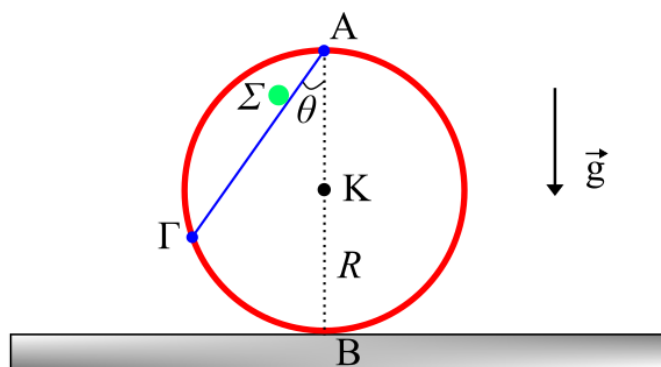


Ισόχρονη χορδή

Πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο στερεώνουμε μία κυκλική στεφάνη κέντρου K και ακτίνας R , με το επίπεδό της κατακόρυφο. Η διάμετρος AB είναι κατακόρυφη με το σημείο A να είναι το ανώτερο σημείο της στεφάνης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στερεώνουμε το ένα άκρο μίας λεπτής ράβδου (κατάλληλου κάθε φορά μήκους) στο σημείο A της στεφάνης και το άλλο σε τυχαίο σημείο Γ αυτής (διαφορετικό του A), δημιουργώντας μία χορδή που σχηματίζει τυχαία γωνία θ με την AB .



Ένα σώμα Σ μάζας m και αμελητέων διαστάσεων, αφήνεται από το σημείο A και κινείται κατά μήκος της ράβδου (κεκλιμένο επίπεδο) χωρίς τριβές. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος κίνησης του σώματος πάνω στη ράβδο είναι ανεξάρτητος από τη θέση του άκρου Γ αυτής.

Απάντηση

Η κίνηση που εκτελεί το σώμα Σ κατά μήκος της ράβδου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, χωρίς αρχική ταχύτητα. Επομένως, το διάστημα s που διανύσει το σώμα σε χρονικό διάστημα Δt θα δίνεται από τη σχέση

$$s = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

όπου a η επιτάχυνσή του.

Στη διεύθυνση της κίνησης του σώματος, η μόνη δύναμη που του ασκείται είναι η x συνιστώσα του βάρους, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Άρα, από το 2^ο νόμο του Newton, η επιτάχυνσή του προκύπτει ίση με

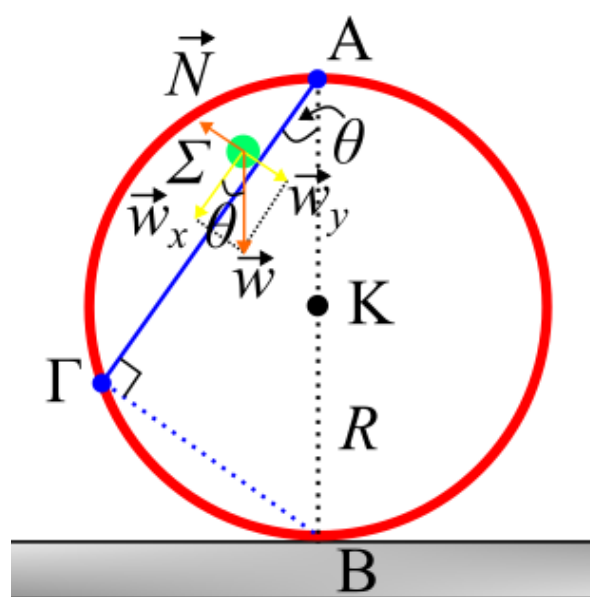
$$w_x = ma \Rightarrow mg \cdot \text{συν}\theta = ma \Rightarrow a = g \text{συν}\theta$$

Η γωνία Γ του τριγώνου AGB είναι ορθή, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Οπότε, το μήκος (AG) της ράβδου που θα διανύει κάθε φορά το σώμα θα είναι ίσο με

$$(AG) = 2R \text{συν}\theta$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι ο χρόνος κίνησης του σώματος είναι ανεξάρτητος της γωνίας θ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για ο αντίστοιχος χρόνος κίνησης Δt_{AG} είναι:



$$(A\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot g \sin\theta \cdot (\Delta t_{A\Gamma})^2 \Rightarrow 2R \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot g \sin\theta \cdot (\Delta t_{A\Gamma})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta t_{A\Gamma} = 2 \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Επομένως, ο χρόνος κίνησης του σώματος κατά μήκος της χορδής είναι ανεξάρτητος από τη θέση του άκρου Γ αυτής.

Σχόλιο: Εάν το σημείο Γ ταυτιστεί με το Β, τότε το σώμα θα εκτελέσει ελεύθερη πτώση από ύψος $h = 2R$ με χρόνο πτώσης

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2R}{g}} = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} = \Delta t_{A\Gamma}$$

Μίλτος Καδιτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com