

ΘΕΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ 2025

16 – 27 ΙΟΥΝΙΟΥ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

σελ. 38 έως 46



ΖΩΓΡΑΦΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΧΗΜΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΟΥΣΙΚΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΟΤΗΤΑΣ

3D ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ 3D ΕΚΤΥΠΩΣΗ

ΨΗΦΙΑΚΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

Γεώργιος Κ. Ντόντος, Μαθηματικός (Ph.D.) 9^{οο} ΓΕΛ Πάτρας & συντονιστής EMM9ΓΑΠ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

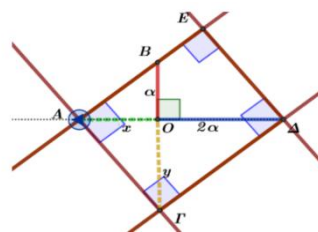
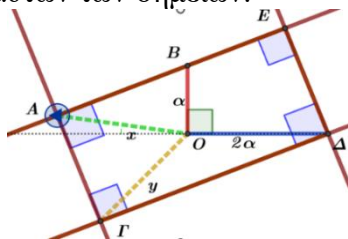
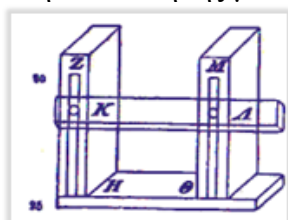
Αρχικά, τίθενται τα ερωτήματα:

- Πώς θα υπολογισθεί μία τετραγωνική ρίζα ή μία κυβική ρίζα ενός θετικού αριθμού?
- Πώς ένα σώμα (μικρό ή μεγάλο) θα κινηθεί εντελώς ευθύγραμμο χωρίς να συρθεί πάνω σε χάρακα ή ράγα?
- Πώς θα χαραχθούν κάποιες σημαντικές γεωμετρικές καμπύλες που προϋπάρχουν του ανθρώπου ή τις ανακάλυψε αργότερα?
- Πώς θα αντιγράψω ή θα μεγενθύνω ένα σχήμα ή πως θα το σμικρύνω?
- Πώς μία συγκεκριμένη κίνηση θα μεταφερθεί κάπου αλλού και θα υποστεί κάποια στροφή?
- Πώς θα τριχοτομήσω μία γωνία?
- Πώς θα εμβαδομετρήσω τον Νομό Αχαΐας πάνω στον χάρτη?

Μια **μαθηματική μηχανή** είναι ένας μηχανισμός που σχεδιάστηκε και κατασκευάστηκε για να εξαναγκάσει ένα σημείο ή ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ένα επίπεδο σχήμα να μετακινηθεί ή να μετασχηματιστεί σύμφωνα με έναν μαθηματικό νόμο που έχει καθοριστεί από τον σχεδιαστή της (Maschietto & Bussi, 2005). Είναι κατασκευασμένη έτσι ώστε να ενσωματώνει μαθηματικές έννοιες και σχέσεις που συχνά αναδεικνύουν σημαντικές στιγμές της ιστορίας των Μαθηματικών. Ο **Καρτέσιος** (1596-1650) στο έργο του “*Geometrie*” αποκαλούσε κάποιες μαθηματικές μηχανές ως «άλλους διαβήτες» (Descartes, 1925).

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ & ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΥΤΩΝ

(Α) Κυβιστής του Πλάτωνα: Ο Έλληνας μαθηματικός Ευτόκιος (480-540 μ.Χ.) αποδίδει στον Πλάτωνα (427-347 π.Χ.) την παρακάτω λύση του Δηλίου προβλήματος, η οποία για να υλοποιηθεί απαιτεί μηχανικά όργανα και για το λόγο αυτό οι ερευνητές εικάζουν ότι η λύση αυτή ίσως μην είναι του Πλάτωνα αλλά του Ευδόξου (407-355 π.Χ.) (Σταμάτης, 1949). Θεωρώντας ότι γνωστός κύβος έχει πλευρά μήκους α , τοποθετούνται και σταθεροποιούνται στο επίπεδο δύο κάθετα τμήματα OB και OD με μήκη α και 2α αντιστοίχως (εικόνα 1). Στη συνέχεια στο σημείο B αρθρώνεται περιστροφικά και με δυνατότητα ολίσθησης μέσω του B η ράβδος ABE . Επίσης στο σταθερό σημείο Δ αρθρώνονται περιστροφικά δύο κάθετες μεταξύ τους ράβδοι με δυνατότητα να ολισθαίνουν μέσω του Δ αλλά και να περιστρέφονται στο Δ . Η μία εξ αυτών αρθρώνεται κάθετα, περιστροφικά και με δυνατότητα ολίσθησης στο E της ράβδου ABE . Στα σημεία A και Γ των ABE και $\Delta\Gamma$ αρθρώνεται ράβδος $A\Gamma$ κάθετη με τις ABE και $\Delta\Gamma$ και με περιστροφικές αρθρώσεις στα A και Γ καθώς και με δυνατότητα ολίσθησης μέσω αυτών των σημείων.

