



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ & ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ & ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

*«Μηχανές δημιουργίας γεωμετρικών καμπυλών και εφαρμογή τους στην
διδασκτική πράξη»*

Γεώργιος Κ. Ντόντος

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

- **Κολέζα Ευγενία**, Καθηγήτρια, ΤΕΕΚΕ, Πανεπιστήμιο Πατρών (επιβλέπουσα).
- **Βαβουγιός Διονύσιος**, Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας (μέλος τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής).
- **Μούτσιος-Ρέντζος Ανδρέας**, Επίκουρος Καθηγητής, ΠΤΔΕ, ΕΚΠΑ (μέλος τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής).
- **Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος**, Καθηγητής, ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.
- **Νικολάου Γεώργιος**, Καθηγητής, ΤΕΕΚΕ, Πανεπιστήμιο Πατρών.
- **Παναγιωτακόπουλος Χρήστος**, Ομότιμος Καθηγητής, ΤΕΕΚΕ, Πανεπιστήμιο Πατρών.
- **Τσιχουρίδης Χαρίλαος**, Επίκουρος Καθηγητής, ΤΕΕΚΕ, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΑΔΕΙΑ ΧΡΗΣΗΣ: C.C. (αναφορά δημιουργού)

ΠΑΤΡΑ, 2024

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θέλω να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα Καθηγήτρια κα **Κολέζα Ευγενία**, για την επιλογή και διαμόρφωση του ιδιαίτερου και σημαντικού θέματος που μου πρότεινε ανοίγοντας μου νέους ορίζοντες, για την διαρκή βοήθεια της, για τον χρόνο που διέθεσε και για την εμπιστοσύνη που μου επέδειξε.

Θερμές ευχαριστίες θέλω να απευθύνω στον Καθηγητή κο **Βαβουγιό Διονύσιο** ο οποίος αποδέχτηκε να συμμετέχει στην Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή καθώς και για τις εύστοχες και ενθαρρυντικές παρατηρήσεις του.

Θερμές ευχαριστίες επίσης απευθύνω στον Καθηγητή κο **Μούτσιο-Ρέντζο Ανδρέα** ο οποίος επίσης αποδέχτηκε να συμμετέχει στην Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή καθώς και για την σημαντική καθοδήγηση του.

Θερμές ευχαριστίες επίσης απευθύνω στον Καθηγητή κο **Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο** ο οποίος αποδέχτηκε να συμμετέχει στην Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή.

Θερμές ευχαριστίες επίσης απευθύνω στον Καθηγητή κο **Νικολάου Γεώργιο** ο οποίος αποδέχτηκε να συμμετέχει στην Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή.

Θερμές ευχαριστίες επίσης απευθύνω στον Ομότιμο Καθηγητή κο **Παναγιωτακόπουλο Χρήστο** ο οποίος αποδέχτηκε να συμμετέχει στην Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή.

Θερμές ευχαριστίες επίσης απευθύνω στον Καθηγητή κο **Τσιχουρίδη Χαρίλαο** ο οποίος αποδέχτηκε να συμμετέχει στην Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή.

Ευχαριστώ πολύ τον πρώην Σύμβουλο Μαθηματικών κο **Τζούμα Μιχάλη** για το διαρκές ενδιαφέρον και την άοκνη συνεργασία και συμπαράσταση του εδώ και πολλά χρόνια.

Ευχαριστώ πολύ τον συμπατριώτη μου και πρώην Σύμβουλο Μαθηματικών κο **Τασσόπουλο Γεώργιο** για την αγάπη του και το μόνιμο ενδιαφέρον του.

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τους μαθηματικούς κο **Βίτσα Θεόδωρο** & κο **Παναγιωτόπουλο Λεωνίδα** για την πολύτιμή βοήθεια τους.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους μηχανολόγους μηχανικούς κο **Ασημακόπουλο Κωνσταντίνο** & κο **Χριστόπουλο Γεώργιο**, την σχεδιάστρια μηχανολογικού σχεδίου κα **Καλογεροπούλου Λουκία** και τον μηχανουργό κο **Βαλεντίνο Θωμά** των οποίων η συμβολή ήταν πολύτιμη και καθοριστική για την κατασκευή των μαθηματικών μηχανών.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να μην εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην οικογένεια μου και κλείνω με ένα νεύμα στους αγαπημένους μας απόντες.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα έρευνα γίνεται αρχικά μία σύντομη ιστορική αναδρομή των μαθηματικών μηχανών και μηχανισμών, εστιάζοντας τελικά στους δύο ιστορικούς παραβολογράφους του 17^{ου} αιώνα που σχεδιάστηκαν και κατασκευάστηκαν από τον Bonaventura Franciscus Cavalieri και τον Frans van Schooten. Οι δύο μηχανισμοί αναλύθηκαν, προσομοιώθηκαν και ανακατασκευάστηκαν. Μέσω λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας αναζητήθηκαν προεκτάσεις και δυνατότητες των μηχανισμών που δεν είναι εμφανείς. Με εμφανή στοιχεία του παραβολογράφου van Schooten υπολογίστηκε η τοπική καμπυλότητα του χαρασσόμενου παραβολικού τόξου, Διατυπώθηκε το αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα που επιλύει γεωμετρικά ο παραβολογράφος van Schooten, ουσιαστικά επιλύοντας την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση. Επιβεβαιώθηκε μηχανολογικά η ισοδυναμία των ορισμών της παραβολής που ενσωματώνουν, καθιστώντας τους μηχανολογικά ισοδύναμους,

