396308781543221166912246415911776732253264335686146186545222681268872684459684
 42416107854016768142080885028005414361314623082102594173756238994207571362751674
 57318918945628352570441335437585753426986994725470316566139919996826282472706413
 36222178923903176085428943733935618891651250424404008952719837873864805847268954
 62438823437517885201439560057104811949884239060613695734231559079670346149143447
 88636041031823507365027785908975782727313050488939890099239135033732508559826558
 67089242612429473670193907727130706869170926462548423240748550366080136046689511
 84009366860954632500214585293095000090715105823626729326453738210493872499669933
 94246855164832611341461106802674466373343753407642940266829738652209357016263846
 48528514903629320199199688285171839536691345222444708045923966028171565515656661

11359823112250628905854914509715755390024393153519090210711945730024388017661503
52708626025378817975194780610137150044899172100222013350131060163915415895780371
17792775225978742891917915522417189585361680594741234193398420218745649256443462
39253195313510331147639491199507285843065836193536932969928983791494193940608572
48639688369032655643642166442576079147108699843157337496488352927693282207629472
82381537409961545598798259891093717126218283025848112389011968221429457667580718
65380650648702613389282299497257453033283896381843944770779402284359883410035838
54238973542439564755568409522484455413923941000162076936368467764130178196593799
71557468541946334893748439129742391433659360410035234377706588867781139498616478
74714079326385873862473288964564359877466763847946650407411182565837887845485814
89629612739984134427260860618724554523606431537101127468097787044640947582803487
69758948328241239292960582948619196670918958089833201210318430340128495116203534
28014412761728583024355983003204202451207287253558119584014918096925339507577840
00674655260314461670508276827722235341911026341631571474061238504258459884199076
11287258059113935689601431668283176323567325417073420817332230462987992804908514
09479036887868789493054695570307261900950207643349335910602454508645362893545686
29585313153371838682656178622736371697577418302398600659148161640494496501173213
13895747062088474802365371031150898427992754426853277974311395143574172219759799
35968525228574526379628961269157235798662057340837576687388426640599099350500081
33754324546359675048442352848747014435454195762584735642161981340734685411176688
31186544893776979566517279662326714810338643913751865946730024434500544995399742
37232871249483470604406347160632583064982979551010954183623503030945309733583446
28394763047756450150085075789495489313939448992161255255977014368589435858775263
79625597081677643800125436502371412783467926101995585224717220177723700417808419
42394872540680155603599839054898572354674564239058585021671903139526294455439131
66313453089390620467843877850542393905247313620129476918749751910114723152893267
72533918146607300089027768963114810902209724520759167297007850580717186381054967
97310016787085069420709223290807038326345345203802786099055690013413718236837099
19495164896007550493412678764367463849020639640197666855923356546391383631857456
98147196210841080961884605456039038455343729141446513474940784884423772175154334
26030669883176833100113310869042193903108014378433415137092435301367763108491351
61564226984750743032971674696406665315270353254671126675224605511995818319637637
07617991919203579582007595605302346267757943936307463056901080114942714100939136
91381072581378135789400559950018354251184172136055727522103526803735726527922417
37360575112788721819084490061780138897107708229310027976659358387589093956881485
60263224393726562472776037890814458837855019702843779362407825052704875816470324
58129087839523245323789602984166922548964971560698119218658492677040395648127810
21799132174163058105545988013004845629976511212415363745150056350701278159267142
41342103301566165356024733807843028655257222753049998837015348793008062601809623
81516136690334111138653851091936739383522934588832255088706450753947395204396807
90670868064450969865488016828743437861264538158342807530618454859037982179945996

81154419742536344399602902510015888272164745006820704193761584547123183460072629
 33955054823955713725684023226821301247679452264482091023564775272308208106351889
 91526928891084555711266039650343978962782500161101532351605196559042118449499077
 89992007329476905868577878720982901352956613978884860509786085957017731298155314
 95168146717695976099421003618355913877781769845875810446628399880600616229848616
 93533738657877359833616133841338536842119789389001852956919678045544828584837011
 70967212535338758621582310133103877668272115726949518179589754693992642197915523
 38576623167627547570354699414892904130186386119439196283887054367774322427680913
 23654494853667680000010652624854730558615989991401707698385483188750142938908995
 06854530765116803337322265175662207526951791442252808165171667766727930354851542
 04023817460892328391703275425750867655117859395002793389592057668278967764453184
 04041855401043513483895312013263783692835808271937831265496174599705674507183320
 65034556644034490453627560011250184335607361222765949278393706478426456763388188
 07565612168960504161139039063960162022153684941092605387688714837989559999112099
 16464644119185682770045742434340216722764455893301277815868695250694993646101756
 85060167145354315814801054588605645501332037586454858403240298717093480910556211
 67154684847780394475697980426318099175642280987399876697323769573701580806822904
 59921236616890259627304306793165311494017647376938735140933618332161428021497633
 99189835484875625298752423873077559555955465196394401821840998412489826236737714
 67226061633643296406335728107078875816404381485018841143188598827694490119321296
 82715888413386943468285900666408063140777577257056307294004929403024204984165654
 79736705485580445865720227637840466823379852827105784319753541795011347273625774
 08021347682604502285157979579764746702284099956160156910890384582450267926594205
 55039587922981852648007068376504183656209455543461351341525700659748819163413595
 56719649654032187271602648593049039787489589066127250794828276938953521753621850
 79629778514618843271922322381015874445052866523802253284389137527384589238442253
 54726530981715784478342158223270206902872323300538621634798850946954720047952311
 20150432932266282727632177908840087861480221475376578105819702226309717495072127
 24847947816957296142365859578209083073323356034846531873029302665964501371837542
 88975579714499246540386817992138934692447419850973346267933210726868707680626399
 19361965044099542167627840914669856925715074315740793805323925239477557441591845
 82156251819215523370960748332923492103451462643744980559610330799414534778457469
 99921285999993996122816152193148887693880222810830019860165494165426169685867883
 72609587745676182507275992950893180521872924610867639958916145855058397274209809
 09781729323930106766386824040111304024700735085782872462713494636853181546969046
 69686939254725194139929146524238577625500474852954768147954670070503479995888676
 95016124972282040303995463278830695976249361510102436555352230690612949388599015
 73466102371223547891129254769617600504797492806072126803922691102777226102544149
 22157650450812067717357120271802429681062037765788371669091094180744878140490755
 17820385653909910477594141321543284406250301802757169650820964273484146957263978
 84256008453121406593580904127113592004197598513625479616063228873618136737324450

60792441176399759746193835845749159880976674470930065463424234606342374746660804
31701260052055928493695941434081468529815053947178900451835755154125223590590687
26487863575254191128887737176637486027660634960353679470269232297186832771739323
61920077745221262475186983349515101986426988784717193966497690708252174233656627
25928440620430214113719922785269984698847702323823840055655517889087661360130477
09843861168705231055314916251728373272867600724817298763756981633541507460883866
36406934704372066886512756882661497307886570156850169186474885416791545965072342
87730699853713904300266530783987763850323818215535597323530686043010675760838908
62704984188859513809103042359578249514398859011318583584066747237029714978508414
58530857813391562707603563907639473114554958322669457024941398316343323789759556
80856836297253867913275055542524491943589128405045226953812179131914513500993846
31177401797151228378546011603595540286440590249646693070776905548102885020808580
08781157738171917417760173307385547580060560143377432990127286772530431825197579
16792969965041460706645712588834697979642931622965520168797300035646304579308840
32748077181155533090988702550520768046303460865816539487695196004408482065967379
47316808641564565053004988161649057883115434548505266006982309315777650037807046
61264706021457505793270962047825615247145918965223608396645624105195510522357239
73951288181640597859142791481654263289200428160913693777372229998332708208296995
57377273756676155271139225880552018988762011416800546873655806334716037342917039
07986396522961312801782679717289822936070288069087768660593252746378405397691848
08204102194471971386925608416245112398062011318454124478205011079876071715568315
40788654390412108730324020106853419472304766667217498698685470767812051247367924
79193150856444775379853799732234456122785843296846647513336573692387201464723679
42787004250325558992688434959287612400755875694641370562514001179713316620715371
54360068764773186755871487839890810742953094106059694431584775397009439883949144
32353668539209946879645066533985738887866147629443414010498889931600512076781035
88611660202961193639682134960750111649832785635316145168457695687109002999769841
26326650234771672865737857908574664607722834154031144152941880478254387617707904
30001566986776795760909966936075594965152736349811896413043311662774712338817406
03731743970540670310967676574869535878967003192586625941051053358438465602339179
67492678447637084749783336555790073841914731988627135259546251816043422537299628
63267496824058060296421146386436864224724887283434170441573482481833301640566959
66886676956349141632842641497453334999948000266998758881593507357815195889900539
51208535103572613736403436753471410483601754648830040784641674521673719048310967
67113443494819262681110739948250607394950735031690197318521195526356325843390998
22498624067031076831844660729124874754031617969941139738776589986855417031884778
86759290260700432126661791922352093822787888098863359911608192353555704646349113
20859189796132791319756490976000139962344455350143464268604644958624769094347048
29329414041114654092398834443515913320107739441118407410768498106634724104823935
82740194493566516108846312567852977697346843030614624180358529331597345830384554
10337010916767763742762102137013548544509263071901147318485749233181672072137279

35567952844392548156091372812840633303937356242001604566455741458816605216660873
 87480472433912129558777639069690370788285277538940524607584962315743691711317613
 47838827194168606625721036851321566478001476752310393578606896111259960281839309
 54870905907386135191459181951029732787557104972901148717189718004696169777001791
 39196137914171627070189584692143436967629274591099400600849835684252019155937037
 01011049747339493877885989417433031785348707603221982970579751191440510994235883
 03454635349234982688362404332726741554030161950568065418093940998202060999414021
 68909007082133072308966211977553066591881411915778362729274615618571037217247100
 95214236964830864102592887457999322374955191221951903424452307535133806856807354
 46499512720317448719540397610730806026990625807602029273145525207807991418429063
 88443734996814582733720726639176702011830046481900024130835088465841521489912761
 06513741539435657211390328574918769094413702090517031487773461652879848235338297
 26013611098451484182380812054099612527458088109948697221612852489742555551607637
 16750548961730168096138038119143611439921063800508321409876045993093248510251682
 94467260666138151745712559754953580239983146982203613380828499356705575524712902
 74539776214049318201465800802156653606776550878380430413431059180460680083459113
 66408348874080057412725867047922583191274157390809143831384564241509408491339180
 96840251163991936853225557338966953749026620923261318855891580832455571948453875
 62878612885900410600607374650140262782402734696252821717494158233174923968353013
 61786536737606421667781377399510065895288774276626368418306801908046098498094697
 63667335662282915132352788806157768278159588669180238940333076441912403412022316
 36857786035727694154177882643523813190502808701857504704631293335375728538660588
 89045831114507739429352019943219711716422350056440429798920815943071670198574692
 73848653833436145794634175922573898588001698014757420542995801242958105456510831
 04629728293758416116253256251657249807849209989799062003593650993472158296517413
 57984910471116607915874369865412223483418877229294463351786538567319625598520260
 72947674072616767145573649812105677716893484917660771705277187601199908144113058
 64557791052568430481144026193840232247093924980293355073184589035539713308844617
 41079591625117148648744686112476054286734367090466784686702740918810142497111496
 57817724279347070216688295610877794405048437528443375108828264771978540006509704
 03302186255614733211777117441335028160884035178145254196432030957601869464908868
 15452856213469883554445602495566684366029221951248309106053772019802183101032704
 17838665447181260397190688462370857518080035327047185659499476124248110999288679
 15896904956394762460842406593094862150769031498702067353384834955083636601784877
 10608098042692471324100094640143736032656451845667924566695510015022983307984960
 79949882497061723674493612262229617908143114146609412341593593095854079139087208
 32273354957208075716517187659944985693795623875551617575438091780528029464200447
 21539628074636021132942559160025707356281263873310600589106524570802447493754318
 41494014821199962764531068006631183823761639663180931444671298615527598201451410
 27560068929750246304017351489194576360789352855505317331416457050499644389093630
 84387448478396168405184527328840323452024705685164657164771393237755172947951261

32398229602394548579754586517458787713318138752959809412174227300352296508089177
70506825924882232215493804837145478164721397682096332050830564792048208592047549
98573203888763916019952409189389455767687497308569559580106595265030362661597506
62225084067428898265907510637563569968211510949669744580547288693631020367823250
18232370845979011154847208761821247781326633041207621658731297081123075815982124
86398072124078688781145016558251361789030708608701989758898074566439551574153631
93191981070575336633738038272152798849350397480015890519420879711308051233933221
90346624991716915094854140187106035460379464337900589095772118080446574396280618
67178610171567409676620802957665770512912099079443046328929473061595104309022214
39371849560634056189342513057268291465783293340524635028929175470872564842600349
62961165413823007731332729830500160256724014185152041890701154288579920812198449
31569990591820118197335001261877280368124819958770702075324063612593134385955425
47781961142935163561223496661522614735399674051584998603552953329245752388810136
20234762466905581643896786309762736550472434864307121849437348530060638764456627
21866617012381277156213797461498613287441177145524447089971445228856629424402301
84791205478498574521634696448973892062401943518310088283480249249085403077863875
16591130287395878709810077271827187452901397283661484214287170553179654307650453
43246005363614726181809699769334862640774351999286863238350887566835950972655748
15431940195576850437248001020413749831872259677387154958399718444907279141965845
93008394263702087563539821696205532480321226749891140267852859967340524203109179
78999057188219493913207534317079800237365909853755202389116434671855829068537118
97952626234492483392496342449714656846591248918556629589329909035239233333647435
20370770101084388003290759834217018554228386161721041760301164591878392

➤ Επιπλέον οι αριθμοί είναι τυχαίοι, έτσι μπορείτε να ανακαλύψετε σε αυτή τη σειρά που βρίσκεται η ημερομηνία γέννησης σας (με 4 ψηφία);

Και χρειάζονται τόσα δεκαδικά για να λυθούν πρακτικά προβλήματα;

Η NASA για τους πιο απαιτητικούς υπολογισμούς χρειάζεται μόνο 15 δεκαδικά δηλαδή

$$\pi = 3,141592653589793$$

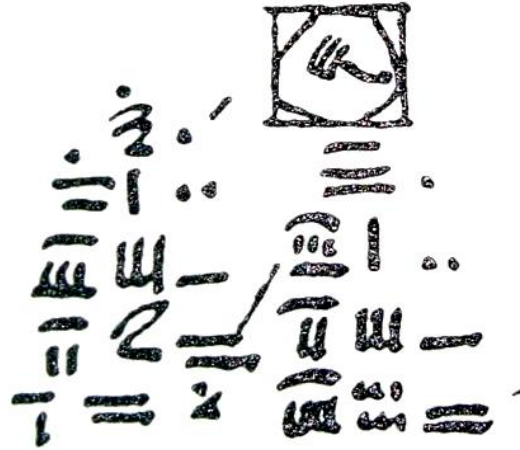
Έτσι για τον κύκλο σελήνης γύρω από τη γη με ακτίνα 385.000 km το μήκος του είναι 2.419.026,343264141 km

➤ Αν αυξήσουμε στο π με το επόμενο δεκαδικό ψηφίο τότε βρείτε ότι η διαφορά θα είναι μόλις 0,236 χιλιοστά του χιλιοστού του μέτρου!

Μια πραγματική εφαρμογή είναι το τεστ νέων υπερυπολογιστών.

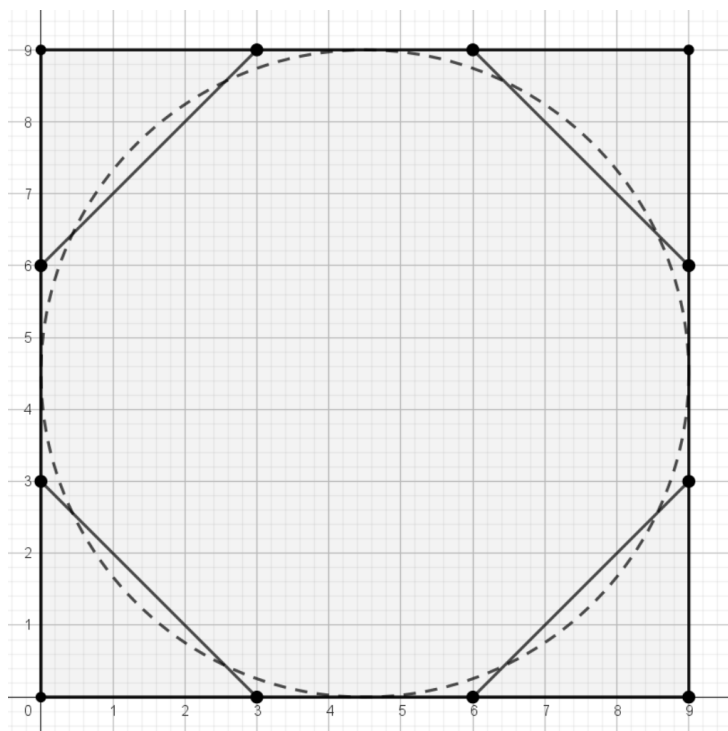
Ας δούμε την πρώτη καταγεγραμμένη προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου και έμμεσου υπολογισμού του π

Οι Αιγύπτιοι πριν από 4000 χρόνια έκαναν την πρώτη προσέγγιση του π , όπως φαίνεται σε ένα μαθηματικό πρόβλημα στον πάπυρο του Ahmes (ο γραφέας του πάπυρου), που έδινε οδηγίες για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός κύκλου με διάμετρο 9 μονάδες.