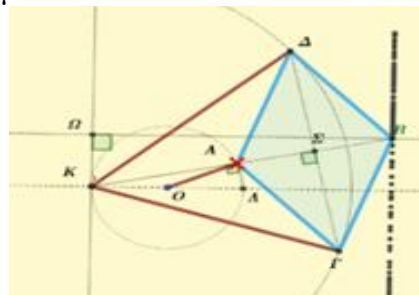


Εικόνα 1: «Κυβιστής του Πλάτωνα» (Σταμάτης, 1949) <https://www.geogebra.org/m/smk9jtac>

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι πρόκειται για ένα επίπεδο και ορθογώνιο πλαίσιο αρθρωμένων ράβδων που είναι αρθρωμένες μεταξύ τους με δυνατότητα αυξομειώσης των μηκών τους και με περιστροφικές αρθρώσεις στα σταθερά σημεία B και Δ του ορθογωνίου. Μετακινώντας την κορυφή A (κέρσορας) πρέπει τα τμήματα $BO = \alpha$ και $OG = y$ να γίνουν συννευθεικά καθώς και τα τμήματα

$OD=2a$ και $OA=x$ να γίνουν επίσης συνευθειακά. Σε αυτήν την θέση και λόγω των ορθογωνίων τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ προκύπτουν οι σχέσεις $x^2 = ay$ και $y^2 = 2ax$. Άρα $y = \frac{x^2}{a}$ και $\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = 2ax \Rightarrow x^3 = 2a^3$, το οποίο ερμηνεύεται πως το τμήμα x είναι η ακμή εκείνου του κύβου με διπλάσιο όγκο από κύβο με ακμή ίση με a . Όταν το $a = 1$ τότε κατασκευάζει γεωμετρικά την $\sqrt[3]{2}$.

(B) Ευθυγράφος Peaucellier - Lipkin: Η προσπάθεια κατασκευής μηχανισμού που μετατρέπει μια κυκλική κίνηση σε τελείως ευθύγραμμη επετεύχθη ταυτόχρονα και ανεξάρτητα το 1873 από τον Γάλλο μηχανικό Charles-Nicolas Peaucellier (1832-1919) και το 1871 από τον Λιθουανό μαθηματικό Lipman Lipkin (1846-1875) ο οποίος σπούδασε δίπλα στον Chebyshev (digitaleditions.sheridan, n.d.). Ας υποθέσουμε ότι οι πλευρές του ρόμβου έχουν μήκος 4, η ακτίνα του μεγάλου κύκλου ισούται με 9 και η ακτίνα του μικρού κύκλου ισούται με 3 (εικόνα 2). Τα σημεία K και O δεν μετακινούνται αλλά περιστρέφονται ομοεπίπεδα. Επίσης το K ανήκει στον μικρό κύκλο κέντρου O . Οι μεγάλες ακτίνες είναι αρθρωμένες περιστροφικά στο K αλλά και στις κορυφές Δ και Γ του ρόμβου. Η μικρή ακτίνα είναι αρθρωμένη περιστροφικά στο O καθώς και στην πλησιέστερη κορυφή A του ρόμβου. Το σημείο A είναι η «είσοδος» του μηχανισμού και η κορυφή B του �όμβου είναι η «έξοδος» του όπου έχει τοποθετηθεί και μία γραφίδα. Στο σημείο K έχει χαραχθεί ευθεία κάθετη με την διάκεντρο KO . Από την κορυφή B του ρόμβου έχει χαραχθεί ευθεία $B\Omega$ παράλληλη με την KO , και επομένως κάθετη με την κάθετη στην KO . Τα τρίγωνα $K\Delta\Lambda$ και $K\Lambda\Gamma$ ισούνται λόγω κριτηρίου Π-Π-Π, και προκύπτει ότι οι γωνίες $K\Delta\Lambda$ και $K\Lambda\Gamma$ ισούνται. Άρα ισούνται και οι παραπληρωματικές γωνίες τους. Άρα η KA οφείλει να είναι συγγραμμική με την διαγώνιο AB του ρόμβου. Συνεπώς τα σημεία τα σημεία K, A, Σ, B είναι συνευθειακά και $(KA) \cdot (KB) = ((K\Sigma) - (A\Sigma)) \cdot ((K\Sigma) + (A\Sigma)) = (K\Sigma)^2 - (A\Sigma)^2 = [(K\Delta)^2 - (\Delta\Sigma)^2] - [(\Lambda\Delta)^2 - (\Delta\Sigma)^2] = 9^2 - (\Delta\Sigma)^2 - 4^2 + (\Delta\Sigma)^2 = 81 - 16 = 65 = ct$. Τα τρίγωνα $K\Omega B$ και $K\Lambda\Lambda$ είναι ορθογώνια και όμοια λόγω του ότι οι γωνίες ΩBK και $\Lambda K\Lambda$ ισούνται ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων $B\Omega$ και KO τεμνόμενων από την KB . Άρα $\frac{(K\Lambda)}{(KB)} = \frac{(A\Lambda)}{(\Omega K)} = \frac{(KA)}{(\Omega B)} \Rightarrow (\Omega B) = \frac{(KA) \cdot (KB)}{(K\Lambda)} = \frac{65}{4} = ct$. Τελικά, για κάθε θέση του σημείου B , η απόσταση του B από την σταθερή ευθεία $K\Omega$ παραμένει ίδια, που μεταφράζεται πως η γραφίδα B χαράσσει ευθεία γραμμή ή αλλιώς το σημείο B κινείται ευθύγραμμα.