Με την διαμεσολάβηση των δύο μηχανισμών διδάχτηκε η έννοια της παραβολής σε τμήμα της Β' λυκείου το οποίο χωρίστηκε σε δύο ομάδες. Πραγματοποιήθηκαν δύο σχεδιασμένες τετράωρες πειραματικές διδασκαλίες στον χώρο του σχολείου φοίτησης. Τα ατομικά αποτελέσματα αναλύθηκαν ποιοτικά και ποσοτικά, εστιάζοντας σε δύο γνωστικούς δείκτες και σε τρεις δείκτες γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων, που αρχικά μετετράπησαν σε διατακτικές μεταβλητές χωρίς ιδιαίτερη στάθμιση. Επίσης, για κάθε ομάδα πραγματοποιήθηκε μη παραμετρικός έλεγχος της διαμέσου κάθε ενός από τους πέντε ποιοτικούς δείκτες. Πραγματοποιήθηκε και μη παραμετρικός έλεγχος συσχέτισης των γνωστικών δεικτών με τους δείκτες των δραστηριοτήτων της κάθε ομάδας.

Οι δύο γνωστικοί δείκτες και οι τρεις δείκτες γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων, έδωσαν μία πληρέστερη εικόνα του επιπέδου κατανόησης κάθε μαθητή και μαθήτριας, αλλά και μία πληρέστερη διαδικασία αξιολόγησης του τρόπου που κατανοούν. Αναδεικνύεται ο ρόλος των μαθηματικών μηχανών, που αποτελούνται από άκαμπτες αρθρωτές ράβδους, καθώς και του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, ως γνωστικών γεφυρών μεταξύ της εμπειρικής δικαιολόγησης και της παραγωγικής συλλογιστικής. Οι μηχανικές συνδέσεις (linkages) και οι δυναμικές προσομοιώσεις τους αναδεικνύονται ως κατάλληλα πλαίσια γεφύρωσης εμπειρικών και παραγωγικών συλλογισμών, καθώς και ως εργαλεία ισόρροπης σύνδεσης στην διδασκαλία Άλγεβρας και Γεωμετρίας τουλάχιστον στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

ABSTRACT

In this research, a brief historical review of mathematical machines and mechanisms is first presented, finally focusing on the two historical 17th century parabolographs designed and constructed by Bonaventura Franciscus Cavalieri and Frans van Schooten. The two mechanisms were analyzed, simulated and reconstructed. Through dynamic geometry software, extensions and possibilities of the mechanisms that are not apparent were sought. With apparent elements of the van Schooten parabolograph, the local curvature of the drawn parabolic arc was calculated. The “inverse tangent problem” was formulated, which is solved geometrically by the van Schooten parabolograph, essentially solving the corresponding differential equation. The equivalence of the parabola’s definitions, embodied by these parabolographs, was confirmed mechanically making them mechanically equivalent.

By the mediation of these mechanisms, the concept of parabola was taught to a part of 10th grade class which was divided into two groups. Two planned four-hour experimental lessons were carried out at the school area. Individual results were analyzed qualitatively and quantitatively, focusing on two cognitive indicators and three cognitive structure indicators through activities that were initially converted into ordinal variables without special weighting. A nonparametric test of the median of each of the five qualitative indicators was also conducted for each group. A non-parametric test of the correlation between the cognitive indicators and the activity indicators of each group was also performed.

The two cognitive and the three structure indicators through activities, provided a more complete picture of each student's level of understanding, and a more complete process for assessing how they understand. Mathematical machines, consisting of rigid modular rods, as well as dynamic geometry software, emerge as cognitive bridges between empirical justification and deductive reasoning. Mechanical linkages and their dynamic simulations emerge as suitable contexts to connect empirical and deductive reasoning, as balanced linking tools in the teaching of Algebra and Geometry in secondary education.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες.....	σελ. 2
Περίληψη.....	σελ. 3
Abstract.....	σελ. 4
Εισαγωγή.....	σελ. 17

Κεφάλαιο 1^ο

1.1. Μαθηματικοί μηχανισμοί & μαθηματικά όργανα.....	σελ. 19
1.2. Περί μηχανών.....	σελ. 56