Ο κύκλος μοιάζει με οκτάγωνο εγκλεισμένο σε τετράγωνο. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι 9, μετράμε τα τετραγωνάκια εκτός οκταγώνου. ➤ Βρείτε ότι είναι 18.

Άρα στο οκτάγωνο μένουν $81 - 18 = 63$ τετραγωνάκια.



Με ένα τετραγωνάκι ακόμα δηλαδή 64 τετραγωνάκια, προκύπτει ένα νέο τετράγωνο με πλευρά 8.

Έτσι ο αρχικός κύκλος με διάμετρο 9 μονάδες έχει κατά προσέγγιση ίδιο εμβαδόν με τετράγωνο πλευράς 8, δηλαδή 64 μονάδες εμβαδού.



Σύμφωνα με τις οδηγίες του παπύρου για να βρει κανείς το εμβαδόν ενός κύκλου με διάμετρο d θα πρέπει να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα:

Από τη διάμετρο d να αφαιρέσει $\frac{1}{9}d$ και στη συνέχεια να υψώσει στο τετράγωνο, δηλαδή $E_{\text{κύκλου}} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$

Σήμερα γνωρίζουμε τον τύπο του εμβαδού κύκλου:

$$\begin{aligned} E_{\text{κύκλου}} &= \pi R^2 \\ \text{Αντικαθιστώντας:} \quad \left(\frac{8}{9}d\right)^2 &= \pi R^2 \\ \left(\frac{8}{9}2R\right)^2 &= \pi R^2 \\ \left(\frac{16}{9}\right)^2 R^2 &= \pi R^2 \\ \pi &= \frac{256}{81} = 3,16 \end{aligned}$$

Καταλήγουμε ότι οι Αιγύπτιοι προσέγγισαν το $\pi = 3,16$ με απόκλιση μόλις 0,6 %!

➤ Μπορείτε να το επαληθεύσετε;

Ερωτήματα για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων

- Υπήρχε διαχωρισμός ανάμεσα στις ακριβείς τιμές και στις προσεγγίσεις;
- Αυτοί οι γεωμετρικοί τύποι πως προέκυψαν;
- Στηρίζανε οι Αιγύπτιοι τα αποτελέσματά τους σε αποδείξεις, ή ήταν εμπειρικά;

Μία χαρακτηριστική μέθοδος υπολογισμού του κύκλου (μήκους και εμβαδού) και κατ επέκταση του π είναι με τα κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα, ή περιγεγραμμένα στον κύκλο, που πρώτοι την εφάρμοσαν στην αρχαία Ελλάδα. Η μέθοδος αυτή (μέθοδος εξάντλησης) θέτει το μήκος του κύκλου να είναι περίπου ίσο με το μήκος κανονικού εγγεγραμμένου, ή περιγεγραμμένου πολυγώνου με όσο το δυνατόν περισσότερες πλευρές.

Ο Αρχιμήδης την εφάρμοσε με επιτυχία φτάνοντας να υπολογίσει 96-γωνο.

--	--

Τέλειος κύκλος....

ή

σε μεγέθυνση 96-γωνο;

Ας προσπαθήσουμε κι εμείς!

1η περίπτωση: λύση με τριγωνομετρία

Θα τη δούμε ξεκινώντας από εγγεγραμμένο 4-γωνο

Παίρνουμε ένα κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο, εδώ ένα 4-γωνο κι έχουμε πλευρά AB και τις OA, OB ακτίνες του κύκλου.

Φέρουμε την διάμεσο OM ($AB = 2 AM$) στο ισοσκελές τρίγωνο OAB που είναι ταυτόχρονα ύψος και διχοτόμος της κεντρικής γωνίας O.

Έτσι η γωνία $\widehat{AOM} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{\omega}{2}$ (γενικά η ω είναι η κεντρική γωνία του πολυγώνου)

Για να βρούμε την πλευρά AB χρησιμοποιούμε το ημίτονο στο ορθογώνιο τρίγωνο OAM

$$\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\frac{AB}{2}}{R} \Rightarrow AB = 2R\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Γνωρίζουμε ότι $\omega = \frac{360}{\nu}$ όπου ν είναι ο αριθμός των πλευρών του ν-γώνου.

Ο τύπος γενικά είναι: $\lambda_{\nu} = 2R\eta\mu\left(\frac{180}{\nu}\right)$ με λ_{ν} την πλευρά του ν-γώνου

Η περίμετρος του ν-γώνου εύκολα βρίσκεται: $P_{\nu} = 2\nu R\eta\mu\left(\frac{180}{\nu}\right)$

Το μήκος του κύκλου είναι: $L = 2\pi R$

Αυξάνοντας τον αριθμό των πλευρών του ν-γώνου, τότε η περίμετρος του θα προσεγγίζει το μήκος του κύκλου.

Εξισώνοντας έχουμε: $L = P_{\nu} \Rightarrow 2\pi R = 2\nu R\eta\mu\left(\frac{180}{\nu}\right) \Rightarrow \pi = \nu\eta\mu\left(\frac{180}{\nu}\right)$

Τελικά το π προσεγγίζεται από τον τύπο: $\pi = \nu\eta\mu\left(\frac{180}{\nu}\right)$ και εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των πλευρών του ν-γώνου.

Δηλαδή απλά βάζουμε στον υπολογιστή τον τύπο με τον ν έναν μεγάλο φυσικό αριθμό;;; Όχι κι άσχημα!

➤ Για να δούμε πόσα δεκαδικά ψηφία μπορεί να μας δώσει ο υπολογιστής του κινητού μας...

2η περίπτωση: λύση με Πυθαγόρειο θεώρημα

Θα τη δούμε ξεκινώντας από εγγεγραμμένο 4-γωνο και διπλασιάζοντας τις πλευρές, δηλαδή προχωράμε σε 8-γωνο, 16-γωνο, ...



Στο 4-γωνο έχουμε πλευρά AB και τις OA, OB ακτίνες του κύκλου.

Το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο και το Πυθαγόρειο θεώρημα μας δίνει:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow AB^2 = 2R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2} \quad (1)$$

Φέρουμε την ΟΜΕ στο μέσο Μ της ΑΒ, τότε το Ε είναι μέσο του τόξου ΑΒ και η ΟΜ είναι κάθετη στην ΑΒ (γιατί;). Τότε η ΑΕ είναι η πλευρά του εγγεγραμμένου 8-γώνου.

Το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ορθογώνιο και το Πυθαγόρειο θεώρημα μας δίνει:

$$AE^2 = AM^2 + ME^2 \Rightarrow AE^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (OE - OM)^2 \quad (2)$$

Για να βρούμε το ΟΜ, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ το Πυθαγόρειο θεώρημα μας δίνει:

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 \Rightarrow OM^2 = R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Rightarrow OM = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

$$\text{Η εξίσωση (2) γίνεται: } AE^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}\right)^2 \Rightarrow AE = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}\right)^2}$$

(➤ Εδώ αν θέλετε μπορείτε για εξάσκηση να αντικαταστήσετε το ΑΒ από τη σχέση (1) και να βρείτε το ΑΕ)

Στον τύπο βλέπουμε τη νέα πλευρά 2ν-γώνου να εξαρτάται από το σταθερό R (ακτίνα) και την προηγούμενη πλευρά ν-γώνου.

$$\text{Γενικός τύπος: } \lambda_{2\nu} = \sqrt{\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{\lambda_\nu^2}{4}}\right)^2}$$

Και με αυτό τον τύπο μπορούμε να προχωρούμε από το 8-γωνο, στο 16-γωνο, στο 32-γωνο ... και με τη βοήθεια του Η/Υ οι υπολογισμοί κι εδώ είναι εύκολοι.

Εξισώνοντας έχουμε: $L = P_\nu \Rightarrow 2\pi R = n\lambda_\nu$

Τελικά το π προσεγγίζεται από τον τύπο: $\pi = \frac{n\lambda_\nu}{2R}$

Κάτω βλέπουμε στο MS Excel (ή και άλλο υπολογιστικό φύλλο) τα αποτελέσματα των τύπων και των παραπάνω 2 περιπτώσεων λύσης και τέλος πως προσεγγίζεται το π.

4ο Θερινό Μαθηματικό Σχολείο 2025 - Διδασκαλίες Γ' Γυμνασίου

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ΑΚΤΙΝΑ	ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ	ΑΡΙΘ. ΠΛΕΥΡΩΝ	ΠΛΕΥΡΑ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ	ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ	ΔΙΑΦΟΡΑ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ του π με: L=P(v)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ	ΗΜΙΤΟΝΟ	ΠΛΕΥΡΑ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ του π = νημ(180/ν)
2	R	L	ν	λ(ν)	P(ν)	2πR - P(ν)	π	ω	ημ(ω/2)	λ(ν)	π
3	10	62,8318530717959	4	14,14213562	56,56854249	6,2633105768721	2,828427125	90,0000000000000	0,707106781187	14,14213562	2,828427125
4			8	7,653668647	61,22934918	1,6025038933815	3,061467459	45,0000000000000	0,382683432365	7,653668647	3,061467459
5			16	3,90180644	62,42890305	0,4029500266348	3,121445152	22,5000000000000	0,195090322016	3,90180644	3,121445152
6			32	1,960342807	62,73096981	0,1008832608771	3,136548491	11,2500000000000	0,098017140330	1,960342807	3,136548491
7			64	0,981353487	62,80662314	0,0252299327008	3,140331157	5,6250000000000	0,049067674327	0,981353487	3,140331157
8			128	0,49082457	62,82554502	0,0063080531404	3,141277251	2,8125000000000	0,024541228523	0,49082457	3,141277251
9			256	0,245430766	62,83027602	0,0015770489098	3,141513801	1,4062500000000	0,012271538286	0,245430766	3,141513801
10			512	0,122717693	62,83145881	0,0003942644540	3,14157294	0,7031250000000	0,006135884649	0,122717693	3,14157294
11			1024	0,061359135	62,83175451	0,0000985662527	3,141587725	0,3515625000000	0,003067956763	0,061359135	3,141587725
12			2048	0,030679604	62,83182843	0,0000246415719	3,141591422	0,1757812500000	0,001533980186	0,030679604	3,141591422
13			4096	0,015339806	62,83184691	0,0000061603935	3,141592346	0,0878906250000	0,000766990319	0,015339806	3,141592346
14			8192	0,007669904	62,83185153	0,0000015400984	3,141592577	0,0439453125000	0,000383495188	0,007669904	3,141592577
15			16384	0,003834952	62,83185269	0,0000003850246	3,141592634	0,0219726562500	0,000191747597	0,003834952	3,141592634
16			32768	0,001917476	62,83185298	0,0000000962561	3,141592649	0,0109863281250	0,000095873799	0,001917476	3,141592649
17			65536	0,000958738	62,83185305	0,0000000240640	3,141592652	0,0054931640625	0,000047936900	0,000958738	3,141592652

➤ Για να δούμε πόσα δεκαδικά ψηφία μπορεί να μας δώσει ο υπολογιστής μας...

➤ Αν αντί για 4-γωνο σαν αρχικό πολύγωνο ήταν το (ισόπλευρο) 3-γωνο, πως θα ξεκινούσατε, μετά θα καταλήγατε στον ίδιο τύπο για το π;

Αν θέλετε να χαλαρώσετε δείτε κι αυτό:

Ο λαγός κι ο γρύλλος

Δύο φίλοι ο λαγός κι ο γρύλλος έβαλαν ένα στοίχημα. Ποιος θα κάνει τη μεγαλύτερη διαδρομή στον αέρα από ένα σημείο Α στο Β.

Ο λαγός έκανε 1 μόνο ημικύκλιο κι ο γρύλλος 3 και ο καθένας πίστευε ότι νίκησε.

➤ Εσείς τι λέτε;



Αφού δεν βρήκαν λύση είπε ο λαγός:

Εσύ γρύλλε την 1η φορά θα φτάσεις στη μέση του ΑΒ δηλ. από το Α στο Γ την 2η φορά θα πας το μισό του ΑΓ δηλ. από το Γ στο Δ, την 3η στο μισό του ΓΔ (του προηγούμενου) κι έτσι θα συνεχίζεις. Για να δούμε πότε θα

φτάσεις, ή θα περάσεις το Β; Ααα είπε ο γρύλλος αυτό είναι πολύ δύσκολο, θα ρωτήσω κανένα παιδί που πάει στο θερινό σχολείο! ➤...	
---	--

Πηγές

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Α΄

wikipedia.org

“Ιστορία των Μαθηματικών”, Χαρά Χαραλάμπους, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

“Η ιστορία του π ”, Αρώνη Παρασκευή, Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Συγγραφέας: Οικονόμου Ξενοφών, Μαθηματικός

Διδάσκουσα: Γαρίνη Ευσταθία, Μαθηματικός

Οι αριθμοί που ταλαιπώρησαν, ταλαιπωρούν και θα ταλαιπωρούν στο μέλλον χιλιάδες μαθηματικούς είναι οι πρώτοι αριθμοί. Πρώτοι ονομάζονται οι ακέραιοι αριθμοί, εκτός της μονάδας, που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και την μονάδα. Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός άρτιος πρώτος αριθμός. Ο Ευκλείδης απέδειξε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Ας δούμε όμως πρώτα γενικά για τους αριθμούς.

Κάθε φυσικός αριθμός έχει διαιρέτες το 1 και τον εαυτό του.

Σύνθετος λέγεται κάθε φυσικός αριθμός διάφορος του 1 που δεν είναι πρώτος.

π.χ. οι αριθμοί 4, 6, 8, 24, 56, ... είναι σύνθετοι.

Όλοι οι πρώτοι αριθμοί, με εξαίρεση τον αριθμό 2, είναι περιττοί.

Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Κάθε φυσικός αριθμός διάφορος από το 1 μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών (Θεμελιώδες Θεώρημα Θεωρίας Αριθμών).

Αλγόριθμος ανάλυσης φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Για να αναλύσουμε ένα αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, βρίσκουμε διαδοχικά τους πρώτους αριθμούς που είναι διαιρέτες του και εκτελούμε διαδοχικά διαιρέσεις

Παράδειγμα

Να αναλυθεί ο αριθμός 150 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Περιττός λέγεται ένας φυσικός αριθμός που διαιρούμενος με το 2 αφήνει υπόλοιπο 1. Κάθε περιττός αριθμός a γράφεται στη μορφή: $2 \cdot n + 1$, όπου n φυσικός αριθμός.

Άρτιος λέγεται ένας φυσικός αριθμός που διαιρείται με το 2. Στους άρτιους αριθμούς συμπεριλαμβάνεται και ο αριθμός μηδέν. Κάθε άρτιος φυσικός αριθμός a γράφεται στη μορφή: $2 \cdot n$ όπου n φυσικός αριθμός.

Υπάρχει τύπος που να δίνει τους πρώτους αριθμούς; (άλυτο πρόβλημα)

Οι πρώτοι αριθμοί που διαφέρουν κατά 2 (διαδοχικοί περιττοί αριθμοί), όπως οι 3, 5, οι 5, 7, οι 17, 19 κλπ ονομάζονται δίδυμοι.

Υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι αριθμοί; (άλυτο πρόβλημα)

Η ακολουθία των 25 πρώτων αριθμών είναι η εξής:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

Αν ένας πρώτος αριθμός προκύπτει από την πρόσθεση μιας ακολουθίας αριθμών, που ο καθένας είναι διπλάσιος από τον προηγούμενό του, τότε ο πρώτος πολλαπλασιασμένος με τον μεγαλύτερο προσθετέο θα είναι τέλειος αριθμός.

Παράδειγμα $7 = 1 + 2 + 4$ τότε $7 \cdot 4 = 28$ τέλειος αριθμός.

Κατηγορίες πρώτων αριθμών

Ισχυροί πρώτοι : όταν ο μέσος όρος του προηγούμενου και του επόμενου του πρώτου είναι μικρότερος από αυτόν, παράδειγμα 13, 17, 19 τρεις διαδοχικοί πρώτοι ο $MO = (13+19)/2 = 16 < 17$

Ασφαλείς πρώτοι : όταν δημιουργούνται πολλαπλασιάζοντας έναν άλλο πρώτο με το 2 και προσθέτοντας το 1 παράδειγμα $23 \cdot 2 = 46$ $46+1=47$ ασφαλής πρώτος.