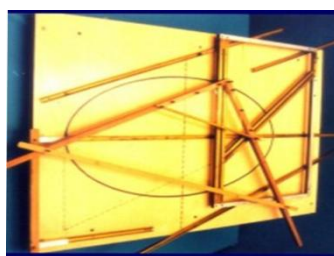


Εικόνα 2: Ο ευθυγράφος Peaucellier-Lipkin του EMM9ΓΛΠ - <https://www.geogebra.org/m/t7qunmrf>

(Γ) Ο Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ήταν Ιταλός μαθηματικός και καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Bologna. Ο Galileo Galilei (1564 -1642) τον εκτιμούσε ιδιαίτερα για τις γνώσεις του στην Γεωμετρία. Συνδέεται με τους μαθηματικούς Marin Mersenne (1588 -1648) και Evangelista Torricelli (1608-1647) λόγω της εργασίας του στα προβλήματα οπτικής και κίνησης (mathshistory.st-andrews, n.d). Σημαντική η εργασία του με τα «αδιαίρετα» (indivisibles), πρόδρομα του απειροστικού λογισμού, καθώς και η εισαγωγή των λογαρίθμων στην Ιταλία για θέματα γεωγραφίας και αστρονομίας. Μελέτησε σε βάθος τις κωνικές τομές για την κατασκευή διαθλαστικών και ανακλαστικών τηλεσκοπίων.

Ο παραβολογράφος του ανα-κατασκευάστηκε το 2017 από το EMM9ΓΛΠ (εικόνα 3/α). Χαράσσει παραβολικό τόξο, τετραγωνίζει ορθογώνια παραλληλόγραμμα και εξάγει τετραγωνικές ρίζες

αριθμών. Αναφέρει ο Cavalieri (1632) ότι η ιδέα κατασκευής του μηχανισμού (τα δύο Λ) είναι του Βυζαντινού μαθηματικού-μηχανικού **Ισίδωρου από την Μίλητο** (442- 537 μ.Χ.) (Johnston Allman, 1877, σ. 163). Επίσης υπάρχει σχετική πληροφορία για την αρχική κατασκευή του μηχανισμού από τον **Μέναιχο** (375-300 π.Χ.), ο οποίος διέθετε μια μηχανική συσκευή για την κατασκευή κωνικών τομών, την οποία χρησιμοποίησε για να λύσει το Δήλιο πρόβλημα (Taimina, 2007). Ο μηχανισμός τετραγωνίζει ορθογώνια και εξάγει τετραγωνικές ρίζες και επίσης εσωκλείει την μετρική σχέση του ύψους προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου. Μπορεί να μετατραπεί και σε εφαπτομενικογράφο, χαράσσοντας το παραβολικό τόξο μέσα από την εφαπτομένη του, τοποθετώντας καταλλήλως δύο ακόμη άκαμπτες ράβδους και επιλύει γεωμετρικά την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση. Επίσης με κατάλληλες προσθήκες ράβδων, μπορεί να εμβαδομετρήσει και το χωρίο κάτω από το χαρασσόμενο παραβολικό τόξο (Ντόντος, 2024).

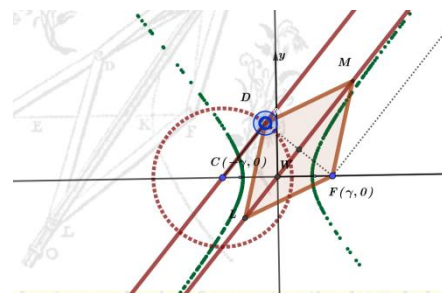
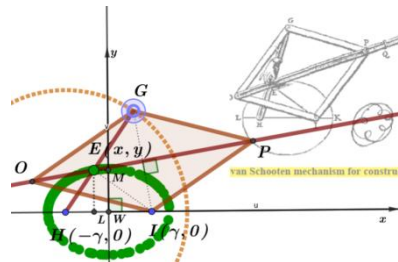
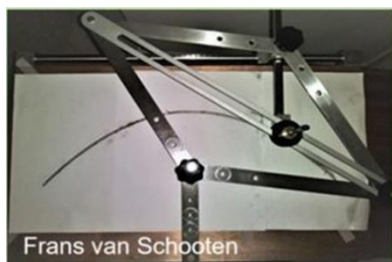


Εικόνα 3: Ο παραβολογράφος, ο ελλειψογράφος και ο υπερβολογράφος Cavalieri <https://www.geogebra.org/m/rnkttmh9> & <https://www.geogebra.org/m/eqqxcmx7>

Ο Cavalieri κατασκεύασε επίσης ελλειψογράφο και υπερβολογράφο (εικόνες 3/β & 3/α), μαθηματικές μηχανές που χρησίμευσαν στην λείανση των φακών και κατόπτρων για το τηλεσκόπιο του, και περιγράφονται σε προσομοίωση στο GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/sbujgzky> & <https://www.geogebra.org/m/sbujgzky>).

(Δ) Ο Ολλανδός μαθηματικός **Frans van Schooten** (1615-1660) ήταν ο σημαντικότερος συνεργάτης του **René Descartes** (1596-1650). Κατασκεύασε παραβολογράφο, ελλειψογράφο και υπερβολογράφο για πολλούς λόγους.

Ο παραβολογράφος του ανα-κατασκευάστηκε από το ΕΜΜ9ΓΛΠ το 2017 & 2020 (εικόνα 4/α). Χαράσσει παραβολικά τόξα και ανήκει στην κατηγορία των «ρομβοειδών» τεχνουργημάτων. Αναδεικνύει τον «ισοαποστατικό» ορισμό της παραβολής (Schooten, 1646). Λειτουργεί και ως εφαπτομενικογράφος, χαράσσοντας παραβολικά τόξα μέσω της εμφανούς εφαπτομένης-ράβδου, επιλύοντας γεωμετρικά μία διαφορική εξίσωση (Ντόντος, 2024). Επίσης μπορεί να υπολογισθεί η τοπική καμπυλότητα του χαρασσόμενου τόξου μέσα από τα μήκη των άκαμπτων ράβδων των μηχανών (Ντόντος, 2024). Ο ελλειψογράφος και ο υπερβολογράφος βρίσκεται στο στάδιο προσομοίωσης (εικόνες 4/β & 4/γ).