Κεφάλαιο 2^ο «Μαθηματικές μηχανές στην Εκπαίδευση»

2.1. Καμπύλες και Συναρτήσεις.....	σελ. 60
2.2. Χωρική ικανότητα.....	σελ. 62
2.3. Θεωρία Σημειωτικής Διαμεσολάβησης.....	σελ. 66
2.4. Μαθηματικά και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.....	σελ. 73

Κεφάλαιο 3^ο «Δείκτες κατανόησης & Ερευνητικά ερωτήματα»

3.1. Επίπεδα και φάσεις «van Hiele»	σελ. 77
3.2. Γνώση μητρώου ή τομέα καταχώρησης (Register or domain knowledge).....	σελ. 79
3.3. Η ταξινόμηση «SOLO».....	σελ. 80
3.4. Συντακτική και Σημασιολογική επεξεργασία.....	σελ. 81
3.5. Ισόμορφες, υπερβατικές και μικτές συνδέσεις.....	σελ. 82
3.6. Ερευνητικά ερωτήματα.....	σελ. 83

Κεφάλαιο 4^ο «Ανάλυση, σύνθεση και ανακατασκευή δύο ιστορικών παραβολογράφων»

4.1. Παραβολογράφος του <i>Frans van Schooten</i>	
4.1.α. Μηχανολογικό πλαίσιο αναφοράς του μηχανισμού.....	σελ. 85
4.1.β. Γεωμετρικό πλαίσιο του μηχανισμού.....	σελ. 86
4.1.γ. Αλγεβρικό πλαίσιο του μηχανισμού.....	σελ. 87

4.1.δ. Μεταβλητές και Κινητικότητα (Mobility) του μηχανισμού.....σελ.	88
4.1.ε. Παράμετροι του μηχανισμού.....σελ.	90
4.1.στ. Συμμετρία καμπύλης που χαράσσει ο μηχανισμός.....σελ.	91
4.1.ζ. Προσομοίωση του μηχανισμού μέσω λογισμικού Geogebra.....σελ.	91
4.1.η. Κατασκευή του παραβολογράφου van Schooten.....σελ.	94
4.1.θ. Τα Μαθηματικά του μηχανισμού.....σελ.	101
4.1.ι. Διατύπωση και γεωμετρική επίλυση αντίστροφου εφαπτομενικού προβλήματος.....σελ.	116
4.1.κ. Τοπική καμπυλότητα παραβολής μέσω του παραβολογράφου van Schooten.....σελ.	121
4.2. Παραβολογράφος του <i>Bonaventura Franciscus Cavalieri</i>	
4.2.α. Μηχανολογικό πλαίσιο αναφοράς του μηχανισμού.....σελ.	129
4.2.β. Γεωμετρικό πλαίσιο αναφοράς του μηχανισμού.....σελ.	130
4.2.γ. Αλγεβρικό πλαίσιο αναφοράς του μηχανισμού.....σελ.	133
4.2.δ. Μεταβλητές και Κινητικότητα (Mobility) του μηχανισμού.....σελ.	135
4.2.ε. Παράμετροι του μηχανισμού.....σελ.	137
4.2.στ. Κατασκευή προσομοίωσης του μηχανισμού μέσω του λογισμικού Geogebra.....σελ.	138
4.2.ζ. Κατασκευή του παραβολογράφου Cavalieri.....σελ.	140
4.2.η. Επεκτάσεις του μηχανισμού.....σελ.	142
4.2.θ. Τα Μαθηματικά του μηχανισμού.....σελ.	145
Κεφάλαιο 5^ο «Μηχανολογική επιβεβαίωση ισοδυναμίας ορισμών παραβολής»	
5.1. Από τον μηχανισμό van Schooten στον μηχανισμό Cavalieri.....σελ.	154
5.2. Από τον μηχανισμό Cavalieri στον μηχανισμό van Schooten.....σελ.	156
Κεφάλαιο 6^ο «Μεθοδολογία & Μέθοδος συλλογής και ανάλυσης δεδομένων»	
6.1. Τα ερευνητικά εργαλεία.....σελ.	159

6.2. Το δείγμα.....σελ.	159
6.3. Σχολική πραγματικότητα σχετικά με το θέμα της έρευνας.....σελ.	159
6.4. Μεθοδολογία & Μέθοδος της έρευνας.....σελ.	160
6.5. Μέθοδος ανάλυσης των δεδομένωνσελ.	163
6.6. Παραδείγματα.....σελ.	168
6.7. Ηθική και Δεοντολογία.....σελ.	171
Κεφάλαιο 7ο Αποτελέσματα.....σελ.	173
Κεφάλαιο 8ο Συμπεράσματα & Συζήτηση.....σελ.	190
Αναφορέςσελ.	199
Παράρτημασελ.	215