Ιδιότητες πρώτων αριθμών

- Οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι.
- Αν ένας αριθμός n δεν έχει διαιρέτες μικρότερους ή ίσους από την τετραγωνική του ρίζα, τότε είναι πρώτος.
- Όλοι οι πρώτοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα, εκτός του 2 και του 5, έχουν ως τελευταίο ψηφίο

κάποιο από τα 1, 3, 7 ή 9 (διότι οι αριθμοί που τελειώνουν σε 0, 2, 4, 6 και 8 είναι πολλαπλάσια του 2, ενώ οι αριθμοί που τελειώνουν σε 0 ή 5 είναι πολλαπλάσια του 5).

- Αν ο p είναι πρώτος και διαιρεί το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ για κάποιους ακέραιους α και β , τότε ο p διαιρεί το α ή το β . (Ευκλείδης)
- Αν p πρώτος και α ακέραιος, τότε το $\alpha p - \alpha$ διαιρείται από το p . (Μικρό Θεώρημα του Φερμά)

Ένας ακέραιος $p > 1$ είναι πρώτος αν και μόνο αν $(p-1)! + 1$ διαιρείται από το p . (Θεώρημα του Ουίλσον)

($5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$)

Κόσκινο του Ερατοσθένη

Η εύρεση των πρώτων αριθμών απασχόλησε από την αρχαιότητα του μαθηματικούς. Ένας από τους πιο απλούς αλλά και αργούς τρόπους για (μαζική) εύρεση πολλών πρώτων είναι το λεγόμενο κόσκινο του Ερατοσθένη: Στο σύνολο των φυσικών αριθμών - πρακτικά έως κάποιο μεγάλο αριθμό N - αρχίζουμε και αποκλείουμε πρώτα τα πολλαπλάσια του 2, μετά τα πολλαπλάσια του επόμενου μη διαγραμμένου αριθμού κ.ο.κ. έως το N . Παρατηρούμε ότι όλο και λιγότερους αριθμούς θα βρίσκουμε προς διαγραφή. Οι αριθμοί που θα απομείνουν είναι όλοι πρώτοι. Το κόσκινο του Ερατοσθένη είναι ένας αργός αλγόριθμος για το αν ένας συγκεκριμένος αριθμός N είναι πρώτος ή όχι, διότι μεταξύ άλλων απαιτεί ουσιαστικά και την εύρεση όλων των πρώτων μικρότερων ίσων.

Όλοι οι πρώτοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα, εκτός του 2 και του 5, έχουν ως τελευταίο ψηφίο ένα από τα 1, 3, 7 ή 9, διότι οι αριθμοί που τελειώνουν σε 0, 2, 4, 6 και 8 είναι πολλαπλάσια του 2 ενώ οι αριθμοί που τελειώνουν σε 0 ή 5 είναι πολλαπλάσια του 5.

Στον παρακάτω πίνακα έχουν προσδιοριστεί οι πρώτοι μεταξύ 1 και 100. Έχουν διαγραφεί τα πολλαπλάσια των πρώτων 2, 3, 5 και 7.

	2	3	X	5	/	7	X	X	A^
11	X	13	X	A^	X	17	X	19	
M	X	23	^ί	X	7^	7^"	X	29	7^
31		>3	X	^5"	X	37	X	X	X
41	X	43	X	X	X	47	X		7^
τi	X	53	Λί	34	^54		ρί	59	60
61	X	X	X	X	X	67	X	X	7^
71	16	73	74	7-5'	7^	77"	7^	79	X
M	X	33	X	X	X	X	X	39	7^
9/	X	^	^		7^	97	X	X	JX

Στα μαθηματικά πρώτος Μερσέν ονομάζεται ένας πρώτος αριθμός της μορφής $2^p - 1$. Ο νιοστός, πρώτος αυτής της μορφής συμβολίζεται με M_n . Οι αριθμοί αυτοί ονομάστηκαν έτσι προς τιμήν του Γάλλου θεολόγου και μαθηματικού Μαρσέν Μερσέν.

Σήμερα ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος αριθμός είναι πρώτος Μερσέν και είναι ο $2^{82589933} - 1$, ο οποίος έχει 24.862.048 ψηφία. Βρέθηκε τον Δεκέμβριο του 2018 από το Great Internet Mersenne Prime Search

$M_{51} = 2^{82.589.933} - 1$ ($M_{82589933}$)

Ο δεύτερος μεγαλύτερος γνωστός πρώτος αριθμός, και μόλις ο 50ος «πρώτος αριθμός Μερσέν» που γνωρίζουν οι μαθηματικοί μέχρι σήμερα, είναι ο $M_{77232917}$ ως $M_{50} = 2^{77232917} - 1$. Η πλήρης μορφή του αποτελείται από 23.249.425 ψηφία, μόλις 1.612.623 ψηφία λιγότερα από τον επόμενο!!!

Στη θεωρία των αριθμών, δύο ακέραιοι αριθμοί x και y ονομάζονται σχετικά πρώτοι ή πρώτοι προς αλλήλους ή μεταξύ τους πρώτοι, αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι η μονάδα. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι πρώτοι μεταξύ τους εάν δεν έχουν άλλο κοινό διαιρέτη πλην του 1. Εξ ορισμού δύο (διαφορετικοί) πρώτοι αριθμοί είναι και πρώτοι μεταξύ τους. Για παράδειγμα οι ακέραιοι 14 και 15 είναι πρώτοι μεταξύ τους, γιατί ο μόνος κοινός διαιρέτης τους είναι το 1, δηλαδή $\text{ΜΚΔ}(14, 15) = 1$. Οι 14 και 21 δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους γιατί $\text{ΜΚΔ}(14, 21) = 7$.

Προσοχή! Άλλο πρώτοι αριθμοί και άλλο πρώτοι μεταξύ τους.

π.χ. οι 8 και 9 είναι πρώτοι μεταξύ τους διότι $\text{ΜΚΔ}(8,9)=1$ ενώ οι 8 και 9 είναι σύνθετοι αριθμοί.
ΕΙΚΑΣΙΕΣ

ΕΙΚΑΣΙΑ, (από το ρήμα εικάζω = υποθέτω) είναι ομόρριζη με τη λέξη εικόνα. Αυτό γιατί χρησιμοποιούμε αυτή τη λέξη για μια πρόταση ή άποψη τη διαίσθησή μας ή κάποια σημάδια που μας προϋδεάζουν για αυτό που νομίζουμε.

Όπως καταλαβαίνετε, οι εικασίες ΔΕΝ μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία στην επίλυση προβλημάτων, καθώς δεν ξέρουμε αν ισχύουν ή όχι.

Είναι παράξενο το γεγονός ότι, μαθηματικές εικασίες που μπορούν να γίνουν κατανοητές ακόμη και από μικρά παιδιά, δεν μπορούν να αποδειχθούν ούτε και από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς.

Οι πρώτοι αριθμοί είναι ένα από τα αντικείμενα της θεωρίας αριθμών και είναι μια πολύ ενεργή ερευνητική περιοχή των μαθηματικών. Διάσημες και άλυτες εικασίες, όπως η Εικασία του Ρίμαν, η Εικασία του Γκόλντμπαχ και η εικασία $3n+1$ εμπλέκουν ή αφορούν πρώτους αριθμούς.

Η υπόθεση Ρίμαν (1826 - 1866)

Ο Ρίμαν, Γερμανός μαθηματικός, έθεσε το ζήτημα του πλήθους των πρώτων αριθμών, οι οποίοι είναι μικρότεροι από ένα δοσμένο φυσικό αριθμό n .

Πόσοι πρώτοι αριθμοί είναι μικρότεροι από το 20; Η απάντηση είναι 8 και είναι οι: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Πόσοι μικρότεροι από το 500; το 1000; ... κ.λ.π.

Ο Ρίμαν είχε κάνει μια υπόθεση για τα παραπάνω ερωτήματα, όμως λίγο αργότερα πέθανε. Η σπιτονοικοκυρά του δυστυχώς χωρίς να ξέρει τι έκανε έκαψε τις σημειώσεις του και έτσι δε θα μάθουμε ποτέ τι είχε βρει... Η υπόθεση Ρίμαν αποτελεί μια πρόκληση για τους μαθηματικούς έως και σήμερα.

Εικασία του Γκόλντμπαχ

«Κάθε ζυγός θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών». Αυτή είναι η Εικασία του Γκόλντμπαχ (έστω κι αν η διατύπωση οφείλεται στον Όιλερ , Leonhard Euler)

Αν κάποιος το ψάξει (και το έχουν κάνει πολλοί), φαίνεται πως ισχύει:

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$

$$12 = 5 + 7$$

$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$

κ.ο.κ.

Μέχρι σήμερα, με τη βοήθεια υπολογιστών, η εικασία έχει επαληθευθεί για όλους τους ζυγούς μέχρι τον 4×10^{18} (ασύλληπτος αριθμός!) Φαίνεται πως αληθεύει. Αλλά, χωρίς απόδειξη, τι να το κάνεις;

Κάθε ζυγός θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών

Φαίνεται απλό. Αλλά δεν είναι. Γενεές επί γενεών `` έχουν φάει`` τη ζωή τους προσπαθώντας.

Μαθηματικοί σπουδαίοι και μη. Για του λόγου το αληθές, διαβάστε το μυθιστόρημα του Απόστολου Δοξιάδη "Ο θεός Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ" (Καστανιώτη, 2000).

Η εικασία των Διδύμων Πρώτων

Ένα γνωστό άλυτο πρόβλημα της θεωρίας των αριθμών είναι η εικασία των Διδύμων Πρώτων στην οποία πρέπει να αποδειχτεί πως υπάρχουν άπειροι πρώτοι τέτοιοι ώστε: αν ο p είναι πρώτος και ο αριθμός $p + 2$ να είναι πρώτος. Σημειώνεται ότι 2 είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο πρώτων, καθώς αν ο p είναι πρώτος τότε θα είναι περιττός (με μοναδική εξαίρεση τον αριθμό 2) και άρα ο $p + 1$ θα είναι άρτιος και άρα σύνθετος αριθμός.

Εικασία 3.n+1

Η εικασία του Collatz, ή αλλιώς εικασία $3n+1$, που διατυπώθηκε το 1937 από τον Lothar Collatz είναι:

- Πάρε έναν οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n .
- Αν ο n είναι άρτιος, διαίρεσέ τον με το 2 και βρες το $n/2$. Αν ο n είναι περιττός πολλαπλασιάσε τον με το 3 και στο αποτέλεσμα πρόσθεσε 1, ώστε να πάρεις το $3n+1$.
- Επανάλαβε τη διαδικασία επ' αόριστον για τον αριθμό που προκύπτει κάθε φορά.

Σύμφωνα με την εικασία, από όποιον αριθμό και να ξεκινήσει κάποιος, πάντα θα καταλήξει στο 1. Η εικασία Collatz παραμένει ένα άλυτο πρόβλημα της θεωρίας αριθμών. Ο μεγάλος Ούγγρος μαθηματικός Paul Erdos ανέφερε κάποτε σχετικά με την εικασία αυτή: «Τα μαθηματικά μπορεί να μην είναι έτοιμα για τέτοια προβλήματα!» και προσέφερε 500\$ για την απόδειξή της. Αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχει συγκεκριμένη μαθηματική στρατηγική που να οδηγεί στην απόδειξη.

Παραδείγματα

Ας δούμε κάποιες $3n+1$ ακολουθίες θετικών ακεραίων, συγκεκριμένα των αριθμών 5, 6, 11, 15, 27 :

- 5, 16, 8, 4, 2, 1
- 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
- 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
- 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
- 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Άσκηση: υπολόγισε της ακολουθίες $3n+1$ για τους αριθμούς 3, 7, 13.

Φίλιοι Αριθμοί

Όταν ρωτήθηκε ο Πυθαγόρας τι είναι φίλος, απάντησε: αυτός που είναι ο άλλος σου εαυτός (έτερος εγώ) όπως το 220 και το 284.

Οι αριθμοί 220 και 284 αποκαλούνται Φίλιοι Αριθμοί, διότι συνδέονται μεταξύ τους με μια ιδιαίτερη σχέση, ο κάθε ένας από αυτούς είναι το άθροισμα των διαιρετών τού άλλου.

Οι γνήσιοι διαιρέτες του 220 είναι οι: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 και το άθροισμά τους $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$. Αντίστοιχα οι γνήσιοι διαιρέτες του 284 είναι οι: 1, 2, 4, 71, 142, με άθροισμα $1+2+4+71+142=220$.

Άρα οι αριθμοί (220, 284) είναι φίλιοι.

Σύμφωνα με την παράδοση ο Πυθαγόρας ή οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν το ζεύγος (220, 284), το οποίο εθεωρείτο μέχρι και τον Μεσαίωνα ως σύμβολο φιλίας (ιδιαίτερα στον Μεσαίωνα πουλούσαν φυλαχτά με χαραγμένους αυτούς τους αριθμούς).

Επίσης αποκαλούν συγκεκριμένους αριθμούς ως φίλιους αριθμούς και τους αποδίδουν αρετές και

κοινωνικές ιδιότητες.

“Αριθμοί όπως ο 220 και ο 284 είναι φίλοι, γιατί τα μέρη τού καθένα έχουν την δύναμη να δημιουργούν τον άλλον.”

Ιάμβλιχος 425 - 325 π.Χ.

Πολύ αργότερα

Ο N. Paganini (ναι, ο γνωστός!) σε ηλικία 16 ετών ανακάλυψε το ζευγάρι φίλων αριθμών (1184,1210), το οποίο είχε ξεφύγει από τους Fermat (17296,18416), Descartes (9363584, 9437056) και Euler (ανακάλυψε 62 ζεύγη!).

Οι Φίλοι Αριθμοί έως το 100.000 είναι:

- 220 – 284
- 1184 – 1210
- 2620 – 2924
- 5020 – 5564
- 6232 – 6368
- 10744 – 10856
- 12285 – 14595
- 17296 – 18416
- 63020 – 76084
- 79750 – 88730

Δεν γνωρίζουμε σήμερα αν τα ζευγάρια των φίλων αριθμών είναι άπειρα ή πεπερασμένα.

Άσκηση: Να επαληθευθεί ότι το ζεύγος (1184,1210) είναι φίλοι αριθμοί.

Πηγές:

- *ΒΙΚΙΠΑΙΔΕΙΑ*
- *ΕΦΗΜΕΡΙΔΑ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥ ΦΙΛΩΝ Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ*
- *mathimatikos*
- *Εικασία Collatz Γιασαφάκης Αναστάσιος*
- *Επιβλέπων καθηγητής: Αυγάτσικας Ζήνων*
- *Πρότυπο Γενικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής*

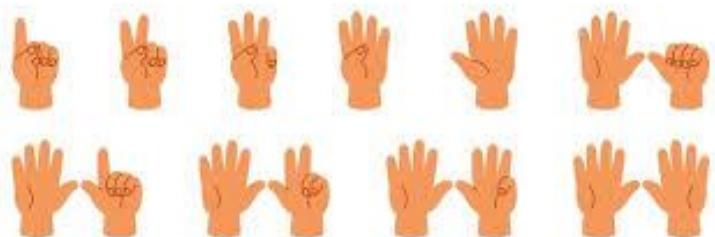
ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΓΛΩΣΣΑ ΤΗΣ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΟΤΗΤΑΣ

ΑΝΔΡΕΟΥ ΗΛΙΑΣ, Μαθηματικός

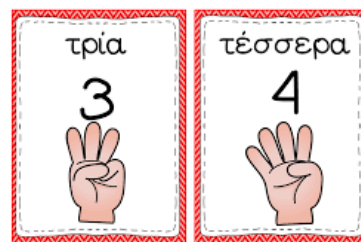
1. ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

α. Η ΑΝΑΓΚΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗΣ (ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)

Όταν οι άνθρωποι άρχισαν να ζουν σε ομάδες και να συνεργάζονται, διαπίστωσαν ότι με κάποιο τρόπο θα πρέπει να υπολογίζουν το έργο του καθενός ώστε να μην υπάρχει διαφορά ανάμεσά τους και δημιουργηθούν προστριβές. Ο καθένας λοιπόν έπρεπε να συνεισφέρει στην ομάδα ανάλογα με την απασχόλησή του τόσες χούφτες σιτάρι ή τόσα πρόβατα ή να καλλιεργήσει τόσα καρποφόρα δένδρα. Η μαγική λέξη στην παραπάνω ιστορία είναι η «ΤΟΣΑ». Έτσι παρουσιάστηκε η ανάγκη της καταμέτρησης, η οποία για πρώτη φορά έγινε με τα δάκτυλα των χεριών. Κάθε πρόβατο π.χ. το αντιστοιχούσαν με ένα δάκτυλο και η λέξη τόσα απαντιόταν με κάποια από τις παρακάτω εικόνες

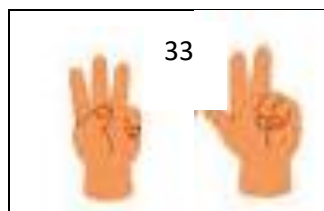


shutterstock.com · 2609892365



Στη διαδικασία αυτή δεν άργησε να εμφανιστεί ένα πρόβλημα που προέκυψε όταν οι ομάδες έγιναν πολυπληθείς και τα δάκτυλα των χεριών δεν επαρκούσαν για να αντιστοιχηθούν με τα προϊόντα που συνεισέφερε το κάθε μέλος της ομάδας. Τότε επινοήθηκε η διαδικασία να καταχωρηθεί το πόσες φορές αντιστοιχήθηκαν όλα τα δάκτυλα και πόσα ακόμα δάκτυλα. Έτσι κατασκευάστηκε το «**βασανιστικό**» δεκαδικό σύστημα που μαθαίνουμε μέχρι σήμερα στην πρώτη μας επαφή με τους αριθμούς.