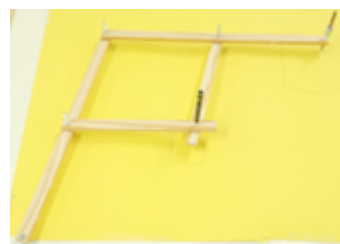
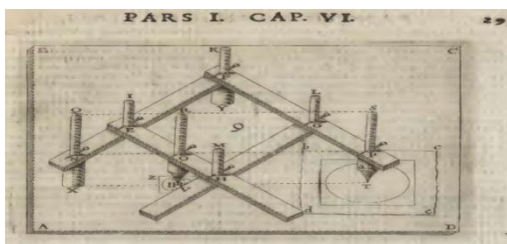
Εικόνα 4: παραβολογράφος, ελλειψογράφος και υπερβολογράφος van Schooten <https://www.geogebra.org/m/fafjvqkq> & <https://www.geogebra.org/m/tfjdrcy4> & <https://www.geogebra.org/m/gs8z376s>

(Ε) Ο παντογράφος ομοιοθεσίας του Scheiner έχει «πηγή έμπνευσης» τον παντογράφο του μαθηματικού- μηχανικού Ήρωνα (1^{ος} ή 2^{ος} αι. π.Χ.), την πρώτη συσκευή αντιγραφής, μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης σχεδίων (εικόνα 5). Δύο ράβδοι, κάθετα αρθρωμένες, στο τέλος των οδοντωτών κανόνων φέρουν στο άκρο τους την ακίδα ανάγνωσης του πρωτότυπου σχεδίου και τη γραφίδα αντιγραφής, και είναι ευθυγραμμισμένες με το κέντρο των οδοντωτών τροχών (archaiologia.gr/blog, n.d.).



Εικόνα 5: Ο παντογράφος του Ήρωνα ανα-κατασκευασμένος και εκτίθεται σε Μουσείο.
https://www.youtube.com/watch?v=DXNEL_a9C60

Ο **Christoff Scheiner** (1573-1650) ήταν Ιησουΐτης θεολόγος και μαθηματικός. Δάσκαλος του στα Μαθηματικά ήταν ο **Johann Lantz** (1564-1638). Έζησε παράλληλα με τον **Galilei Galileo** (1564-1642) και είχε επηρεασθεί από το έργο του μαθηματικού **Christoph Clavius** (1537-1612) ο οποίος χρησιμοποίησε μη Ευκλείδειες διαδικασίες χάραξης καμπυλών (Bos, 2001). Στο Ντίλιγκεν της Βαυαρίας το 1603, συνεργάστηκε με κάποιον ζωγράφο, ο οποίος χρησιμοποιούσε έναν μηχανισμό σχεδιασμού περιγραμμάτων σε χαρτί. Το έργο του Scheiner για τους παντογράφους δημοσιεύτηκε 28 έτη αργότερα, το 1631 (mathshistory.st-andrews.n.d). Ο παντογράφος του είναι ένα «ρομβοειδής» μηχανισμός που ενσωματώνει την έννοια της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας τριγώνων (Scheiner, 1631). Έχει έναν βαθμό ελευθερίας και στην είσοδο και στην έξοδο του έχει μολύβια ή άλλα εργαλεία χάραξης-κοπής ή λείανσης (εικόνα 6/α). Ανα-κατασκευάστηκε από το ΕΜΜ9ΓΛΠ χρησιμοποιώντας τέσσερεις άκαμπτες ξύλινες ράβδους οι οποίες αρθρώθηκαν περιστροφικά ανά δύο (εικόνα 6/β). Οι δύο ράβδοι έχουν διπλάσιο μήκος των υπολοίπων και η μία εκ των μεγαλύτερων αρθρώθηκε περιστροφικά σε ξύλινη επιφάνεια. Ο χειριστής μπορεί να χρησιμοποιήσει όποιο μολύβι θέλει (είσοδος μηχανισμού) και να σχεδιάσει ένα σχήμα που το άλλο μολύβι (έξοδος μηχανισμού) θα σχεδιάσει ή θα κόψει μεγαλύτερο ή μικρότερο όμοιο-ομοιόθετο σχήμα με πόλο το σταθεροποιημένο σημείο στην ξύλινη επιφάνεια.



Εικόνα 6: (α) Ο παντογράφος από το βιβλίο του Scheiner (1631) και (β) η ανακατασκευή του στο ΕΜΜ9ΓΛΠ (2024-25)
<https://www.geogebra.org/m/wudzrn44>

Η κατασκευή της προσομοίωσης του με λογισμικό GeoGebra είχε μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας και ενδιαφέροντος, διότι αναδεικνύονται καθοριστικά οι γεωμετρικές ιδιότητες του μηχανισμού, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες λόγω των υλικών κατασκευής, διαστάσεων, αρθρώσεων και γεωμετρίας. Τα υποχρεωτικά βήματα των αναγκαίων γεωμετρικών κατασκευών στο GeoGebra, δεν ήταν εμφανή κατά την κατασκευή από φυσικά υλικά. Θεωρώντας παραμετρικά μήκος ρ , σε σταθερό σημείο A (εικόνα 7/α) κατασκευάστηκε κύκλος (A, ρ) και σε τυχαίο σημείο B (ελεύθερο στο επίπεδο) κατασκευάστηκε κύκλος (B, ρ) . Ένα εκ των δύο σημείων τυχαίας τομής τους ορίστηκε Γ . Στη συνέχεια με κέντρο το «δεσμευμένο» Γ (από τον (A, ρ) και την θέση του B), κατασκευάστηκε κύκλος (Γ, ρ) που περνά από το A και τέμνει την ημιευθεία $A\Gamma$ στο δεσμευμένο σημείο Δ . Στη συνέχεια με εντολή «αξονικής συμμετρίας» (από το λογισμικό) ως προς την ευθεία $B\Delta$ ορίζεται ως E