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Ο κυβιστής του Πλάτωνα & συσκευή χάραξης κογχοειδούς καμπύλης του Νικομήδη.....σελ. 20	σελ. 20
Εικόνα 2: Δύο κωνικογράφοι από το βιβλίο του Barozzi «Admirandum illud geometricum problema, 1586, Venetis.....σελ. 23	σελ. 23
Εικόνα 3 : Το όργανο Albion του 14 ^{ου} αιώνα (Tractatus Albionis) Μουσείο Astronomico e Copernicano στην Ρώμη & η πραγματεία του Richard of Wallingford για τη θεωρία, την κατασκευή και τη χρήση του οργάνου Albion.....σελ.24	σελ.24
Εικόνα 4: Διαγραμματική αναπαράσταση κωνικογράφου του Leonardo da Vinci & δύο μηχανισμοί αναλογιών του Dürer από το βιβλίο του «Four books on proportions» το 1532.....σελ. 24	σελ. 24
Εικόνα 5: Ο κανόνας της «cathetus» για την επίπεδη ανάκλαση και την επίπεδη διάθλαση.....σελ. 25	σελ. 25
Εικόνα 6 : Οπτικό διάγραμμα πριονιστήριου τον 16 ^ο αιώνα από την συλλογή Besson (1595) & η γενική αρχή της «geometria subterranea» σύμφωνα με τον Agricola (1556).....σελ. 26	σελ. 26
Εικόνα 7 : Οπτικό διάγραμμα υπολογισμού λογαρίθμων.....σελ. 26	σελ. 26
Εικόνα 8 : Κανόνας ολίσθησης (slide rule), ευρεσιτεχνία F. J. Anderson.....σελ. 27	σελ. 27
Εικόνα 9: Ολοκληρωτικογράφος σχεδιασμένος από τον Abdank-Abakanowicz και παρήχθη από την εταιρεία Coradi.....σελ. 28	σελ. 28
Εικόνα 10: Θεοδόλιχος αζιμουθίου του Baldassarre Lanci (1557) & διαβήτη μείωσης των μετρήσεων κατά συντελεστή (αγνώστου κατασκευαστή)σελ.28	σελ.28
Εικόνα 11: Μαθηματικές μηχανές χάραξης κογχοειδούς καμπύλης & χάραξης ποικιλίας καμπυλών του Suardiσελ. 29	σελ. 29
Εικόνα 12 : Οπτικό διάγραμμα παραβολογράφου Cavalieri (1632).....σελ. 31	σελ. 31
Εικόνα 13: Οπτικό διάγραμμα του «mesolabe» του Descartes (1637).....σελ. 35	σελ. 35
Εικόνα 14: Οπτικά διαγράμματα χάραξης υπερβολής και έλλειψης (Schooten, 1646)...σελ. 37	σελ. 37
Εικόνα 15: Οπτικό διάγραμμα χάραξης υπερβολής με σχετικά σχόλια (Schooten, 1646).....σελ. 37	σελ. 37
Εικόνα 16: Οπτικό διάγραμμα & προσομοίωση της «έλκουσας» καμπύλης.....σελ. 39	σελ. 39

Εικόνα 17: Οπτικά διαγράμματα ελκτικής κίνησης (Huygens, 1693).....σελ. 40	σελ. 40
Εικόνα 18: Μηχανισμός του Perks (1714-1716) για την έλκουσα καμπύλη και για τον τετραγωνισμό της υπερβολικής περιοχής & μηχανισμός του Suardi (1752) για την έλκουσα και την εκθετική καμπύλη.....σελ. 42	σελ. 42
Εικόνα 19: Ευθυγράφοι του Watt.....σελ. 44	σελ. 44
Εικόνα 20: Ευθυγράφος των Peaucellier-Lipkin.....σελ. 45	σελ. 45
Εικόνα 21: Ευθυγράφοι Watt και Peaucellier από συλλογή Reauleaux.....σελ. 46	σελ. 46
Εικόνα 22: Οπτικό διάγραμμα εμβადόμετρου με βραχίονα σταθερού μήκους των Carse & Urquhart (1914).....σελ. 47	σελ. 47
Εικόνα 23: Πολικό εμβადόμετρο του Amsler.....σελ. 48	σελ. 48
Εικόνα 24: Χρονική τροχιά πρώιμων εμβαδόμετρων.....σελ. 48	σελ. 48
Εικόνα 25: Ο τρακτογράφος για την έλκουσα καμπύλη του Kleri'c (1897).....σελ. 49	σελ. 49
Εικόνα 26: Οπτικό διάγραμμα μηχανισμών που επιλύουν γεωμετρικά την γραμμική διαφορική εξίσωση $ay' + y = Q(x)$ του Abdank-Abakanowicz (1878).....σελ. 50	σελ. 50
Εικόνα 27: Ο αρμονικός αναλυτής Henrici.....σελ. 52	σελ. 52
Εικόνα 28: Ο παραβολογράφος Payne-Coradi (1904).....σελ. 53	σελ. 53
Εικόνα 29: Κρεμαστή γέφυρα με παραβολικό καλώδιο» (Yates, 1961) & ηλεκτρονικό σύστημα LORAN με υπερβολική καμπύλη (Yates, 1961).....σελ. 53	σελ. 53
Εικόνα 30: Μηχανισμός χάραξης κογχοειδούς καμπύλης (Yates, 1961) & μηχανισμός χάραξης κισσοειδούς καμπύλης (Yates, 1961).....σελ. 54	σελ. 54
Εικόνα 31: Παραβολογράφος van Schooten & μηχανισμός χάραξης κισσοειδούς (Artobolevskii, 1964).....σελ. 54	σελ. 54
Εικόνα 32: Κωνικογράφος του Berger (1970).....σελ. 55	σελ. 55
Εικόνα 33: Οπτικό διάγραμμα αρθρώσεων σε μηχανισμούς (Χόνδρος, 1998).....σελ. 56	σελ. 56
Εικόνα 34: Οπτικό διάγραμμα συνδεσμολογίας (linkage) με ή χωρίς περιττό μέλοςσελ. 58	σελ. 58
Εικόνα 35: Οργανόγραμμα CAD-CAM» (Χόνδρος, 1998).....σελ. 59	σελ. 59
Εικόνα 36: Παραβολογράφος του Minoru Kuroda (1927).....σελ. 62	σελ. 62