Οι παρακάτω εικόνες δείχνουν μερικά τέτοια παραδείγματα.



Τους αριθμούς αυτούς, δηλαδή τους 1,2,3,4,... που μπορούν να αντιπροσωπεύσουν ποσότητες από φυσικά αντικείμενα τους ονομάζουμε ΦΥΣΙΚΟΥΣ.

Αν πάρουμε δύο φυσικούς αριθμούς α και β :

➤ ή θα είναι ίσοι $\alpha = \beta$

➤ ή ο ένας θα είναι μικρότερος από τον άλλο $\alpha < \beta$ ή $\alpha > \beta$

Την ιδιότητα αυτή την ονομάζουμε **διάταξη** και τους αριθμούς αυτούς **διατεταγμένους**.

Αν μας δώσουν οποιοδήποτε πλήθος φυσικών αντικειμένων μπορούμε να μεγαλώσουμε την ομάδα κατά ένα αντικείμενο και δεν υπάρχει ομάδα με ενδιάμεσο πληθυσμό, δηλαδή για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ο επόμενος του και κανένας άλλος δεν παρεμβάλλεται μεταξύ αυτών.

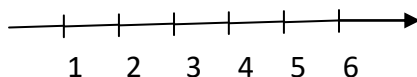
Την ιδιότητα αυτή την ονομάζουμε **διαδοχή**.

Τέλος υπάρχει το ελάχιστο πλήθος μιας ομάδας και το πλήθος αυτό το ονομάζουμε **αρχή**. Στην προκειμένη περίπτωση, των φυσικών αριθμών, αρχή είναι το 1.

Επομένως οι φυσικοί αριθμοί έχουν τις ιδιότητες

1. ΔΙΑΤΑΞΗ
2. ΔΙΑΔΟΧΗ
3. ΑΡΧΗ

Χρησιμοποιώντας ένα ευθύγραμμο τμήμα σαν ένα αντικείμενο και τοποθετώντας ίσα τέτοια ευθύγραμμα τμήματα διαδοχικά πάνω σε μια ημιευθεία μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους φυσικούς αριθμούς ως εξής:



β. ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

(ΜΗ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)

Όταν αυξήθηκαν οι συναλλαγές των ανθρώπων προέκυψαν εργασίες που ήταν καλό και συμφέρον να γίνονταν από κοινού ή να διαμοιράζονταν. Έτσι προέκυψαν τα απλά προβλήματα και οι πράξεις.

➤ Η ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ο Γιώργος είχε 18 αυγά και η Μαρία 7.

Πόσες θέσεις πρέπει να έχει μια θήκη για να τα βάλουμε μαζί; (ΠΡΟΣΘΕΣΗ)

Ένα τέτοιο πρόβλημα στη συμβολική γλώσσα των μαθηματικών το αναγράφουμε ως

$$18 + 7 = ? \quad \text{και γενικώς} \quad \alpha + \beta = ? \quad (1)$$

Αν τώρα κάποιος αναρωτηθεί : «όποιους φυσικούς αριθμούς και αν βάλουμε στη θέση του 18 και του 7, πάντα μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό που θα απαντάει στο σχετικό πρόβλημα;». Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η απάντηση στο πρόβλημα αυτό είναι καταφατική. Για να χωρέσουν όμως τα αυγά απαραίτητη προϋπόθεση είναι η θήκη να έχει όσες θέσεις χρειαστεί.

Στην πραγματικότητα όμως, τόσο οι ανθρώπινες κατασκευές όσο και τα φυσικά αντικείμενα, έχουν περιορισμένες διαστάσεις και για το λόγο αυτό απαιτείται να προβλέψουμε ή αν η κατασκευή μπορεί να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις μας ή το μέγεθος και τα χαρακτηριστικά της κατασκευής μας ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες που είναι απαραίτητες. Επομένως αν υποθέσουμε ότι μία θήκη έχει 30 θέσεις το πρόβλημα ανάγεται στο να απαντηθεί το παρακάτω ερώτημα:

- Αν ο Γιώργος έχει 18 αυγά και η Μαρία 7, χωράνε (**ΑΝΙΣΩΣΗ**) να τα βάλουμε όλα μαζί σε μία θήκη; Αυτό στη συμβολική γλώσσα των μαθηματικών αναγράφεται ως $18 + 7 \geq 30$ και αν θέλουμε να γεμίσουμε (**ΕΞΙΣΩΣΗ**) τη θήκη για να μην την μεταφέρουμε με κενές θέσεις και σπάσουν τα αυγά, το σχετικό πρόβλημα γίνεται:

- Αν ο Γιώργος έχει 18 αυγά πόσα αυγά πρέπει να **βάλει** η Μαρία για να γεμίσει η θήκη; και στη συμβολική γλώσσα των μαθηματικών $18 + ? = 30$ και γενικώς $\alpha + ? = \gamma$ (2)

Η σχέση (2) είναι ανάλογη με την (1).

Είναι εύλογο λοιπόν να απαντήσουμε στο αντίστοιχο ερώτημα:

«όποιους αριθμούς και αν βάλουμε στη θέση του 18 και του 7 στη σχέση (2), πάντα μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό που θα απαντάει στο σχετικό πρόβλημα;»

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν είναι πάντα καταφατική διότι αν π.χ. ο Γιώργος έχει 35 αυγά, όχι μόνον δεν μπορούμε να βάλουμε κάποια αυγά από της Μαρίας αλλά πρέπει να βγάλουμε και από τα αυγά του Γιώργου. Επομένως πρέπει να κάνουμε την αντίθετη (**ανάποδη**) ενέργεια δηλαδή να βγάλουμε και από τα αυγά του Γιώργου. Φαίνεται λοιπόν ότι οι αριθμοί πρέπει να χαρακτηρίζονται από ένα σημαδάκι που να δείχνει αν η ενέργεια την οποία δηλώνουν γίνεται κανονικά ή ανάποδα. Τα σημαδάκια αυτά τα ονομάζουμε **πρόσημα** και τα τοποθετούμε μπροστά από τους αριθμούς.

Είναι τα γνωστά μας (+) και (-) με τα οποία χαρακτηρίζουμε τους αριθμούς ως **θετικούς** (αυτούς που έχουν πρόσημο **+**) και **αρνητικούς** (αυτούς που έχουν πρόσημο **-**) .

Έτσι

- το (+5) σημαίνει **βάλε** 5 αυγά, κάνε 5 βήματα **μπροστά**, **ανέβα** 5 σκαλιά κ.ο.κ., ενώ
- το (-5) σημαίνει **βγάλε** 5 αυγά, κάνε 5 βήματα **πίσω**, **κατέβα** 5 σκαλιά κ.ο.κ.

Προφανώς αν κάνω μία ενέργεια και αμέσως μετά την αντίθετη (ανάποδη) κατά την ίδια ποσότητα, η αρχική κατάσταση δεν αλλάζει δηλαδή είναι σαν να μην ενεργήσαμε. Αυτή την ενέργεια περιγράφουμε με το σύμβολο 0 και το διαβάζουμε ΜΗΔΕΝ. Συμβολικά

$$(+12) + (+5) + (-5) = (+12) \quad \text{και γενικά} \quad \alpha + 0 = \alpha \quad (3)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι :

- ✓ Το 0 δεν περιγράφει κάποια ενέργεια και επομένως είτε γραφτεί ως (+0) είτε ως (-0) είναι το ίδιο. Έτσι μπορούμε να βάλουμε οποιοδήποτε πρόσημο στο 0.
- ✓ Οι αριθμοί που περιγράφουν αντίθετες ενέργειες συμβολίζονται με (+α) και (-α) λέγονται **αντίθετοι** και ισχύει : $(+\alpha) + (-\alpha) = 0$ (4)
Επειδή $(+\alpha) - (+\alpha) = 0$ η **αφαίρεση** καταργείται ως πράξη και **αντικαθίσταται με την πρόσθεση του αντιθέτου**.
- ✓ Το (-) μπροστά από έναν αριθμό καθορίζει το ότι ο αριθμός είναι αρνητικός. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με μία μεταβλητή. Στο σύμβολο (-α) δεν σημαίνει ότι είναι αρνητικός, δηλώνει τον αντίθετο του α . Αν ο α είναι θετικός ο (-α) είναι αρνητικός ενώ αν ο α είναι αρνητικός ο (-α) είναι θετικός. Για το λόγο αυτό όταν **απαλείφουμε παρένθεση μπροστά από την οποία υπάρχει το πρόσημο (-) αλλάζουμε τα πρόσημα όλων των προσθετέων όρων**
- ✓ Η πράξη της πρόσθεσης πρακτικά σημαίνει να κάνω τα αντικείμενα διαδοχικά.
Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο ότι οι αρνητικοί αριθμοί δεν μπορούν να αντιστοιχηθούν με φυσικά αντικείμενα και για το λόγο αυτό δεν μπορούν να συμπεριληφθούν στους φυσικούς αριθμούς. Είναι αριθμοί που έχει κατασκευάσει η ανθρώπινη σκέψη με συμβολικό τρόπο. Τους αριθμούς με τα πρόσημά τους και το (0) δηλαδή τους

$$\dots (-2), (-1), 0, (+1), (+2), \dots$$

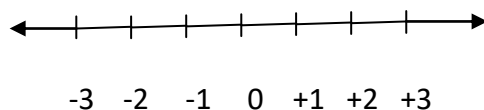
ονομάζουμε **ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ**.

Σε σχέση με τους φυσικούς οι ακέραιοι στερούνται αρχής, διατηρούν όμως τις ιδιότητες

1. ΔΙΑΤΑΞΗ

2. ΔΙΑΔΟΧΗ

Σε αντιστοιχία με τους φυσικούς οι ακέραιοι μπορούν να αναπαρασταθούν ως σημεία σε μία ευθεία



ΣΗΜΕΙΩΣΗ :

1. Οι αρνητικοί αριθμοί προκύπτουν αν περιστρέψουμε την ημιευθεία των φυσικών κατά 180° .
2. Την ευθεία αυτή, στα σημεία της οποίας μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τους αριθμούς, ονομάζουμε άξονα. Για να μετατραπεί μια ευθεία σε άξονα πρέπει να ορίσουμε πάνω σ' αυτήν ένα σημείο ως **ΑΡΧΗ**, ένα μήκος ως **ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ** και μια **ΦΟΡΑ** ως θετική.

➤ Ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΙ ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Τις περισσότερες φορές τα φυσικά φαινόμενα επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο και προκειμένου να υπολογίσουμε την εξέλιξη ενός φαινομένου χρειάζεται να επαναλάβουμε την πρόσθεση πολλές φορές με τον ίδιο αριθμό. Δηλαδή να εκτελέσουμε πράξεις με την παρακάτω μορφή:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

Για να αποφύγουμε το μακρύ αυτό γράψιμο συμβολίσουμε την παραπάνω διαδικασία ως εξής :

$17 * 3$, όπου ο ένας αριθμός δηλώνει ποιόν αριθμό χρησιμοποιώ στην πρόσθεση (**πολλαπλασιαστέος**) και ο άλλος πόσες φορές (**πολλαπλασιαστής**), δηλαδή ισχύει

$$17 * 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 51$$

Παρατηρούμε ότι αν εναλλάξουμε τις θέσεις των πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέου θα έχουμε

$$3 * 17 = 17 + 17 + 17 = 51$$

οπότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε κάθε όρο του πολλαπλασιασμού ως το μέγεθος που θα βρούμε αν μετρήσουμε το γινόμενο με μονάδα μέτρησης τον άλλο όρο.

Με τη χρήση της (3), το γινόμενο $17 * 3$ μπορεί να γραφτεί ως

$$17 * 3 = 0 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \quad (5)$$

δηλαδή το σύμβολο $17 * 3$ σημαίνει να προστεθεί 17 φορές ο 3 στο 0

Επομένως

$$10 * 3 = 0 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$4 * 3 = 0 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$1 * 3 = 0 + 3 = 3$$

$$0 * 3 = 0$$

και γενικώς

$$1 * \alpha = \alpha \quad (6)$$

$$0 * \alpha = 0 \quad (7)$$

Επεκτείνοντας τον πολλαπλασιασμό στους ακέραιους διαπιστώνουμε ότι αν ο πολλαπλασιαστέος είναι αρνητικός τότε όλοι οι αριθμοί που προστίθενται είναι αρνητικοί και αν ο πολλαπλασιαστής είναι αρνητικός τότε πρέπει να κάνω την αντίθετη πράξη, δηλαδή **αφαίρεση**. Και στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικός αριθμός. Επομένως κάθε φορά που σε ένα γινόμενο υπάρχει ένας αρνητικός παράγοντας η διαδικασία πρέπει να αναστραφεί. Δηλαδή

$$(+4) * (-3) = 0 + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -4 * 3$$

επειδή αναστρέφοντας δύο φορές μια διαδικασία επιστρέφει στην αρχική της κατάσταση ισχύει ο γνωστός κανόνας των προσήμων για τον πολλαπλασιασμό

$$(+)* (+) = (+)$$

$$(+)* (-) = (-)$$

$$(-)* (+) = (-)$$

$$(-)* (-) = (+)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Ο πολλαπλασιασμός με το (-1) μπορεί να ερμηνευτεί ως στροφή κατά 180° του αρχικού αριθμού, δηλαδή κατά τη γωνία που σχηματίζει ο (-1) με τον άξονα των φυσικών αριθμών.

Με ανάλογο τρόπο όπως με την πρόσθεση μπορούμε να αναρωτηθούμε αν για οποιουδήποτε φυσικούς α και β υπάρχει πάντα ένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε να ικανοποιεί τη σχέση $\alpha * \beta = ?$. Και σ' αυτό το ερώτημα η απάντηση είναι καταφατική.

Ισχύει όμως το ίδιο για τη σχέση $\alpha * ? = \beta$; Και στην περίπτωση αυτή, όπως και στο αντίστοιχο πρόβλημα της πρόσθεσης, η απάντηση είναι αρνητική.

Όπως λοιπόν κατασκευάσαμε συμβολικά τους αρνητικούς αριθμούς για να ικανοποιήσουμε τη σχέση $\alpha + ? = \beta$ με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε και το σύμβολο $\frac{\beta}{\alpha}$ για να περιγράψουμε τον αριθμό εκείνον που αν πολλαπλασιάσει τον α θα μας δώσει το β δηλαδή

$$\alpha * \frac{\beta}{\alpha} = \beta \quad \text{και επομένως} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \kappa \quad \text{τότε και μόνον αν} \quad \alpha * \kappa = \beta \quad (8)$$

Στο ερώτημα που προσπαθούμε να απαντήσουμε όμως υπάρχει μία ιδιαίτερη περίπτωση.

Τι γίνεται αν $\alpha = 0$ δηλαδή $0 * ? = \beta$;

Σ' αυτήν τη σχέση διαπιστώνουμε ότι όποιον αριθμό και αν βάλουμε στη θέση του ερωτηματικού θα ισχύει $0 * \kappa = 0$. Άρα αν $\beta \neq 0$ η ζητούμενη σχέση δεν ικανοποιείτε για κανέναν αριθμό δηλαδή **δεν είναι δυνατόν** να βρούμε έναν αριθμό που να κάνει τη ζητούμενη σχέση σωστή και για το λόγο αυτό η σχέση $0 * ? = \beta$ με $\beta \neq 0$ λέγεται **ΑΔΥΝΑΤΗ**.

Αν όμως είναι και $\beta = 0$ τότε στη θέση του ερωτηματικού μπορούμε να βάλουμε πολλούς αριθμούς δηλαδή **δεν είναι ορισμένος** ο αριθμός που μπορεί να κάνει τη σχέση σωστή.

Για το λόγο αυτό η σχέση $0 * \alpha = 0$ ονομάζεται **ΑΟΡΙΣΤΗ**

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι οι ιδιότητες:

$$\begin{aligned} 1. & \quad \frac{\alpha}{1} = \alpha \\ 2. & \quad \text{και για} \quad \alpha \neq 0 \quad \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \quad \& \quad \frac{0}{\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β με την ιδιότητα $\alpha * \beta = 1$ λέγονται **αντίστροφοι** και βάσει του προηγούμενου συμβολισμού $\alpha = \frac{1}{\beta}$ και $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Με το συμβολισμό αυτό η διαίρεση αντικαθίσταται με τον πολλαπλασιασμό με τη σχέση $\alpha : \beta = \alpha * \frac{1}{\beta}$.