το συμμετρικό του Γ . Το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι ρόμβος (για οποιαδήποτε θέση του B) επειδή οι διαγώνιοι $B\Delta$ και ΓE είναι κάθετοι μεταξύ τους (λόγω αξονικής συμμετρίας) και από το ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ η κάθετη ΓE είναι και διάμεσος της $B\Delta$, και επιπλέον λόγω αξονικής συμμετρίας και η διαγώνιος ΓE είναι διχοτομημένη. Συνολικά, το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ έχει διαγωνίους κάθετες μεταξύ τους και διχοτομημένες. Η ημιευθεία AB τέμνει την ημιευθεία ΔE στο Ω . Στη συνέχεια, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $BE\Omega$ ισοούνται με κριτήριο Γ-Π-Γ, και προκύπτει ότι $E\Omega = \rho$. Επομένως, τα τρίγωνα $A\Gamma B$ και $A\Delta\Omega$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$ και σε οποιαδήποτε θέση του «κέρσορα» (είσοδος) B και λόγω της κοινής γωνίας A προκύπτει και η συγγραμμικότητα των σημείων A , B και Ω . Τίθεται το ερώτημα εάν «τα σχήματα που χαράσσει ο κέρσορας B και η έξοδος Ω , είναι όμοια και με τι λόγο ομοιότητας; Επίσης, το παραγόμενο σχήμα έχει υποστεί μετατόπιση ή και αλλαγή προσανατολισμού»; Υποθέτοντας ότι το B χάραξε ευθύγραμμο τμήμα BB_1 (εικόνα 7/β) παρατηρείται πως και το Ω χαράσσει τμήμα $\Omega\Omega_1$. Τα ευθύγραμμα τμήματα $AB\Omega$ και $AB_1\Omega_1$ δημιουργούν τα τρίγωνα ABB_1 και $A\Omega\Omega_1$, τα οποία είναι επίσης όμοια με $\lambda = 2$, επειδή $\frac{A\Omega}{AB} = \frac{A\Omega_1}{AB_1} = 2$ και έχουν κοινή την περιεχόμενη γωνία A . Επομένως, $\frac{\Omega\Omega_1}{BB_1} = 2 \Leftrightarrow \Omega\Omega_1 = 2 \cdot BB_1$ και λόγω της ομοιότητας αυτών των τριγώνων (σε οποιαδήποτε θέση B_1 του κέρσορα B) προκύπτει $BB_1 // \Omega\Omega_1$ καθώς επίσης $\widehat{B} = \widehat{\Omega}$ και $\widehat{B_1} = \widehat{\Omega_1}$. Οι τελευταίες σχέσεις μας δείχνουν ότι το τμήμα $\Omega\Omega_1$ είναι πάντα διπλάσιο του BB_1 και έχουν την ίδια «κλίση». Εάν στη συνέχεια δεχτούμε πως κάθε σχήμα που χαράσσεται από τα δύο μολύβια, αποτελείται από την ένωση διαδοχικών «απειροελάχιστων» ευθυγράμμων τμημάτων που χαράσσονται με τέτοιο τρόπο, είναι προφανές ότι το παραγόμενο σχήμα είναι όμοιο με το αρχικό και με $\lambda = 2$ (μεγέθυνση 200%) και έχει τον ίδιο προσανατολισμό (κλίση) αλλά μετατοπισμένο ευθυγράμμως σε διπλάσια απόσταση του αρχικού από το σημείο-πόλο A (ομοιοθεσία).



Εικόνα 7: προσομοίωση του παντογράφου Scheiner με το λογισμικό GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/skrdw4dk>

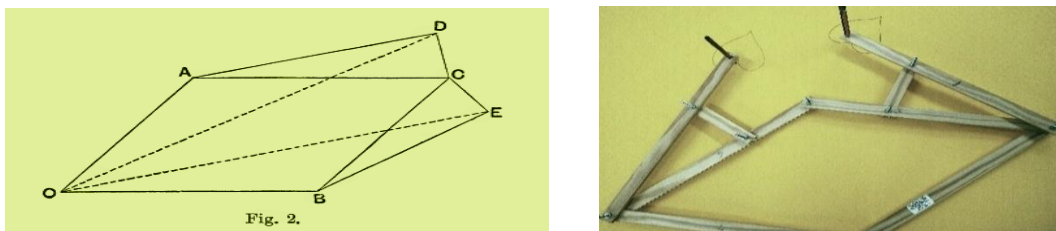
Ο παντογράφος του Scheiner χρησιμοποιείται ακόμη στην βιομηχανία, στον σχεδιασμό την ζωγραφική και την μηχανολογία. Παραδείγματα είναι ο σχεδιασμός επί μουσικών οργάνων και επίπλων, στα κεντήματα, στην λείανση επιφανειών, στην κοπή λαμαρινών, στην αντιγραφή σχεδίων σε οποιαδήποτε κλίμακα και στην ηλεκτροκίνηση τρόλεϋ-τραμ-τραίνων (εικόνες 8).