Εικόνα 37: Περιγραφή της «εργαλειακής γένεσης».....σελ. 72	σελ. 72
Εικόνα 38: Περιγραφή της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης.....σελ. 73	σελ. 73
Εικόνα 39: Περιγραφή του γνωστικού δείκτη «Γνώση Καταχώρησης».....σελ. 80	σελ. 80
Εικόνα 40: Περιγραφή του δείκτη γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων «SOLO».....σελ. 81	σελ. 81
Εικόνα 41: Περιγραφή του δείκτη γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων «Επεξεργασίες».....σελ. 82	σελ. 82
Εικόνα 42: Περιγραφή του δείκτη γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων «Συνδέσεις».....σελ. 83	σελ. 83
Εικόνα 43: Οπτικό διάγραμμα παραβολογράφου van Schooten (1646).....σελ. 85	σελ. 85
Εικόνα 44: Μονογραμμική απεικόνιση παραβολογράφου van Schooten.....σελ. 87	σελ. 87
Εικόνα 45: Αλγεβρικό πλαίσιο μελέτης παραβολογράφου van Schooten.....σελ. 88	σελ. 88
Εικόνα 46: Μεταβλητές παραβολογράφου van Schooten.....σελ. 89	σελ. 89
Εικόνα 47: Μονογραμμική απεικόνιση παραβολογράφου van Schooten.....σελ. 90	σελ. 90
Εικόνα 48: Συμμετρία χαρασσόμενης καμπύλης από τον παραβολογράφο van Schooten.....σελ. 91	σελ. 91
Εικόνα 49: Πρώτο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου van Schooten μέσω του λογισμικού Geogebraσελ. 92	σελ. 92
Εικόνα 50: Δεύτερο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου van Schooten μέσω του λογισμικού Geogebraσελ. 92	σελ. 92
Εικόνα 51: Τρίτο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου van Schooten μέσω του λογισμικού Geogebraσελ. 93	σελ. 93
Εικόνα 52: Τέταρτο βήμα προσομοίωσης μέσω του λογισμικού Geogebra (παραβολογράφος van Schooten).....σελ. 93	σελ. 93
Εικόνα 53: Πέμπτο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου van Schooten μέσω του λογισμικού Geogebraσελ. 94	σελ. 94
Εικόνα 54: Λεπτομέρειες αρθρώσεων 1 ^{ου} παραβολογράφου van Schooten (autoCAD).....σελ. 94	σελ. 94