Ξεκινώντας λοιπόν από τους φυσικούς αριθμούς τους επεκτείναμε συμβολικά στους ακραίους και τώρα επεκτείναμε τους ακραίους σε όλους όσους γράφονται στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\beta \neq 0$. Όλους αυτούς τους αριθμούς, τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε, τους ονομάσαμε **ΡΗΤΟΥΣ**.

Αποδεικνύεται ότι αν για τους ρητούς αριθμούς α και β ισχύει $\alpha < \beta$ τότε ο ρητός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ βρίσκεται ανάμεσά τους δηλαδή $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. Αυτή η ιδιότητα στερεί από τους ρητούς αριθμούς την ιδιότητα της διαδοχής. Επομένως η μόνη ιδιότητα που διατηρείται στους ρητούς αριθμούς είναι η **ΔΙΑΤΑΞΗ**. Και οι ρητοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν με σημεία μιας

ευθείας, τα οποία όμως είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο και έτσι δεν υπάρχει η δυνατότητα να τους αναγράψουμε όλους πάνω σε μία ευθεία.

Είναι γνωστό ότι για να προσθέσω δύο μεγέθη πρέπει να είναι μετρημένα με την ίδια μονάδα μέτρησης. Για το λόγο αυτό αν θελήσουμε να προσθέσουμε δύο ρητούς αριθμούς σε μορφή κλάσματος, αυτά πρέπει να έχουν τον ίδιο παρονομαστή (ο παρονομαστής σε ένα κλάσμα δηλώνει τη μονάδα μέτρησης). Διαφορετικά πρέπει να τα κάνω ομώνυμα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (8) για να τα μετατρέψω σε ισοδύναμα κλάσματα

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha}{\beta} * 1 + \frac{\kappa}{\lambda} * 1 = \frac{\alpha}{\beta} * \frac{\lambda}{\lambda} + \frac{\kappa}{\lambda} * \frac{\beta}{\beta} = \frac{\alpha\lambda}{\beta\lambda} + \frac{\kappa\beta}{\beta\lambda}$$

➤ ΟΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Όπως και με την πρόσθεση έτσι και με τον πολλαπλασιασμό χρειάζεται να υπολογίσουμε μεγάλα γινόμενα με τον ίδιο αριθμό της μορφής

$$3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3$$

Για να αποφύγουμε το μακρύ αυτό γράψιμο συμβολίσουμε την παραπάνω διαδικασία ως εξής :

3^{17} όπου ο ένας αριθμός δηλώνει ποιόν αριθμό χρησιμοποιώ στον πολλαπλασιασμό και ονομάζεται **βάση** και ο άλλος πόσες φορές και ονομάζεται **εκθέτης**, δηλαδή ισχύει:

$$3^{17} = 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3$$

Με τη χρήση της (6), η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί ως:

$$3^{17} = 1 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 \quad (10)$$

δηλαδή το σύμβολο 3^{17} σημαίνει να πολλαπλασιάσει 17 φορές ο 3 το 1

έτσι λοιπόν θα προκύψει:

$$3^{10} = 1 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3$$

$$3^4 = 1 * 3 * 3 * 3 * 3$$

$$3^1 = 1 * 3 = 3$$

$$3^0 = 1$$

και γενικώς:

$$\alpha^1 = \alpha \quad (11)$$

$$\alpha^0 = 1 \quad (12)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις όπου είτε η βάση είτε ο εκθέτης είναι αρνητικοί αριθμοί. Αν η βάση είναι αρνητική τότε θα έχω γινόμενο αρνητικών αριθμών και αν ο εκθέτης είναι άρτιος το αποτέλεσμα θα είναι θετικός αριθμός ενώ αν είναι περιττός αρνητικός. Επομένως:

$$(-3)^4 = 1 * (-3) * (-3) * (-3) * (-3) = 1 * 3 * 3 * 3 * 3 = 3^4$$

$$(-3)^5 = 1 * (-3) * (-3) * (-3) * (-3) * (-3) = -1 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = -3^5$$

καδηλαδή διαίρεση ή να πολλαπλασιάσω με τον αντίστροφο επομένως:

$$3^{(-4)} = 1 * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{3 * 3 * 3 * 3} = \frac{1}{3^4}$$

Και γενικά ισχύει για $\alpha \neq 0$ και n φυσικό αριθμό, $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$ (13)

Με ανάλογο τρόπο όπως με την πρόσθεση μπορούμε να αναρωτηθούμε αν για οποιουδήποτε φυσικούς α και β υπάρχει πάντα ένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε να ικανοποιεί τη σχέση $\alpha^\beta = ?$. Και σ' αυτό το ερώτημα η απάντηση είναι καταφατική. Ισχύει όμως το ίδιο για τη σχέση $(?)^\alpha = \beta$; Και στην περίπτωση αυτή όπως και στα αντίστοιχα προβλήματα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, η απάντηση είναι αρνητική.

Όπως λοιπόν κατασκευάσαμε συμβολικά τους αρνητικούς αριθμούς για να ικανοποιήσουμε τη σχέση $\alpha + ? = \beta$ και τους ρητούς για να ικανοποιήσουμε τη σχέση $\alpha * ? = \beta$ με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε και το σύμβολο $\sqrt[\alpha]{\beta}$ για να περιγράψουμε τον αριθμό εκείνον που αν πολλαπλασιαστεί α φορές με τον εαυτό του θα μας δώσει το β δηλαδή

$$(\sqrt[\alpha]{\beta})^\alpha = \beta \quad \text{και επομένως} \quad (\sqrt[\alpha]{\beta}) = \kappa \quad \text{τότε και μόνον αν} \quad \kappa^\alpha = \beta \quad (14)$$

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο υπάρχουν ιδιαίτερες περιπτώσεις. Ακόμα και αν οι α και β είναι ακέραιοι δεν υπάρχει πάντα ρητός αριθμός ρ που να ικανοποιεί π.χ. τη σχέση

διότι ακέραιος αριθμός δεν την ικανοποιεί. Αν υποθέσουμε ότι ο ρ είναι μη ακέραιος ρητός και επομένως σε δεκαδική μορφή θα έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό δεκαδικό ψηφίο, στο γινόμενο $\rho * \rho$ θα υπάρχει μη μηδενικό δεκαδικό ψηφίο. Άρα ο ρ^2 δεν θα είναι ακέραιος. Όμως είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχει ένας τέτοιος αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση αυτή. Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν και άλλοι αριθμοί, τους οποίους όμως δεν μπορούμε να βρούμε τρόπο να τους περιγράψουμε και για το λόγο αυτό τους ονομάζουμε **ΑΡΡΗΤΟΥΣ**. Ρητοί και άρρητοι είναι όλοι οι αριθμοί που γνωρίζουμε. Βρίσκονται σε **ΔΙΑΤΑΞΗ** μεταξύ τους και τους ονομάζουμε **ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ** αριθμούς.

➤ ΟΙ ΡΙΖΕΣ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αν το ερώτημα στην προηγούμενη παράγραφο το διαφοροποιήσουμε ως εξής :

$$(?)^2 = \beta$$

Τότε γεννάται το ερώτημα τι συμβαίνει όταν ο β είναι αρνητικός;

Γνωρίζουμε ότι όποιον αριθμό και αν βάλουμε στη θέση του ερωτηματικού το αποτέλεσμα θα είναι θετικός αριθμός. Ας πάρουμε την απλή περίπτωση και να αναζητήσουμε κάποιον αριθμό που να ικανοποιεί τη σχέση $(?)^2 = -1$

Μιας και δεν μπορούμε να βρούμε έναν τέτοιο αριθμό όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, ας θεωρήσουμε το σύμβολο i το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $i^2 = -1$.

Άμεσα γεννάται το ερώτημα είναι ο i πραγματικός αριθμός; Αν ήταν πραγματικός αριθμός ο i έστω θετικός, θα υπήρχαν άλλοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α και β τέτοιοι ώστε

$$0 < \alpha < i < \beta \Rightarrow$$

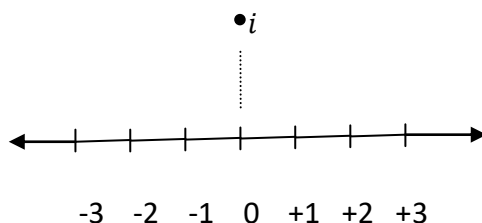
$$0 < \alpha^2 < i^2 < \beta^2 \Rightarrow$$

$$0 < \alpha^2 < -1 < \beta^2$$

σχέση η οποία δεν είναι δυνατόν να είναι σωστή. Επομένως ο i **δεν είναι πραγματικός αριθμός**.

Ας εξετάσουμε τι ζητάμε από το σύμβολο i . Να πολλαπλασιάσει δύο φορές το 1 και να μας δώσει (-1) . Αν αναλογιστούμε ότι πολλαπλασιάζοντας με έναν αρνητικό αριθμό στην ουσία το αποτέλεσμα περιστρέφεται κατά 180° , θα ήταν εύλογο να θεωρήσουμε ότι το i βρίσκεται σε

τέτοια θέση ώστε στρίβοντας το 1 κατά τη γωνία του δύο φορές να μεταφερθεί στο (-1) . Αυτή η απαίτηση μας οδηγεί στο να τοποθετήσουμε το i σε τέτοια θέση που να σχηματίζει γωνία 90° με τον άξονα των πραγματικών αριθμών

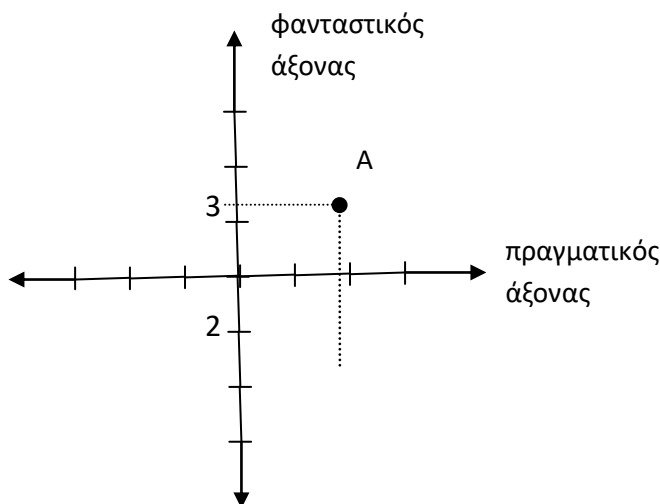


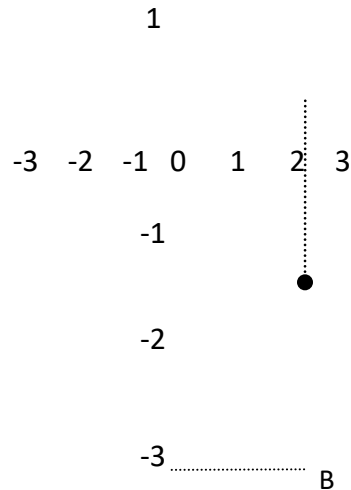
Το σύμβολο i ονομάζουμε **φανταστική μονάδα** και με μονάδα αυτόν μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν άλλο άξονα, κάθετο στον άξονα των πραγματικών αριθμών τον οποίο θα ονομάσουμε **φανταστικό άξονα**. Στα σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα αυτό μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τους αριθμούς όπως και στον πραγματικό άξονα. Τους αριθμούς του άξονα αυτού θα τους ονομάσουμε φανταστικούς και για να ξεχωρίζουν από τους πραγματικούς θα τους αναγράφουμε ως $2i, -3i$ κ.ο.κ.

Αν πάνω στην πραγματική ευθεία ξεκινώντας από το 0 περπατήσουμε 2 βήματα μπροστά και στη συνέχεια 3 βήματα μπροστά, θα φτάσουμε στο σημείο που αντιστοιχεί ο αριθμός

$2 + 3 = 5$ και αν περπατήσουμε 4 βήματα μπροστά και στη συνέχεια 7 βήματα πίσω θα φτάσουμε στο σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό $4 - 7 = -3$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να κινηθούμε και στο επίπεδο. Ξεκινώντας λοιπόν από το 0 και κάνοντας 2 βήματα μπροστά στην κατεύθυνση του πραγματικού άξονα και στη συνέχεια 3 βήματα μπροστά στην κατεύθυνση του φανταστικού άξονα θα βρεθούμε στο σημείο A στο οποίο θα αντιστοιχίσουμε τον αριθμό $2 + 3i$. Τους αριθμούς αυτούς τους ονομάζουμε **ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ**.

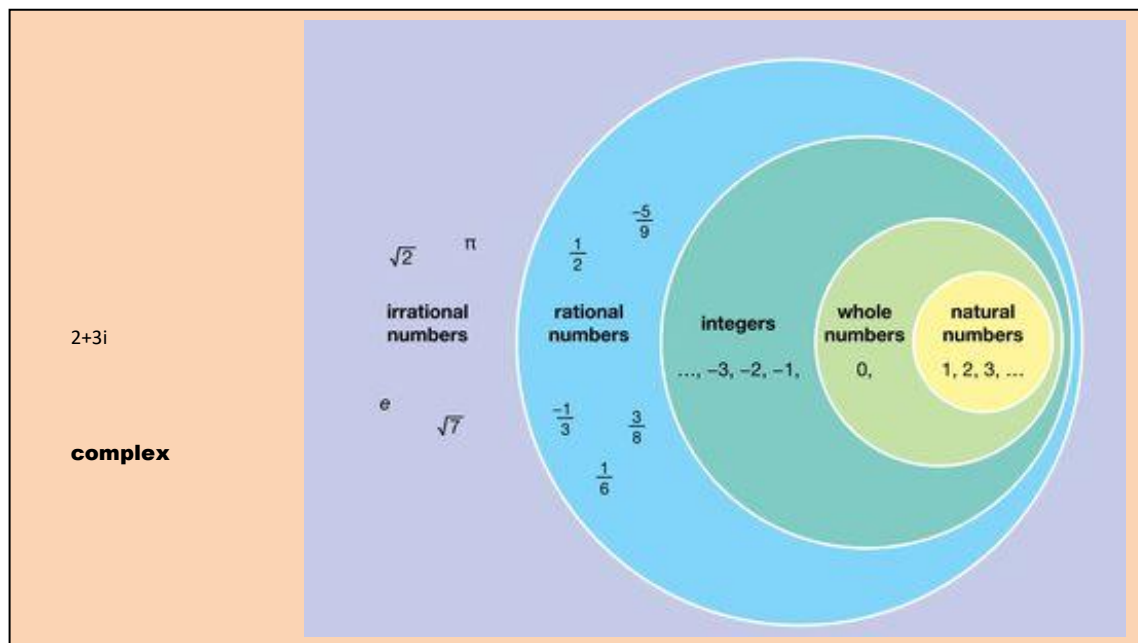
Το 2 ονομάζεται πραγματικό μέρος του μιγαδικού και το 3 φανταστικό μέρος του μιγαδικού.





Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο του επιπέδου έναν αριθμό που να αντιστοιχεί στο άθροισμα ενός πραγματικού και ενός φανταστικού. Έτσι στο σημείο A αντιστοιχεί ο αριθμός $2 + 3i$ και στο σημείο B ο $2,5 - 3,5i$. Προφανώς οι μιγαδικοί αριθμοί **δεν έχουν** την ιδιότητα της διάταξης.

Το διάγραμμα Euler των αριθμών (Britannica)



2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξίσωση ονομάζουμε κάθε σχέση η οποία συνδέει δυο διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους έχουμε μετρήσει μια ποσότητα.

- Ένα αυτοκίνητο κατανάλωσε 6 λίτρα καύσιμο για να διανύσει μια απόσταση 100 χιλιομέτρων. Πόσα λίτρα καύσιμο χρειάζεται για να διανύσει μια απόσταση 500 χιλιομέτρων; Εύκολα μπορεί κάποιος να κάνει έναν πολλαπλασιασμό και να απαντήσει στο ερώτημα αυτό. Αν όμως διαφοροποιήσουμε τα δεδομένα και θέσουμε το πρόβλημα ως εξής:
- Ένα αυτοκίνητο κατανάλωσε 9 λίτρα καύσιμο για να διανύσει μια απόσταση 150 χιλιομέτρων. Πόσα λίτρα καύσιμο χρειάζεται για να διανύσει μια απόσταση 500 χιλιομέτρων; Εδώ η απάντηση δεν είναι εύκολο να προκύψει με την απλή πράξη της προηγούμενης περίπτωσης. Πλην όμως το πρόβλημα συνδέει τις ίδιες ποσότητες και επομένως ο τρόπος που επιλύονται τας δύο αυτά προβλήματα είναι ίδιος.

Σκεφτόμαστε λοιπόν ότι το πόσο καύσιμο καταναλώνει το αυτοκίνητο για να διανύσει ένα χιλιόμετρο θα πρέπει να είναι το **ίδιο** σε όποια περίπτωση κι αν το μετρήσουμε. Αν λοιπόν είναι x τα λίτρα καυσίμου που χρειάζεται για να διανύσει τα 500 χιλιόμετρα θα πρέπει στην πρώτη περίπτωση $\frac{x}{500} = \frac{6}{100}$ ενώ στη δεύτερη $\frac{x}{500} = \frac{9}{150}$.

Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε μια εξίσωση που περιγράφει ένα φαινόμενο. Τι καλούμαστε όμως να κάνουμε όταν μας ζητούν να λύσουμε μια εξίσωση; Να μετατρέψουμε την εξίσωση σε μια άλλη που εξακολουθεί να περιγράφει το ίδιο φαινόμενο (**ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ**) και να έχει τη μορφή

$$x = \dots$$

Μία εξίσωση μπορεί να μετατραπεί σε μια άλλη ισοδύναμή της ακολουθώντας τον απλό κανόνα να διαφοροποιώ και τα δύο μέλη της με τον ίδιο τρόπο. Για το λόγο αυτό πρέπει να υπάρχουν ίδιοι παράγοντες και με τις ίδιες πράξεις και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Τι γίνεται όμως όταν δεν υπάρχουν ίδιοι παράγοντες;

Εδώ εκμεταλλευόμαστε την κρυφή ύπαρξη του 0 σαν προσθετέου και του 1 σαν πολλαπλασιαστή οπουδήποτε σε μία παράσταση, δηλαδή το ότι για οποιοδήποτε παράγοντα α ισχύει :

$$\alpha = 1 * \alpha + 0$$

τα δε 0 και 1 μπορούμε να τα γράψουμε ως

$$0 = \kappa - \kappa \text{ και } 1 = \lambda * \frac{1}{\lambda} \text{ με } \lambda \neq 0$$

α. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Οι εξισώσεις που περιέχουν τον άγνωστο μόνον στην πρώτη δύναμη λέγονται εξισώσεις πρώτου βαθμού.

Να λυθεί η εξίσωση: $x + 5 = 8$

Για να φέρουμε την εξίσωση στη μορφή $x = \dots$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

$$x + 5 = 8 + 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 5 = 8 + 5 - 5 \Leftrightarrow$$

$$x = 8 - 5 \Leftrightarrow$$

$$x = 3$$

ομοίως για να λύσουμε την εξίσωση : $3 * x = 15$

$$3 * x = 15 * 1 \Leftrightarrow$$

$$3 * x = 15 * 3 * \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = 15 * \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = 5$$

Στη γενική της μορφή μια εξίσωση πρώτου βαθμού περιγράφεται από τη σχέση

$$\alpha * x + \beta = 0$$

Επιλύοντας την (11) έχουμε

$$\alpha * x + \beta = \beta - \beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha * x = -\beta \Leftrightarrow$$

και αν $\alpha \neq 0$

$$\alpha * x = -\beta * \alpha * \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Αν $\alpha = 0$ η αρχική εξίσωση γίνεται

$$0 * x + \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 0$$

Οπότε αν $\beta = 0$ η εξίσωση δεν καθορίζει την τιμή του x και είναι **αόριστη**, ενώ αν $\beta \neq 0$ η εξίσωση δεν αληθεύει για καμία τιμή του x και η εξίσωση είναι **αδύνατη**

Με τον τρόπο αυτό επιλύονται όλες οι εξισώσεις πρώτου βαθμού.

β. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Αν η εξίσωση περιέχει τον άγνωστο σε μορφή δύναμης με εκθέτη διαφορετικό από 1 τότε δεν είναι δυνατή η επίλυσή της με τις παραπάνω μεθόδους καθότι αν υποθέσουμε ότι περιέχει τον όρο x^2 τότε δεν μπορούμε να απομονώσουμε τον όρο x και να φέρουμε την εξίσωση στην επιθυμητή μορφή διότι π.χ.

$$x^2 = 4$$

$$x * x = 4$$

$$x = 4 * \frac{1}{x}$$

δηλαδή το x υπάρχει και στα δύο μέλη.

Στην περίπτωση αυτή εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα

$$\alpha * \beta = 0 \quad \text{αν και μόνον εάν} \quad \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0$$

Μετασχηματίζουμε λοιπόν την εξίσωση έτσι ώστε το ένα μέλος να είναι 0

$$x^2 - 4 = 0$$

και προσπαθούμε να κάνουμε γινόμενο το άλλο μέλος, χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε τεχνική (επιμεριστική ιδιότητα, ταυτότητες,)

$$x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2) * (x + 2) = 0$$

άρα

$$x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 2 = 0$$

και τώρα έχουμε αναγάγει το αρχικό πρόβλημα σε δύο εξισώσεις πρώτου βαθμού τις οποίες επιλύουμε με τη γνωστή μέθοδο

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -2$$

- ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Η γενική μορφή της εξίσωσης δεύτερου βαθμού είναι $\alpha * x^2 + \beta * x + \gamma = 0$ όπου χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε $\alpha \neq 0$ διότι αν $\alpha = 0$ η εξίσωση θα είναι πρώτου βαθμού. Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή πρέπει να μετατρέψουμε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων το πρώτο μέλος της. Επομένως μπορούμε να μετασχηματίσουμε την αρχική ως εξής :

$$\alpha * x^2 + 1 * \beta * x + 1 * \gamma = 0$$

$$\alpha * x^2 + \left(\alpha * \frac{1}{\alpha}\right) * \beta * x + \left(\alpha * \frac{1}{\alpha}\right) * \gamma = 0$$

$$\alpha * \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} * x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0$$

$$\alpha * \left(x^2 + 1 * \frac{\beta}{\alpha} * x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0$$

$$\alpha * \left(x^2 + \left(2 * \frac{1}{2}\right) * \frac{\beta}{\alpha} * x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0$$

$$\alpha * \left(x^2 + 2 * \left(\frac{\beta}{2 * \alpha}\right) * x + 0 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0$$

$$\alpha * \left[x^2 + 2 * \frac{\beta}{2 * \alpha} * x + \left[\left(\frac{\beta}{2 * \alpha} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{2 * \alpha} \right)^2 \right] + \frac{\gamma}{\alpha} \right] = 0$$

$$\alpha * \left\{ \left[x^2 + 2 * \frac{\beta}{2 * \alpha} * x + \left(\frac{\beta}{2 * \alpha} \right)^2 \right] - \left(\frac{\beta}{2 * \alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \right\} = 0$$

και με τη χρήση της ταυτότητας $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$

$$\alpha * \left[\left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha} \right)^2 - \left(\frac{\beta^2}{4 * \alpha^2} \right) + \frac{\gamma}{\alpha} \right] = 0$$

$$\alpha * \left[\left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4 * \alpha * \gamma}{4 * \alpha^2} \right] = 0$$

και αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$\Delta = \beta^2 - 4 * \alpha * \gamma$$

$$\alpha * \left[\left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4 * \alpha^2} \right] = 0$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i. $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση γράφεται :

$$\alpha * \left[\left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2 * \alpha} \right)^2 \right] = 0$$

$$\alpha * \left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2 * \alpha} \right) * \left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2 * \alpha} \right) = 0$$

από την οποία παίρνουμε

$$x + \frac{\beta}{2 * \alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2 * \alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2 * \alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2 * \alpha} = 0$$

που είναι πρώτου βαθμού. Άρα

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

και η εξίσωση στην περίπτωση αυτή έχει **δύο πραγματικές και άνισες** λύσεις

ii. $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση γράφεται

$$\alpha * \left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha}\right)^2 = 0$$

$$\alpha * \left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha}\right) * \left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha}\right) = 0$$

από την οποία παίρνουμε

$$x + \frac{\beta}{2 * \alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2 * \alpha} = 0$$

που είναι πρώτου βαθμού. Άρα

$$x = -\frac{\beta}{2 * \alpha} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\beta}{2 * \alpha}$$

και η εξίσωση στην περίπτωση αυτή έχει **δύο πραγματικές και ίσες** λύσεις

iii. $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση γράφεται

$$\alpha * \left[\left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha}\right)^2 - \frac{(-1) * (-\Delta)}{4 * \alpha^2} \right] = 0$$

και επειδή $-\Delta > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha * \left[\left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{-1} * \sqrt{-\Delta}}{2 * \alpha}\right)^2 \right] = 0$$

$$\alpha * \left[\left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha}\right)^2 - \left(\frac{i * \sqrt{-\Delta}}{2 * \alpha}\right)^2 \right] = 0$$

και όπως στην πρώτη περίπτωση

$$\alpha * \left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2 * \alpha}\right) * \left(x + \frac{\beta}{2 * \alpha} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2 * \alpha}\right) = 0$$

από την οποία παίρνουμε

$$x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} = 0$$

άρα

$$x = \frac{-\beta + i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$$

και η εξίσωση στην περίπτωση αυτή έχει **δύο μιγαδικές** λύσεις. Να τονίσουμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν έχει έννοια η σύγκριση των λύσεων διότι οι μιγαδικοί αριθμοί δεν έχουν την ιδιότητα της διάταξης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

a. $4 - 7 + 3$

b. $4 - (7 - 3)$

c. $4 - 2(7 - 3)$

2. Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις

a. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa}{\lambda}$ τότε και μόνον όταν $\alpha\lambda = \beta\kappa$

b. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha\lambda + \beta\kappa}{\beta\lambda}$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις.

a. $A = 4 - \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{4}\right)$

b. $B = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} * \frac{7}{3}$

c. $\Gamma = \frac{7}{2} : \frac{14}{4} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{8}}$

d. $\Delta = 1 - \frac{1}{\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2} - 1}}}}$

4. Να αποδειχθεί ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ και οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς κ και λ ισχύει $\alpha < \frac{\kappa\alpha + \lambda\beta}{\kappa + \lambda} < \beta$

5. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και οι μ, ν φυσικοί αριθμοί, να αποδειχθούν παρακάτω σχέσεις

a. $\alpha^\mu \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$

b. $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

c. $\alpha^\mu \beta^\mu = (\alpha\beta)^\mu$

- d. $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$
6. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις
- a. $A = 2 * (-4)^2 + (-2)^5$
- b. $B = \frac{(-2)^5}{4^2} : \frac{3^4}{(-9)^2}$
- c. $\Gamma = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots$
- d. $E = 1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots$
7. Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί και οι μ, ν φυσικοί αριθμοί, να αποδειχθούν παρακάτω σχέσεις
- a. $\sqrt[\nu]{\alpha} \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
- b. $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$
- c. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$
8. Να εκτελεστούν οι πράξεις
- a. $(3 + 5i) - (7 - 2i)$
- b. $(3 + 5i) * (7 - 2i)$
- c. $(3 + 5i) * (3 - 5i)$
9. Να λυθούν οι εξισώσεις (επιλογή από τις προτεινόμενες στο https://3gym-thivas.voi.sch.gr/images/documents_pdf/mathematics/askiseis_exisoseis.pdf)
- a. $\frac{4x}{6} + \frac{x+1}{3} = \frac{11x}{12}$
- b. $\frac{4x}{6} + \frac{x+1}{3} = \frac{11x}{12}$
- c. $\frac{x-3}{2} - \frac{1-x}{10} = 2 + \frac{3(x-2)}{5}$
- d. $\frac{x+3}{3} - \frac{5x}{6} - 1 + \frac{x}{2} = 0$
10. Να λυθούν οι εξισώσεις
- a. $x^2 = 0$
- b. $x^2 = 9$
- c. $(x - 1)^2 = 9$
11. Να λυθούν οι εξισώσεις
- a. $x^2 - 5x + 6 = 0$
- b. $x^2 - 5x - 14 = 0$
- c. $2x^2 + x - 1 = 0$
- d. $x^2 - 2x - 1 = 0$
12. Να λυθούν οι εξισώσεις
- a. $x^2 = -9$
- b. $x^2 + 2x + 2 = 0$
13. Να λυθεί η εξίσωση
- $$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$$

ΤΟ ΜΟΝΟΧΟΡΔΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ

ΑΨΟΜΩΤΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ ΜΟΥΣΙΚΗΣ - ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑ ΜΑΝΤΟΛΙΝΟΥ

Η Μουσική συνδέεται ίσως περισσότερο από τις άλλες τέχνες με την εκπαιδευτική διαδικασία του σχολείου. Έχει άμεση αναφορά στα γνωστικά αντικείμενα που διδάσκονται οι μαθητές στο καθημερινό πρόγραμμα σπουδών και σ' όλη τη διάρκεια της σχολικής τους ζωής.

Άλλωστε οι φιλόσοφοι της Αρχαίας Ελλάδας αντιμετώπιζαν τη μουσική όχι μόνο σαν τέχνη αλλά και σαν επιστήμη. Πίστευαν πως όλα στο Σύμπαν βρίσκονται σε απόλυτη αλληλεξάρτηση και προσπαθούσαν να βρουν αυτή την άμεση σχέση ανάμεσα στη μουσική και την αστρονομία, τη φιλοσοφία, τα μαθηματικά.

Ο Πυθαγόρας έλεγε: «Όλος ο κόσμος, όλο το Σύμπαν κατατάσσεται σύμφωνα με τους αριθμούς της μουσικής αρμονίας». Ο Πυθαγόρας δίδαξε τις αριθμητικές βάσεις της μουσικής οι οποίες αναφέρονται κυρίως στις αναλογίες των διαστημάτων, πίσω τους όμως κρύβεται η θεώρηση ότι, **η κίνηση του σύμπαντος και αυτή της ανθρώπινης ψυχής βασίζονται στις ίδιες αρμονικές αναλογίες αριθμών.** Συνεπώς η μουσική με την αριθμητική της αρχή αποτελεί απεικόνιση της τάξης του σύμπαντος, ασκεί όμως και αντίστροφα επίδραση στο θυμικό και το χαρακτήρα του ανθρώπου και ως ηθικός και κοινωνικός παράγοντας πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στην εκπαίδευση και στο δημόσιο βίο.

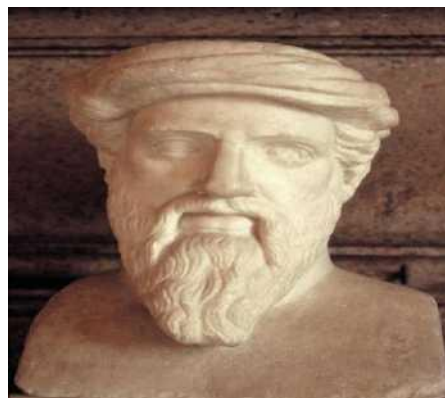
Έχοντας αυτό τον προβληματισμό ως ταξιδέψουμε στο χρόνο και τη γνώση και να μελετήσουμε τη σχέση της Μουσικής με τα Μαθηματικά, έχοντας σαν αφετηρία μελέτης το πρώτο επιστημονικό μουσικό όργανο στην ιστορία της ανθρωπότητας το Μονόχορδο του Πυθαγόρα.

Σκοπός της εργασίας μας είναι επίσης η γνωριμία με την πρώτη επιστημονικά θεμελιωμένη Θεωρία της Μουσικής, η έρευνα των ιστορικών στοιχείων που αφορούν το μονόχορδο καθώς και ο πειραματισμός με την κατασκευή αυτού του οργάνου.

2. ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ

Ο Πυθαγόρας ήταν φυσικός, μαθηματικός και θεωρητικός της μουσικής. Πιστεύουν ότι γεννήθηκε το 580/572 π.Χ. στη Σάμο. Πέθανε κοντά στο 500-490 π.Χ. Λέγεται πως ο Πυθαγόρας γεννήθηκε από τον Μνήσαρχο και την Πυθαΐδα, αλλά υπήρχε φήμη ότι είχε θεϊκή καταγωγή από τον Απόλλωνα. Τη γέννησή του την είχε προβλέψει η Ιέρεια Πυθία όταν οι γονείς του είχαν επισκεφτεί το Μαντείο των Δελφών.

Ο Πυθαγόρας ξεχώριζε από όλους τους άλλους νέους σε ομορφιά και σοφία. Εκπαιδεύτηκε στη Μίλητο και στην Αίγυπτο. Έπειτα γύρισε στην Σάμο όπου κατασκεύασε ημικυκλικό διδασκαλείο και ασχολήθηκε



με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας των Μαθηματικών και της Φιλοσοφίας. Εκτός από τη διδασκαλία των επιστημών αυτών, ο Πυθαγόρας δίδασκε στους νέους σωστούς τρόπους διατροφής και συμπεριφοράς και τους συμβούλευε να μην πίνουν πολύ κρασί και γυμνάζονται αρκετά. Είχε πολλούς και πιστούς μαθητές. Κάθε φορά που έμπαιναν στο σπίτι του τους έλεγε να λένε τα εξής: Πού έσφαλα; τι έκανα; τι έπρεπε να κάνω και δεν έκανα; Οι μαθητές του επί πέντε χρόνια παρέμεναν σιωπηλοί και άκουγαν μόνο τις ομιλίες του χωρίς ποτέ να βλέπουν τον ίδιο. Μετά το τέλος αυτής της δοκιμασίας, γίνονταν μέλη του σπιτιού του και είχαν δικαίωμα να τον βλέπουν.