Εικόνα 8: Εφαρμογές του παντογράφου Scheiner στην βιομηχανία και στα ηλεκτρικά τρένα

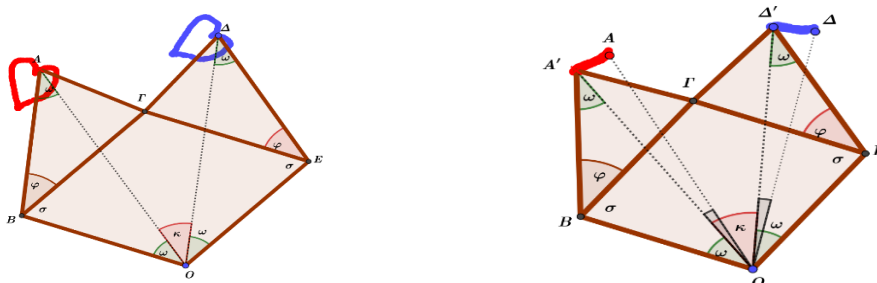
(ΣΤ) Ο **James Joseph Sylvester** (1814 -1897) ήταν σημαντικός μαθηματικός ο οποίος, παρά τις δυσκολίες που του προξένησε η Εβραϊκή καταγωγή του, χρημάτισε Καθηγητής στα Πανεπιστήμια Λονδίνου, Βιρτζίνια, Οξφόρδης, John Hopkins και στην Βασιλική Στρατιωτική Ακαδημία του Λονδίνου. Επίσης ήταν πρόεδρος της Μαθηματικής Εταιρείας του Λονδίνου, μέλος της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου και μέλος της Ακαδημίας Επιστημών του Παρισιού. Το 1875 ο Ρώσος

μαθηματικός και μηχανικός **Pafnuty Lvovich Chebyshev** (1821-1894) τον επισκέφτηκε και συζήτησαν για τις μηχανικές συνδεσμολογίες (mechanical linkages) που μπορούν να χαράζουν ευθείες γραμμές. Σε μία διάλεξη του Sylvester με τίτλο «στις πρόσφατες ανακαλύψεις για την μηχανική μετατροπή της κίνησης» που έδωσε στο Βασιλικό Ίδρυμα του Λονδίνου, ακροατής ήταν και ο μαθηματικός-μηχανικός **Sir Alfred Bray Kempe** (1849-1922) που ενθουσιάστηκε από το θέμα. Ο Kempe, ο Chebyshev και ο Sylvester συνεργάστηκαν για τους μηχανικές συνδεσμολογίες, πραγματοποιώντας σημαντικές κατασκευές (mathshistory.st-andrews, n.d). Από τους απλούστερους μαθηματικούς μηχανισμούς που παρουσίασε ο Sylvester ήταν ο πλαγιογράφος (εικόνα 9/α), ή αλλιώς στρεβλός παντογράφος του (University of Michigan Historical Library Digital Math Collection, n.d) που έχει επίσης έναν βαθμό ελευθερίας και φέτος κατασκευάστηκε από το EMM9ΓΛΠ (εικόνα 9/β). Αντιγράφει το σχήμα που ο χειριστής σχεδιάζει και το περιστρέφει επίπεδα κατά προκαθορισμένη γωνία $\varphi = \widehat{DAC} = \widehat{DOE} = \widehat{CBE}$ (εικόνα 10/α).



Εικόνα 9: (α) ο πλαγιογράφος του JJ Sylvester (1909) από συλλογή άρθρων του (3^{ος} τόμος, σελ. 27) και (β) η κατασκευή του (EMM9ΓΛΠ) <https://www.geogebra.org/m/smyuf3rk>

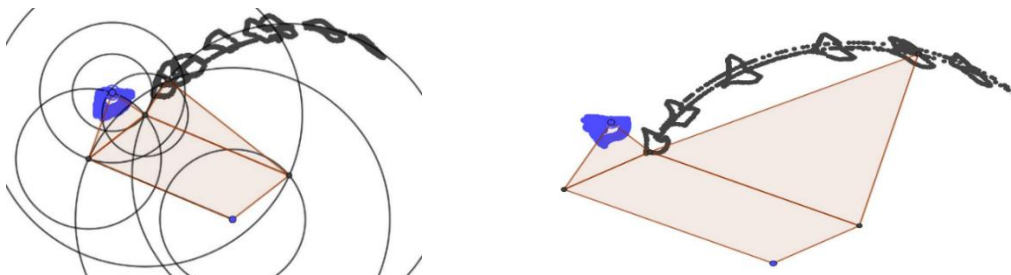
Το σημείο O είναι σταθερό και μπορεί να περιστρέφεται. Το τετράπλευρο $OBGE$ είναι ρόμβος (εικόνα 8/α). Τα τρίγωνα ABG και GDE είναι ισοσκελή, ίσα μεταξύ τους με κορυφές τα B και E . Τα A και Δ έχουν μολύβια και σχεδιάζοντας με το A το Δ σχεδιάζει επίσης. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABO έχουμε $2\omega + \varphi + \sigma = 180^\circ$. Επίσης στον ρόμβο έχουμε $2\sigma + 2(2\omega + \kappa) = 360^\circ \Rightarrow \sigma + 2\omega + \kappa = 180^\circ$ και προκύπτει ότι $\kappa = \varphi = ct$, δηλαδή αν και μεταβάλλονται όλες οι γωνίες του ρόμβου όμως δεν μεταβάλλεται το μέτρο της γωνίας κ που έχουν τα νοητά τμήματα OA και OD . Εάν η γραφίδα A χαράξει ένα ευθύγραμμο τμήμα AA' (εικόνα 10/β), τα τμήματα OA και OD ισούνται, καθώς και $OA' = OD'$. Η γωνία στο AOA' ισούται με την γωνία $\Delta OD'$, και ισούνται με την συγκεκριμένη γωνία στροφής έτσι ώστε να χαραχθούν τα ίσα τμήματα AA' και $\Delta\Delta'$ λόγω της προφανούς ισότητας των τριγώνων AOA' και $\Delta OD'$. Όλο το σχήμα που σχεδιάζει κάθε μολύβι, αποτελεί σύνολο τέτοιων μικρών ευθυγράμμων τμημάτων. Άρα, σχεδιάζεται ίσο σχήμα με το αρχικό το οποίο έχει περιστραφεί επίπεδα κατά γωνία ίση με την γωνία φ των τριγώνων ABG και GDE (Ντόντος κ. συν., 2024).