Εικόνα 55: Πρώτος σχεδιασμός παραβολογράφου van Schooten (autoCAD).....σελ.	95
Εικόνα 56: Ο πρώτος παραβολογράφος van Schooten μέσω τρισδιάστατης εκτύπωσης.....σελ.	95
Εικόνα 57: Περιγραφή των μελών του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD).....σελ.	96
Εικόνα 58: Όψεις του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD}.....σελ.	97
Εικόνα 59: Περιγραφή μεταλλικών ράβδων του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD).....σελ.	97
Εικόνα 60: Περιγραφή άρθρωσης κατακόρυφης και πλάγιας ράβδου του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD).....σελ.	98
Εικόνα 61: Περιγραφή πρισματικής άρθρωσης κατακόρυφης και οριζοντίου ράβδου του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD).....σελ.	98
Εικόνα 62: Περιγραφή ξύλινης βάσης του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD).....σελ.	99
Εικόνα 63: Περιγραφή πλαστικών εξαρτημάτων γραφίδας του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD).....σελ.	99
Εικόνα 64: Περιγραφή πλαστικών εξαρτημάτων «κέρσορα» του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD).....σελ.	100
Εικόνα 65: Ο δεύτερος παραβολογράφος van Schooten.....σελ	100
Εικόνα 66: Διάγραμμα αρχικής ερώτησης για την «ισοαποστατική» ιδιότητα της παραβολής.....σελ.	101
Εικόνα 67: Δεύτερη φάση γεωμετρικής κατασκευής σημείων με την ισοαποστατική ιδιότητα της παραβολής.....σελ.	101
Εικόνα 68: Τρίτη φάση γεωμετρικής κατασκευής σημείων με την ισοαποστατική ιδιότητα της παραβολής.....σελ.	101
Εικόνα 69: Τα τρία είδη ορθών κώνων σχετικά με την γωνία στην κορυφή τους.....σελ.	102
Εικόνα 70: Τομή ορθού κώνου από επίπεδο, κάθετα στην γενέτειρα.....σελ.	103

- Εικόνα 71:** Κάτοψη βάσης κώνου κατόπιν τομής του από επίπεδο καθέτως με την γενέτειρα & κατακόρυφη όψη τεμνόμενου κώνου από επίπεδο καθέτως με την γενέτειρα.....σελ. 103
- Εικόνα 72:** Ορθογώνιος κώνος (ορθοτόμος) με παράλληλη τομή προς την κυκλική του βάση.....σελ. 104
- Εικόνα 73:** Ορθογώνιος κώνος (ορθοτόμος) και ανάδειξη Εστίας και διευθετούσας ευθείας.....σελ. 105
- Εικόνα 74:** Έλλειψη, Υπερβολή & Παραβολή μέσω καταλλήλων τομών σε κώνους.....σελ. 106
- Εικόνα 75:** Ορθός κώνος για την διαδικασία του Απολλώνιου.....σελ. 106
- Εικόνα 78:** Η παραβολή στο επίπεδο.....σελ. 111
- Εικόνα 79:** Ανάλυση παραβολικής καμπύλης για την σταδιακή σύνθεση του παραβολογράφου van Schooten.....σελ. 112
- Εικόνα 80:** Οπτικό διάγραμμα παραβολογράφου van Schooten (1646).....σελ. 113
- Εικόνα 81:** Ο νοητός ρόμβος της «ισοαποστατικής» ιδιότητας-ορισμού της παραβολής & κατασκευή παραβολής μέσω «φακέλλου» των εφαπτόμενων ευθειών της.....σελ. 114
- Εικόνα 82:** Άρθρωση φυσικού ρόμβου λόγω ισοαποστατικής ιδιότητας.....σελ. 114
- Εικόνα 83:** Σταδιακή κατασκευή παραβολογράφου van Schooten & οπτικό διάγραμμα παραβολογράφου van Schooten από το βιβλίο του, με εμφάνιση του νοητού ρόμβου.....σελ. 115
- Εικόνα 84:** Διατύπωση αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος παραβολικής καμπύλης μέσω του παραβολογράφου van Schooten.....σελ. 116
- Εικόνα 85:** Πρώτο και δεύτερο βήμα γεωμετρικής κατασκευής αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος μέσω του παραβολογράφου van Schooten.....σελ. 117
- Εικόνα 86:** Τρίτο βήμα γεωμετρικής κατασκευής αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος μέσω του παραβολογράφου van Schooten.....σελ. 118
- Εικόνα 87:** Κατασκευή «ισο-υποκανονικής» καμπύλης από τον παραβολογράφο van Schooten ο οποίος είναι και «ευθυγράφος».....σελ. 119
- Εικόνα 88:** Κύκλος προσέγγισης καμπύλης.....σελ. 121
- Εικόνα 89:** Μεταβολή γωνίας εφαπτομένης ευθείας σε σημείο τυχαίας καμπύλης.....σελ. 121