Ο Πυθαγόρας κατά τη διάρκεια της ζωής του έκανε πολύ σημαντικές ανακαλύψεις. Μια από τις σημαντικότερες ήταν η Αριθμητική Ερμηνεία του Σύμπαντος. Αυτό το κατάφερε μελετώντας τα μήκη της χορδής ενός μονόχορδου κι έτσι ανακάλυψε την οκτάβα, την Πέμπτη και τον μείζονα τόνο. Σε αυτόν αποδίδεται και το γνωστό θεώρημα που πήρε το όνομά του (Πυθαγόρειο Θεώρημα) ότι δηλαδή, το τετράγωνο της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το τετράγωνο των δύο άλλων πλευρών.

Ο Πυθαγόρας είναι ο πρώτος που ονόμασε τον εαυτό του "φιλόσοφο". Ο Πρόκλος (Νεοπλατωνικός φιλόσοφος 410-485 π.Χ.) λέει πως πρώτος ο Πυθαγόρας ανύψωσε την γεωμετρία σε ελεύθερη επιστήμη, γιατί θεώρησε τις αρχές της από πάνω προς κάτω και όχι με βάση τα υλικά αντικείμενα.

Η προσφορά του Πυθαγόρα κυρίως στον τομέα των μαθηματικών είναι μεγάλη και παραμένει εξαιρετικά σημαντική ακόμη και στις μέρες μας. Οι θεωρίες και οι ανακαλύψεις του πήγαν τη μαθηματική σκέψη πολλά βήματα μπροστά.

Πέθανε σύμφωνα με τον Διογένη Λαέρτιο, καθώς προσπαθούσε να διαφύγει από την καταδίωξη Κροτωνιατών που φοβήθηκαν την εγκαθίδρυση τυραννίας λόγω της μεγάλης δύναμης που είχε αποκτήσει αυτός και οι μαθητές του στην πόλη. Οι Κροτωνιάτες έσφαξαν αυτόν και τους τετρακόσιους μαθητές του αφού πρώτα έκαψαν το σπίτι του Μίλωνα στο οποίο λίγο πριν είχαν συγκεντρωθεί. Ενώ σύμφωνα με τον Δικαίαρχο, πέθανε στο ιερό των Μουσών στο Μεταπόντιο μένοντας σαράντα μέρες νηστικός.

4. ΣΧΕΣΗ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ήδη από τον 6^ο π.Χ. ο Πυθαγόρας δίδασκε τις αριθμητικές βάσεις της μουσικής. Αυτές αναφέρονται κυρίως στις αναλογίες των διαστημάτων. Ο βαθμός συγγένειας των διαστημάτων καθορίζεται σύμφωνα με το λόγο των συχνοτήτων.

Πίνακας 1: Κατάτμηση μιας χορδής σύμφωνα με τους απλούς λόγους 1:2, 2:3, 3:4

Μήκος χορδής	Λόγοι της σχέσης	Φθόγγοι
A B	AB 1:1	ΝΤΟ ₁
A Γ B 1-----8 -----τ	ΑΓ/ΑΒ ή ΓΒ/ΑΒ = 1:2	ΝΤΟ ₂ 8va
A Δ E B F---χ----- ^ -----1	ΑΕ/ΑΒ ή ΔΒ/ΑΒ = 2:3	ΣΟΛ ₁
A Ζ Η Θ B F---χ---χ---χ---Γ	ΑΘ/ΑΒ ή ΖΒ/ΑΒ = 3:4	ΦΑ ₁

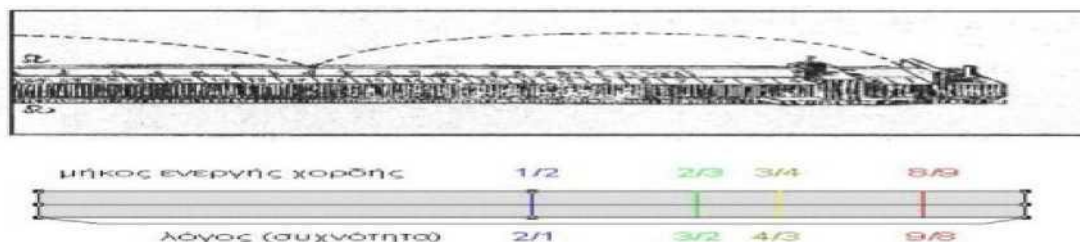
Ο βαθμός απλότητας των λόγων αποτελεί κριτήριο για τον καθορισμό του βαθμού συμφωνίας. Συμφωνίες είναι η οκτάβα με λόγο 1:2, η πέμπτη 2:3 και η τετάρτη 3:4

Η Πυθαγόρεια πέμπτη έχει λόγο 2:3 μπορεί να παραχθεί με τη διαίρεση της χορδής στο μονόχορδο και είναι

φυσική, δηλαδή λίγο μεγαλύτερη από τη σημερινή συγκερασμένη πέμπτη (702cents αντί 700)

Το διάστημα της οκτάβας θεωρήθηκε ιδιαίτερα Θεμελιακό γιατί περιείχε την αντίθεση Περιτού και Άρτιου, της Μονάδας και της Δυνάδας αλλά τα «εναρμόνιζε» τέλεια.

Η επέκταση των παραπάνω σκέψεων σε μια γενική Θεωρία σύμφωνα με την οποία τα πρωταρχικά μουσικά διαστήματα είναι δυνατόν να εκφράζονται μέσα από σχέσεις λόγων θετικών ακέραιων αριθμών τεκμηριώνεται παραδειγματικά με τον ακόλουθο τρόπο: αν πάρουμε για παράδειγμα μια τεντωμένη χορδή που επεκτείνεται με απόλυτα ομοιογενή τρόπο ανάμεσα σε δύο σταθερά σημειακά άκρα Α και Β που ονομάζονται «πέρατα» ή «όροι» παρατηρούμε πως η σταδιακή διαίρεση αυτή σε δύο τρία ή τέσσερα ίσα μέρη, μας δίνει αντίστοιχα τα σύμφωνα διαστήματα της καθαρής 8^{ης} ή διαπασών, της καθαρής 5^{ης} ή δια πέντε και της καθαρής 4^{ης} ή δια τεσσάρων.



Σύμφωνα με την Πυθαγόρεια παράδοση το διάστημα της 8^{ης} (2:1) ονομαζόταν αρμονία, το διάστημα της πέμπτης (3:2) διοξεία, ενώ εκείνο της τετάρτης (4:3) συλλαβή. Έτσι αν υποθεθεί ότι το αρχικό μήκος (Α Β) της χορδής είναι τέτοιο ώστε κατά την ενεργοποίησή της (δόνηση) παράγεται μια συχνότητα αντίστοιχη με το φθόγγο ΝΤΟ1 (κεντρικό ντο), τότε κατά την κατάρτισή της σε δύο μέρη θα ακουστεί η ΝΤΟ2 δηλαδή η οκτάβα της, σε τρία η πέμπτη της σε τέσσερα η τετάρτη και κλπ.

Εντυπωσιακό είναι ότι τα αποτελέσματα αυτά προκύπτουν όσο μικρό ή μεγάλο είναι το μέγεθος της χορδής, από όποιο υλικό να είναι κατασκευασμένη καθώς και οποιοδήποτε ηχείο ή υλικό να είναι στερεωμένη. Προκύπτει λοιπόν ότι το μήκος της χορδής έχει άμεση σχέση με το τονικό ύψος του ήχου που παράγεται ενεργοποιώντας τη.

Με το πέρασμα του χρόνου, η Πυθαγόρεια μουσική κλίμακα τροποποιήθηκε είτε για πρακτικούς είτε για καθαρά φιλοσοφικούς λόγους, όμως ο Πυθαγόρας είχε δείξει ένα δρόμο που

και οι σύγχρονες μουσικές κλίμακες ακολουθούν. Ακόμα και σήμερα υπολογίζουμε μαθηματικά τα μουσικά διαστήματα τα οποία βέβαια έχουν διαφοροποιηθεί σημαντικά από τότε.

Χρειάστηκε να περάσουν αιώνες για να προστεθούν τα μουσικά διαστήματα της 3ης και 6ης και η "ήπια" (συγκερασμένη) κλίμακα του Γιώχαν Σεμπάστιαν Μπαχ να "ξεκλειδώσει" με την σύνθεση Καλοσυγκερασμένο Κλειδοκύμβαλο τους νέους ατραπούς που ακολούθησαν οι επόμενοι μεγάλοι "Κλασσικοί". Από την Α-Β-Γ-Δ-Ε-Ζ-Η των αρχαίων Ελλήνων και την ΠΑ- ΒΟΥ-ΓΑ-ΔΗ -ΚΕ-ΖΩ-ΝΗ των Βυζαντινών, στην ΝΤΟ-ΡΕ-ΜΙ-ΦΑ-ΣΟΛ-ΛΑ-ΣΙ-ΝΤΟ των Δυτικών.

4. ΜΟΝΟΧΟΡΔΟ

Το Μονόχορδο υπήρξε αρχαίο μουσικό, επιστημονικό όργανο, το οποίο συνδέθηκε άρρηκτα με το έργο του αρχαίου φιλόσοφου και Θεωρητικού της Μουσικής Πυθαγόρα.

Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι έφτασαν στην έκφραση των διαστημάτων με αριθμητικές σχέσεις ύστερα από μια σειρά αλλεπάλληλων προσπαθειών πάνω σε διάφορους αυτοσχέδιους μηχανισμούς οδηγούμενοι τελικά στην ανακάλυψη του τελειότερου όλων: του ΜΟΝΟΧΟΡΔΟΥ. Εντρυφήσαν λοιπόν στη σχέση Μουσικής Μαθηματικών μελετώντας το αρχαίο αυτό όργανο το οποίο ονομαζόταν και «Πυθαγόρειος Κανών».

Το μονόχορδο ή χορδοτόνιο ή κανών όπως κατά καιρούς αποκλήθηκε ήταν ένας βαθμονομημένος ξύλινος χάρακας πάνω στον οποίο στηριζόταν μία ομοιόμορφη τεταμένη χορδή. Η χορδή αυτή μπορούσε κάθε φορά να διαιρείται με διαφορετικό τρόπο ανάλογα με τη θέση που έπαιρνε ο κινούμενος ξύλινος καβαλάρης (στα αρχαία ελληνικά: μαγάς ή υπαγωγέας) που βρισκόταν ακριβώς ανάμεσα σε εκείνη και στο χάρακα.

Με την παραπάνω μέθοδο ο χειριστής μπορούσε να πειραματίζεται με τις ποικίλες διαιρέσεις των μουσικών διαστημάτων και να τα κατατάσσει σε ομάδες ανάλογα με το βαθμό συμφωνίας ή διαφωνίας τους.

Αν και η ονομασία του οργάνου παραπέμπει στη χρήση μίας και μόνο χορδής, στην πραγματικότητα δύο χορδές ήταν το πλέον σύνηθες. Η μια εξ αυτών «ανοιχτή» και η άλλη εραπτόμενη σε κινητό τάστο (καβαλάρη). Στην απλούστερη του μορφή το μονόχορδο φέρει μια χορδή που εκτείνεται επί ενός ακουστικού ηχείου (το κυρίως σώμα του οργάνου).



Οι τύχες των μουσικών οργάνων διαμορφώθηκαν διαφορετικά. Ορισμένα από αυτά όπως το φλάουτο και η σάλπιγγα με διάφορες ποιοτικές βελτιώσεις συνεχίζουν να υπάρχουν και στη εποχή μας. Άλλα όμως μουσικά όργανα χάθηκαν εντελώς όπως η λύρα που χωρίς αυτή οι Αρχαίοι Έλληνες δεν μπορούσαν να τη μουσική, το θέατρο, την ποίηση.

Το μονόχορδο όμως δε χάθηκε. Μετά την εμφάνισή του οι άνθρωποι αρχίζουν να το βελτιώνουν προσθέτοντας στο ηχείο του όλο και περισσότερες χορδές. Έτσι το μονόχορδο από μηχανήμα για φυσικοηχητικές μετρήσεις γίνεται μουσικό όργανο.

Αρχικά συμπληρώνονται άλλες τρεις χορδές και έτσι χρησιμοποιήθηκε για πολλά χρόνια. Αργότερα οι μουσικοί τοποθετούν και άλλες χορδές, αλλά το ονομάζουν όπως οι αρχαίοι μονόχορδο. Υπήρχαν και παραλλαγές που ονομάζονταν δουλτίμερα, ψαλτήρια, κύμβαλα.

Το κανονάκι ή κανόνι ή ψαλτήριο που χρησιμοποιείται σήμερα από τους λαϊκούς μας οργανοπαίκτες είναι αναμφίβολα μακρινός απόγονος του Πυθαγόρειου μονόχορδου.

Μεταφορικά η λέξη κανών χρησιμοποιήθηκε από τους Έλληνες σαν συνώνυμο του μέτρου της αρετής και της αρμονίας γενικότερα.

Ένα πρώτο πολύ σοβαρό για την ιστορία του πιάνου βήμα ήταν και η ιδέα να προσαρμόσουν μια κλαβιατούρα στο πολύχορδο μονόχορδο.

Ψηφιακή Ανακατασκευή Φυσικών Αντικειμένων και Χώρων

ΤΣΑΜΠΡΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΣ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ, ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ

Σε αυτήν την ενότητα του [summer school title?] οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να μάθουν για την επιπολική γεωμετρία και την χρήση της στην τρισδιάστατη ανακατασκευή.

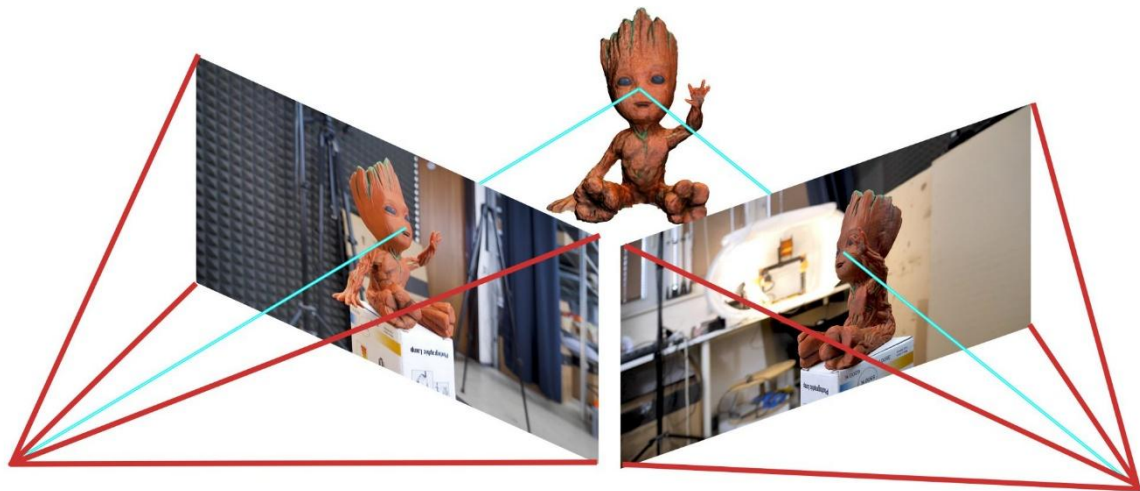


Figure 1 3D Scanning

Η φωτογραμμετρία, ως τεχνική εξαγωγής γεωμετρικών πληροφοριών από φωτογραφίες, βρίσκει εφαρμογή σε ποικίλους τομείς όπως η αρχιτεκτονική τεκμηρίωση, η αρχαιολογία, η γεωπληροφορική και η ψηφιακή αναπαράσταση αντικειμένων και χώρων. Η βασική της αρχή βασίζεται στην παρατήρηση του ίδιου σημείου από διαφορετικές γωνίες λήψης, ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός της θέσης του στον τρισδιάστατο χώρο. Μέσω της στερεοσκοπικής όρασης, δηλαδή της χρήσης ζεύγους εικόνων, μπορούμε να εκτιμήσουμε το βάθος και τη μορφή ενός αντικειμένου, με ακρίβεια που εξαρτάται από την ποιότητα των εικόνων και τις συνθήκες λήψης.

Κάνοντας μια σύντομη εισαγωγή στις πρακτικές χρήσεις της τριγωνομετρίας στις ναυμαχίες του Δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου οι συμμετέχοντες θα εξοικειωθούν με βασικούς τριγωνομετρικούς όρους και θα μπορέσουν να συμμετέχουν στη λύση ενός προβλήματος-δραστηριότητας εύρεσης απόστασης (range finding).