Εικόνα 10: προσομοίωση και ανάλυση πλαγιογράφου J.J.Sylvester <https://www.geogebra.org/m/cqpatyvp>

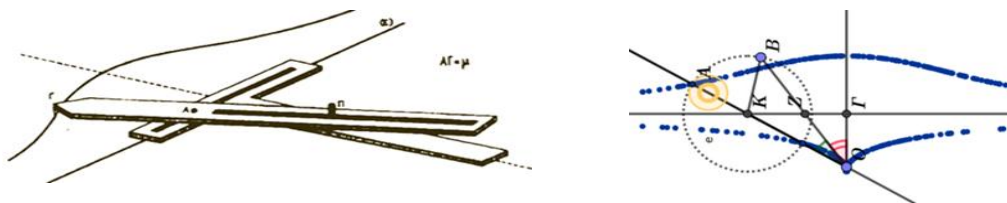
Στα παρακάτω σχήματα (εικόνα 11), παρουσιάζεται εικόνα από προσομοίωση του, και αποτελεί γενικότερη περίπτωση του πλαγιογράφου, όπου δεν υπάρχει ρόμβος αλλά παραλληλόγραμμο καθώς και τα 2 τρίγωνα δεν είναι κατ' ανάγκη ίσα ή όμοια. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται και κάποια «χωρική» περιστροφή του σχήματος γύρω από κάποιον άξονα, ή ίσως παρατηρείται η πλάγια

προβολή του αρχικού σχήματος, από τον τρισδιάστατο χώρο στις δύο διαστάσεις (χαρτί). Αυτό μας προβλημάτισε θετικά και φάνηκε ένας πιθανός «ευρύτερος» γεωμετρικός μετασχηματισμός που υφίσταται το σχήμα, αγγίζοντας «διαισθητικά» την έννοια του τρισδιάστατου γεωμετρικού μετασχηματισμού ή και την προβολική γεωμετρία.



Εικόνα 11: επεκτάσεις του πλαγιογράφου J.J. Sylvester <https://www.geogebra.org/m/a9du2suy>

(Ζ) Ο **Νικομήδης** (200 π.Χ.) με την κογχοειδή καμπύλη του και με τον μηχανισμό χάραξής της (εικόνα 12) κατάφερε να δώσει έναν μηχανικό τρόπο να επιλυθούν τα γεωμετρικά προβλήματα του διπλασιασμού του κύβου και της **τριχοτόμησης γωνίας**. Η καμπύλη αυτή είναι ο επίπεδος γεωμετρικός τόπος των αντιδιαμετρικών σημείων Γ και Γ' που αποτελούν την τομή μίας ημιευθείας με σταθερή αρχή και ενός κύκλου του οποίου το κέντρο σύρεται πάνω σε μία ευθεία (ε) (School of Mathematics and Statistics/ University of St. Andrews, n.d.).



Εικόνα 12 : μηχανισμός χάραξης της κογχοειδούς καμπύλης και τριχοτόμηση γωνίας. <https://www.geogebra.org/m/a7e95yde>

(Η) Υπάρχει η μαθηματική μηχανή, το **εμβαδόμετρο** που μετρά εμβαδά. Ο χρήστης «ιχνηλατεί» τα όρια μιας κλειστής περιοχής με το «**σημείο ιχνηθέτης**». Επιστρέφοντας στο σημείο εκκίνησης, το εμβαδόν της περιοχής μπορεί να διαβαστεί από έναν μετρητή-τροχό που βρίσκεται πάνω στον μηχανισμό (εικόνα 13/α). Το κύριο μέρος είναι μια κινητή ράβδος, που ονομάζεται **βραχίονας ιχνηθέτης**, με το **σημείο ιχνηθέτης** στο ένα άκρο. Ο **τροχός** είναι προσαρτημένος στη ράβδο με τον άξονά της παράλληλο προς τη ράβδο και είναι εξοπλισμένος με μια κλίμακα που συνήθως βαθμονομείται σε τετραγωνικές ίντσες ή τετραγωνικά εκατοστά (εικόνα 13/β). Μπορεί να κυλήσει τόσο προς τα εμπρός όσο και προς τα πίσω. Μετρά μια κατευθυνόμενη απόσταση, δηλαδή, την συνιστώσα της κίνησής του που είναι κάθετη στον βραχίονα του ιχνηθέτη. Τα μαθηματικά του πώς αυτή η κατευθυνόμενη απόσταση μπορεί να δώσει το εμβαδόν της περιοχής βασίζονται σε ολοκληρώματα και στο θεώρημα Green, αλλά μπορούν να δοθούν απλά, πρακτικά και κομψά, και αποτελούν τη βάση του τρόπου λειτουργίας ενός εμβαδόμετρου.