- Εικόνα 90:** Παράμετροι παραβολογράφου van Schooten και εισαγωγή ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων.....σελ. 123
- Εικόνα 91:** Μονογραμμική απεικόνισή παραβολογράφου van Schooten και διατύπωση εικασίας για τον κύκλο προσέγγισης σε σημείο της παραβολής.....σελ. 124
- Εικόνα 92:** Μονογραμμική απεικόνισή παραβολογράφου van Schooten και χάραξη του κύκλου προσέγγισης σε σημείο της παραβολής.....σελ. 125
- Εικόνα 93:** Μονογραμμική απεικόνισή παραβολογράφου van Schooten και χάραξη της «εξελιγμένης» καμπύλης ή «evolute curve» της παραβολής.....σελ. 126
- Εικόνα 94:** Μονογραμμική απεικόνισή παραβολογράφου van Schooten και διερεύνηση της «εξελιγμένης» καμπύλης όταν ο κύκλος προσέγγισης έχει μεγαλύτερη ακτίνα από την ενδεδειγμένη.....σελ. 126
- Εικόνα 95:** Μονογραμμική απεικόνισή παραβολογράφου van Schooten και διερεύνηση της «εξελιγμένης» καμπύλης όταν ο κύκλος προσέγγισης έχει μικρότερη ακτίνα από την ενδεδειγμένη.....σελ. 127
- Εικόνα 96:** Μονογραμμική απεικόνισή παραβολογράφου van Schooten και διερεύνηση της «εξελιγμένης» καμπύλης όταν ο κύκλος προσέγγισης έχει μεγαλύτερη ακτίνα από την ενδεδειγμένη.....σελ. 127
- Εικόνα 97:** Μονογραμμική απεικόνιση παραβολογράφου van Schooten και γεωμετρική κατασκευή ακτίνας κύκλου προσέγγισης σε τυχαίο σημείο της παραβολής.....σελ. 128
- Εικόνα 98:** Ο παραβολογράφος Cavalieri & οπτικό διάγραμμα (Cavalieri, 1632) & συμμετρική επέκταση του.....σελ. 129
- Εικόνα 99:** Τετραγωνισμός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σύμφωνα με την Πρόταση II.14 των Στοιχείων.....σελ 130
- Εικόνα 100:** Τετραγωνισμοί ορθογωνίων μέσω του παραβολογράφου Cavalieri.....σελ. 131
- Εικόνα 101:** Ανόρθωση ισεμβαδικών τετραγώνων, κάθετα στο επίπεδο του παραβολογράφου Cavalieri.....σελ. 131
- Εικόνα 102:** Ορισμός παραβολής από τον Απολλώνιο και σύνδεση με τον παραβολογράφο Cavalieri.....σελ. 132
- Εικόνα 103:** Ανόρθωση ισεμβαδικών τετραγώνων κάθετα στον συμμετρικό παραβολογράφο Cavalieri.....σελ. 133

Εικόνα 104: Αλγεβρική αναπαράσταση παραβολής μέσω του παραβολογράφου Cavalieri.....σελ.	134
Εικόνα 105: Εύρεση Εστίας και διευθετούσας της χαραχθείσας ημιπαραβολής μέσω του παραβολογράφου Cavalieri.....σελ.	135
Εικόνα 106: Μεταβλητές παραβολογράφου Cavalieri.....σελ.	136
Εικόνα 107: Παράμετρος αποκαμπύλωσης στον παραβολογράφο Cavalieri.....σελ.	137
Εικόνα 108: Πρώτο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου Cavalieri μέσω του λογισμικού Geogebraσελ.	138
Εικόνα 109: Δεύτερο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου Cavalieri μέσω του λογισμικού Geogebraσελ.	138
Εικόνα 110: Τρίτο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου Cavalieri μέσω του λογισμικού Geogebra.....σελ.	139
Εικόνα 111 : Ο «φυσικός» παραβολογράφος Cavalieri.....σελ.	140
Εικόνα 112: Ο φυσικός παραβολογράφος Cavalieri με μεταβαλλόμενη «ορθία» και αποκαμπύλωση χαρασσόμενου παραβολικού τόξου.....σελ.	141
Εικόνα 113: Προσθήκη ράβδου-εφαπτόμενης στον παραβολογράφο Cavalieri και λειτουργία του ως εφαπτομενικογράφος.....σελ.	142
Εικόνα 114: Προσθήκη δύο ράβδων-εφαπτόμενων στον παραβολογράφο Cavalieri και λειτουργία του ως συμμετρικός εφαπτομενικογράφος.....σελ.	143
Εικόνα 115: Εμβαδομέτρηση παραβολικού χωρίου μέσω της θεωρίας των «αδιαίρετων» του Cavalieri και μέσω επέκτασης του παραβολογράφου.....σελ.	144
Εικόνα 116: Τα «αδιαίρετα» από το βιβλίο του Cavalieri (1635) με τίτλο « <i>Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota</i> ».....σελ.	145
Εικόνα 117: Ορισμένο ολοκλήρωμα πρωτοβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης μέσω των «αδιαίρετων» του Cavalieri.....σελ.	147
Εικόνα 118: Υπερτιθέμενα αδιαίρετα τετράγωνα σε παραβολικό χωρίο για το Β' θεμελιώδες θεώρημα (II.4) του Cavalieri.....σελ.	147
Εικόνα 119: Υπερτιθέμενα αδιαίρετα τετράγωνα για την εμβαδομέτρηση παραβολικού χωρίου στον παραβολογράφο Cavalieri.....σελ.	148