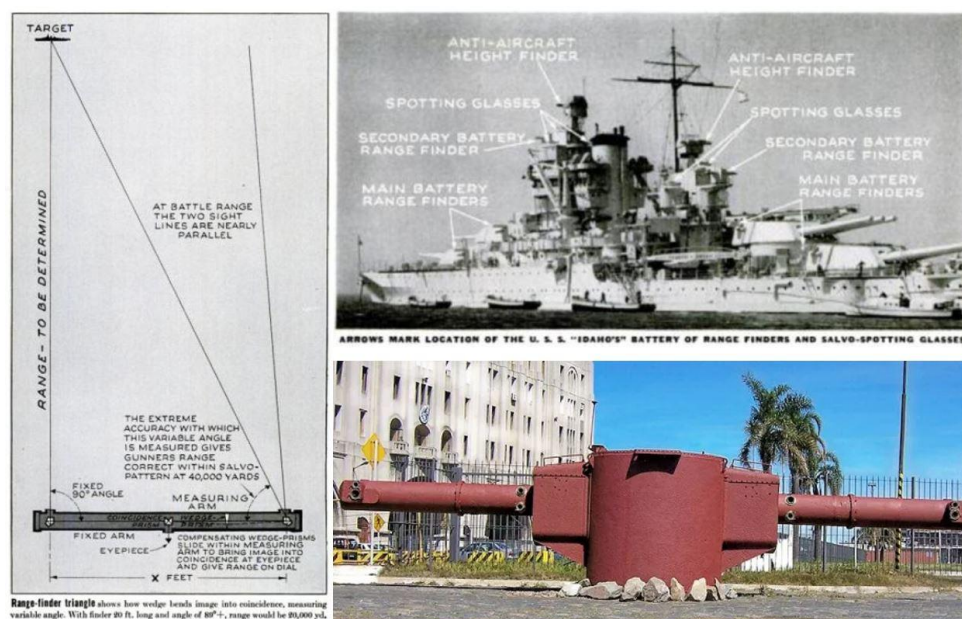


Figure 2 Ιστορικό υλικό στερεοσκοπικής εκτίμησης απόστασης

Για την δραστηριότητα αυτή δυο μαθητές θα τοποθετήσουν τους εαυτούς τους σε απόσταση 2 μέτρων ο ένας από τον άλλον (κρατώντας σταθερά μια ράβδο μήκους 2 μέτρων) και ο πρώτος μαθητής θα σημαδέψει τα χέρια του ώστε το ένα να βρίσκεται στον στόχο και το άλλο στον συμμαθητή του, ύστερα ο δεύτερος μαθητής θα περιστραφεί μέχρι τα χέρια του πρώτου να βρίσκονται σε ορθή γωνία. Έπειτα με την χρήση μοιρογνωμονίου ο δεύτερος μαθητής θα μετρήσει την γωνία που σχηματίζει η ράβδος, που τον ενώνει με τον συμμαθητή του, με την νοητή ευθεία προς τον στόχο. Χρησιμοποιώντας αυτήν την μέτρηση θα δείξουμε πως μπορούμε να σχηματίσουμε ένα ορθό τρίγωνο με μια πλευρά και μια γνωστή γωνία και να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες παραμέτρους του και εν τέλει την απόσταση που μας ενδιαφέρει.

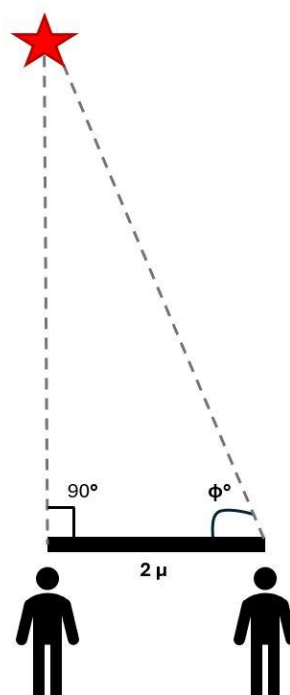


Figure 3 Διάταξη δραστηριότητας

Έχοντας αυτή την εμπειρία θα δείξουμε σύντομα πως η διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς την περιστροφή των μαθητών και πως εύκολα μπορεί να επαναληφθεί για περισσότερους «στόχους». Με αυτήν την κατανόηση θα εξηγήσουμε την έννοια των σημείων ενδιαφέροντος και πως συλλέγοντας τις θέσεις πολλών σημείων ενδιαφέροντος από ένα αντικείμενο μπορούμε να βρούμε τις σχετικές τους θέσεις ή το «βάθος» τους ως προς τους δύο παρατηρητές/φωτογραφίες.

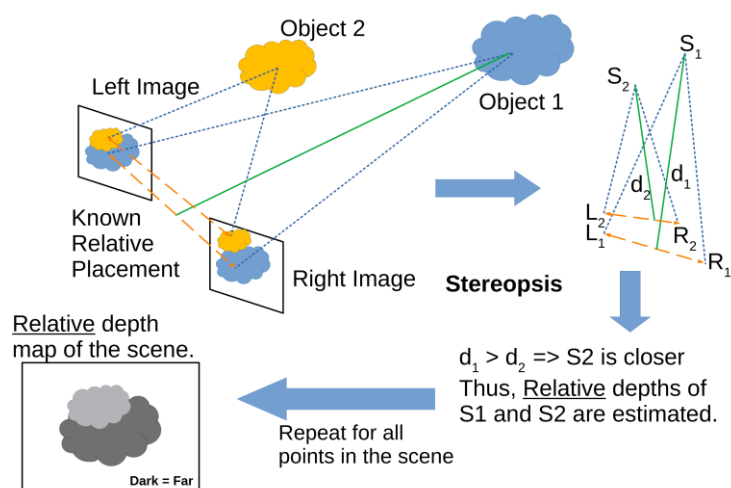


Figure 4 Στερεοσκοπική εκτίμηση βάθους

Ως παράδειγμα χρήσης θα γίνει σύντομη επίδειξη χρήσης στερεοσκοπικού αλγόριθμου πάνω σε δύο φωτογραφίες του τοίχου της τάξης και θα οπτικοποιησουμε τα σημεία ενδιαφέροντος που προκύπτουν τόσο στον τρισδιάστατο χώρο αλλά και επί των δύο φωτογραφιών.

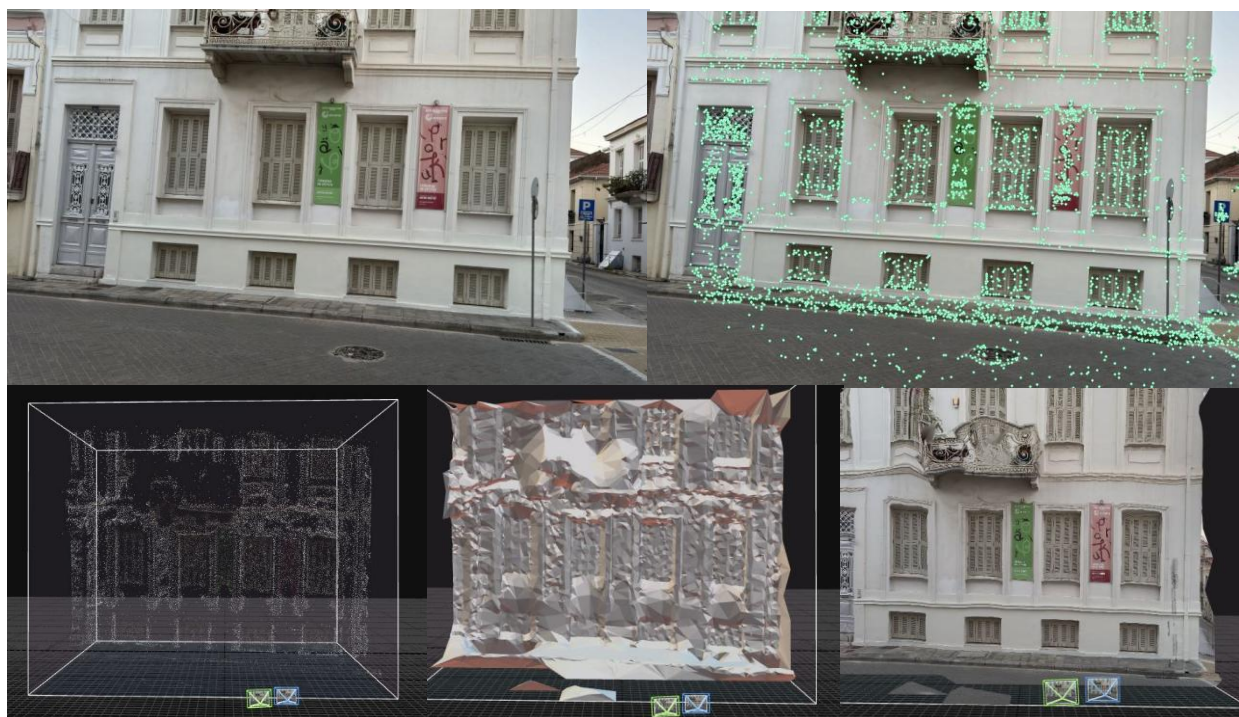


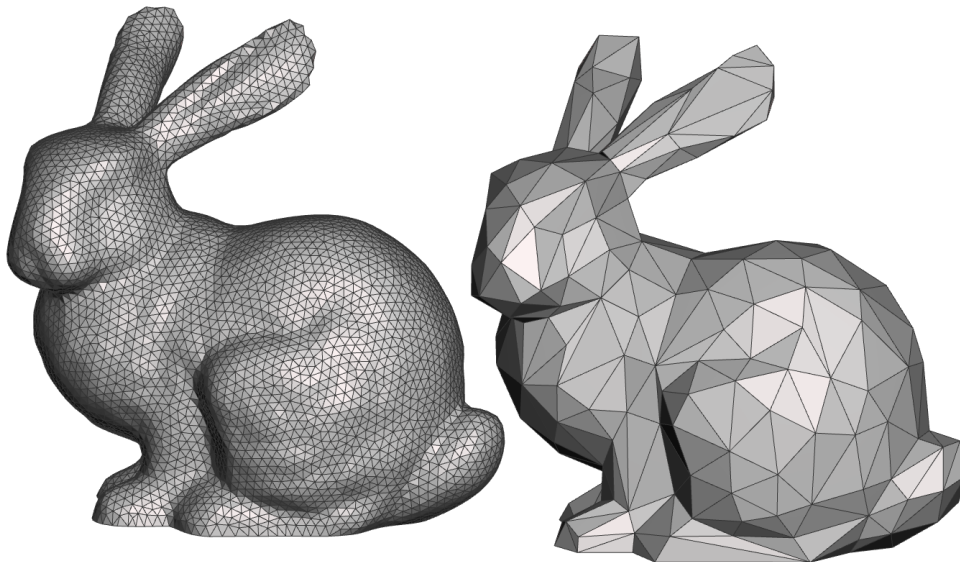
Figure 5 Αποτελέσματα φωτογραμμετρικής ροής με είσοδο δύο φωτογραφίες κτηρίου

Στη συνέχεια η μαθητές θα κατεβάσουν την εφαρμογή RealityScan (διαθέσιμη σε android/iOS για κινητά και τάμπλετ, απαιτείτε σύνδεση στο internet για την χρήση) και θα επιχειρήσουν να τραβήξουν μια σειρά φωτογραφιών (20-70) από το αντικείμενο ή τον χώρο της επιλογής τους.



Figure 6 Εφαρμογή Reality Scan Epic

Τα σύνολα των φωτογραφιών στέλνονται αυτόματα στους εξυπηρετητές της εφαρμογής και σε μικρό χρονικό διάστημα ο συμμετέχων λαμβάνει πίσω το ολοκληρωμένο μοντέλο του αντικειμένου.



Τέλος θα δείξουμε πως μπορούμε να αξιοποιήσουμε τα παραγόμενα μοντέλα για την δημιουργία ψηφιακών κόσμων (Video Games, Προσομοιώσεις) αλλά και για πρακτικές εφαρμογές όπως τρισδιάστατη εκτύπωση με το εκπαιδευτικό λογισμικό Tinkercad.

ΩΡΑ ΓΙΑ ΛΙΓΗ ΧΗΜΕΙΑ

Συγγραφέας: Δαλιάνη Θεοχάρη Καθηγήτρια Χημείας

Έχεις αναρωτηθεί ποτέ:



- Γιατί το λεμόνι είναι ξινό;
- Τι κοινό μπορεί να έχει η πορτοκαλάδα με το ξίδι;
- Τι όμοιο υπάρχει στην αμμωνία που βάζουμε στα πασχαλινά κουλούρια και στο καθαριστικό τζαμιών;
- Τι να είναι άραγε το pH που αναγράφεται στην ετικέτα των αφρόλουτρων;
- Μήπως εμείς μπορούμε να μετρήσουμε το pH των ουσιών που χρησιμοποιούμε καθημερινά;

Για να τα δούμε σιγά σιγά...

Τι είναι η οξύτητα των διαλυμάτων;

Ο Η οξύτητα των διαλυμάτων είναι μια μετρήσιμη ποσότητα, η οποία εκφράζει πόσο όξινο είναι το διάλυμα.

Ο Όσο μεγαλύτερη είναι η περιεκτικότητα ενός διαλύματος σε κατιόντα υδρογόνου (H^+), τόσο μεγαλύτερη είναι η οξύτητά του.

Το pH ως μέτρο της οξύτητας:

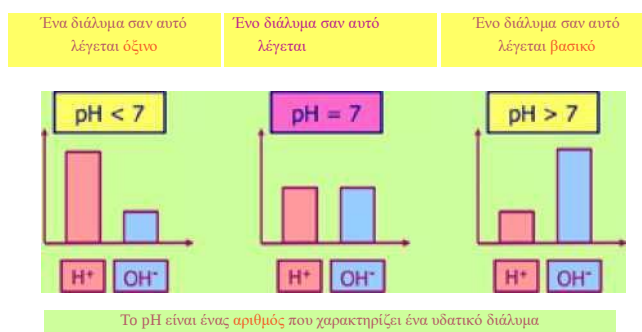
Το pH (πε-χα) είναι ένας αριθμός που εκφράζει την περιεκτικότητα ενός υδατικού διαλύματος σε κατιόντα υδρογόνου και αποτελεί μέτρο της οξύτητάς του.

Τι είναι η βασικότητα των διαλυμάτων;

Ο Η βασικότητα των διαλυμάτων είναι μια μετρήσιμη ποσότητα, η οποία εκφράζει πόσο βασικό είναι το διάλυμα.

Ο Όσο μεγαλύτερη είναι η περιεκτικότητα ενός διαλύματος σε ανιόντα υδροξειδίου (OH^-), τόσο μεγαλύτερη είναι η βασικότητα του.

Πότε ένα διάλυμα είναι όξινο, ουδέτερο ή βασικό;



Ο Όξινο: $H^+ > OH^-$ και το $pH < 7$ (στους 25 °C)

Ο Ουδέτερο: $H^+ = OH^-$ και το $pH = 7$ (στους 25 °C)



Ο Βασικό: $H^+ < OH^-$ και το $pH > 7$ (στους 25 °C)

Τι παθαίνει το pH με την αραιώση;

Ο Όταν σε ένα διάλυμα προσθέτουμε νερό, τότε το διάλυμα αραιώνεται.

Τότε:

Ο Το όξινο διάλυμα γίνεται λιγότερο όξινο.

Ο Το βασικό διάλυμα γίνεται λιγότερο βασικό.

Πως μετράμε το pH;

Ο Με pHμετρο

Ο Με pHμετρικό χαρτί



ΕΙΚΟΝΙΚΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

https://phet.colorado.edu/sims/html/ph-scale/latest/ph-scale_en.html



Και τώρα... QUIZ

Δραστηριότητα 1

Πορτοκαλάδα Αμμωνία

-ίδι

Βάση ρ Οξύ ■ Βάση μ Οξύ

Βάση Ι Οξύ

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

Καθοριστικό Χυμός
φούρνου λεμονιού

Μαγειρική
σόδα

Βάση Ι Οξύ

Βάση Ι Οξύ

Βάση Ι Οξύ

Γιαούρτι

Σόδα

Οδοντόκρεμα

Βάση Ι ρ Οξύ

Βάση Ι Οξύ

Βάση Οξύ

Σαπούνι

Βάση Ι Οξύ

Δραστηριότητα 2

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

Όταν τα ιόντα OH είναι σε
ισορροπία με τα ιόντα H*, η τιμή
του pH είναι ίση με

Βασικό ή αλκαλικό
ονομάζεται ένα υδατικό
διάλυμα, όταν η σχέση που
ισχύει μεταξύ των ιόντων OH
και των ιόντων H+ είναι

0 ρ 7 γ 14

OH < H* Ι ρ OH = H* Ι OH > H

Για να αυξήσω την οξύτητα
ενός υδατικού διαλύματος θα
πρέπει να προσθέσω.....

Για να μειώσω την οξύτητα ενός
υδατικού θα διαλύματος θα πρέπει να
προσθέσω

οξύ Ι ρ βάση νερό

α οξύ β βάση γ νερό

Και τώρα, ΠΕΙΡΑΜΑ ©

Δοκιμαστικός Σωλήνας	Ουσία	pH
1	Λεμόνι	
2	Γάλα	
3	Μαγειρική σόδα	
4	Πορτοκάλι	
5	Νερό	
6	Ξίδι	
7	Καθαριστικό τζαμιών	
8	Αμμωνία	
9	Κρεμοσάπουνο	