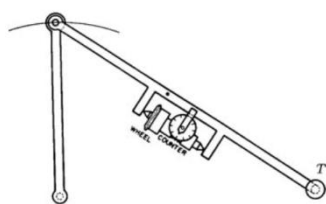


Figure 3. Polar planimeter [9].



Εικόνα 13: εμβαδόμετρο AMSLER (νέο απόκτημα του ΕΜΜ9ΓΑΠ)

ΠΗΓΕΣ

- Σταμάτης, Ε. (1949). *Το Δήλιον πρόβλημα και η τριχοτόμησης γωνίας* (ιδίου (Ed.); 1st ed.). <https://evangelosstamatis.files.wordpress.com/2011/06/1972-epistimonikai-ergasiai-arthra-tomos-a.pdf>
- Descartes, R. (1925). *The Geometry of Rene Descartes* (1st ed.). Open Court Publishing Company.
- Ντόντος, Γ. (2024). *Μηχανές δημιουργίας γεωμετρικών καμπυλών και εφαρμογή τους στην διδακτική πράξη* (διδακτορική διατριβή) Πανεπιστήμιο Πάτρας/ΠΤΔΕ, Πάτρα. <https://doi.org/10.12681/eadd/56847>
- Taimina, D. (2007). Historical mechanisms for drawing curves. *Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics, December*, 89–104. <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859766.011>
- Schooten, F. (1646). *De organica conicarum sectionum in plano descriptione* (Ex Officina Elzeviriorum) (Ed.); 1st ed.). <https://play.google.com/books/reader?id=6xNiAAAAcAAJ&pg=GBS.PP16>
- Cavalieri, B. (1632). *Lo specchio ustorio, ovvero, Trattato delle settioni coniche, et alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora*. (1st ed.). <https://play.google.com/books/reader?id=ZX64AAAIAAJ&pg=GBS.PA186&hl=en>
- Scheiner, C. (1631). *Pantographice seu ars delineandi* (Rom) <https://dn721005.ca.archive.org/0/items/christophorische00sche/christophorische00sche.pdf>
- Sylvester, J. J. (1909). *THE COLLECTED MATHEMATICAL PAPERS OF JAMES JOSEPH SYLVESTER* (Cambridge University Press, Ed.; 1st ed., Vol. 3). <https://archive.org/details/TheCollectedMathematicalPapersOfJamesJosephSylvesterVolumeIi>
- Foote, R. L., & Sandifer, E. (n.d.). *Area Without Integration: Make Your Own Planimeter*. Retrieved June 6, 2025, from <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/papers/foote.sandifer.reprint.pdf>
- Johnston Allman, G. (1877). *Greek Geometry from Thales to Euclid* (Queen's University in Ireland (Ed.); 1st ed.). University Press. <https://archive.org/search?query=external-identifier%3A%22urn%3Aoclc%3Arecord%3A1045621609%22>
- Bos, H. J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness* (G. Toomer, Ed.; 1st ed.). Springer-Verlag.
- Maschietto, M., & Bartolini Bussi, M. G. (2005). The Laboratory of Mathematical Machines of Modena. *European Mathematical Society Magazine*. https://www.researchgate.net/publication/240631363_THE_LABORATORY_OF_MATHEMATICAL_MACHINES_OF_MODENA
- Ντόντος, Γ., Παναγιωτόπουλος, Λ., Τσέτικα, Α., Αλποχωρίτης, Μ., Αναλυτής, Γ., Βόσσου, Δ., Γουλιάμη, Δ., Καϊμακάς, Κ., Καρακάσης, Κ., Καρέλα, Ο., Κοκκίνης, Δ., Κύρκος, Α., Λούβαρη, Ε., Παπακώστας, Α., & Τσάτης, Α. (2024). Μαθηματικές Μηχανές. Στο Α. Μπαλωμένου, Γ. Αφράτης, & Λ. Κωνσταντόπουλος (Eds.), *Πρακτικά 1^{ου} Μαθητικού Μαθηματικού Συνεδρίου Δυτικής Ελλάδος* (pp. 173–179). Ε.Μ.Ε. <https://1o-mathetiko-mathematiko-synedrio.webnode.gr/>

https://digitaleditions.sheridan.com/publication/?i=814988&article_id=4722915&view=articleBrowse
Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 6/6/2025 και ώρα 12:23

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri> Τελευταία τροποποίηση Ιούλιος 2014,
Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 5/6/2025 και ώρα 22:40.

Παντογράφος του Ήρωνα (n.d.). Retrieved June 6, 2025, from archaiologia.gr/blog.
<https://www.archaiologia.gr/blog/photo/%cf%80%ce%b1%ce%bd%cf%84%ce%bf%ce%b3%cf%81%ce%ac%cf%86%ce%bf%cf%82-%ce%bc%ce%bf%cf%85%cf%83%ce%b5%ce%af%ce%bf-%ce%b1%cf%81%cf%87%ce%b1%ce%af%ce%b1%cf%82-%ce%b5%ce%bb%ce%bb%ce%b7%ce%bd/>

Christoph Scheiner (n.d.). Retrieved June 6, 2025, from the free online resource “MacTutor”.
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Scheiner/>

James Joseph Sylvester (n.d.). Retrieved June 6, 2025, from the free online resource “MacTutor”.
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sylvester/>

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nicomedes/> Τελευταία τροποποίηση 1/Απριλίου/
1999. Ημερομηνία τελευταίας προσπέλασης: 6/6/2025 και ώρα 19:07

Αρχείο προσομοιώσεων στο GeoGebraTube <https://www.geogebra.org/u/gkdodos>