- Εικόνα 120:** Πρόταση II.9 των Στοιχείων του Ευκλείδη, σε ευθύγραμμο τμήμα AB όπου M το μέσο του και Σ τυχαίο σημείο του.....σελ. 149
- Εικόνα 121:** Εφαρμογή Πρότασης II.9 των Στοιχείων του Ευκλείδη, σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ σελ. 149
- Εικόνα 122:** Πρόταση II.9 των Στοιχείων του Ευκλείδη, σε ευθύγραμμο τμήμα AB όπου M το μέσο της διαγωνίου και Σ τυχαίο σημείο του BFσελ. 149
- Εικόνα 123:** Υπέρθεση των αδιαίρετων τετραγώνων στο τμήμα RV του παραλληλογράμμου $ACGE$, καθώς το RV μετακινείται παράλληλως των πλευρών AC & EGσελ. 150
- Εικόνα 124:** Τετράεδρο μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα οποία δημιουργούνται από τα αντίστοιχα υπέρθετα αδιαίρετα τετράγωνα.....σελ. 151
- Εικόνα 125:** Απόσπασμα από το βιβλίο του Cavalieri (1635) «*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*» και προσπάθεια εισαγωγής του παραβολογράφου Cavalieri μέσω του λογισμικού Geogebra.....σελ. 151
- Εικόνα 126:** Υπέρθεση αδιαίρετων τετραγώνων στο τετράγωνο και στο τρίγωνό με υποτείνουσα την διαγώνιο του.....σελ. 152
- Εικόνα 127:** Από τους λόγους αδιαίρετων γραμμών χωρίου σε λόγους αδιαίρετων τετραγώνων τετραέδρου ή ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.....σελ. 153
- Εικόνα 128:** «Συνάντηση» van Schooten και Cavalieri μέσα από τους παραβολογράφους τους.....σελ. 154
- Εικόνα 129:** Σταδιακή άρθρωση παραβολογράφου Cavalieri πάνω στον παραβολογράφο van Schoote.....σελ. 155
- Εικόνα 130:** Σταδιακή άρθρωση παραβολογράφου van Schooten πάνω στον παραβολογράφο Cavalieri.....σελ. 156
- Εικόνα 131:** Βήματα κατασκευής του παραβολογράφου van Schooten μέσω του παραβολογράφου Cavalieri.....σελ. 158
- Εικόνα 132:** Φωτογραφίες από την πειραματική διδασκαλία στο 9^ο ΓΕΛ Πάτρας 5 & 12 Απριλίου 2022σελ. 159
- Εικόνα 133:** Σχηματική αναπαράσταση της Θεωρίας της Σημειωτικής Διαμεσολάβησης για τους δύο παραβολογράφους.....σελ. 162
- Εικόνα 134:** Περιγραφή δείκτη γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων «SOLO»....σελ. 164

Εικόνα 135: Περιγραφή γνωστικού δείκτη Γνώσης Καταχώρησης.....σελ. 165

Εικόνα 136: Περιγραφή δεικτών γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων «Επεξεργασίες» και «Συνδέσεις».....σελ 165

Εικόνα 137: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στην δεκαμελή ομάδα van Schooten (διατεταγμένοι ως προς τον δείκτη van Hiele).....σελ. 176

Εικόνα 138: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στην δεκαμελή ομάδα van Schooten (διατεταγμένοι ως προς τον δείκτη SOLO).....σελ. 176

Εικόνα 139: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στην οκταμελή ομάδα Cavalieri (διατεταγμένοι ως προς τον δείκτη van Hiele).....σελ. 178

Εικόνα 140: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στην οκταμελή ομάδα Cavalieri (διατεταγμένοι ως προς τον δείκτη SOLO).....σελ. 179

Εικόνα 141: Διατύπωση αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος παραβολικής καμπύλης.....σελ. 187

Εικόνα 142: Υπολογισμός τοπικής καμπυλότητας με στοιχεία της μαθηματικής μηχανής van Schooten.....σελ. 188

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών Β΄ Λυκείου 2021-22.....σελ. 160

Πίνακας 2: Ακρωνύμια & Ποσοτικοποίηση των πέντε δεικτών κατανόησης.....σελ. 166

Πίνακας 3: Απάντηση vS1 στην 1^η ερώτηση και ανάλυσησελ. 168

Πίνακας 4: Μέση τιμή γνωστικών μεταβλητών για vS1.....σελ. 169

Πίνακας 5: Μέση τιμή μεταβλητών γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων για vS1σελ. 169

Πίνακας 6: Απάντηση C6 στην 15^η ερώτηση και ανάλυση.....σελ. 170

Πίνακας 7: Μέση τιμή γνωστικών μεταβλητών για C6.....σελ. 171

Πίνακας 8: Μέση τιμή μεταβλητών γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων για C6 σελ. 171

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μέχρι τον 18^ο αιώνα η Γεωμετρία ήταν η κυρίαρχη μορφή της μαθηματικής σκέψης. Σήμερα αυτή η σχέση κυριαρχίας έχει αντιστραφεί, και δεν αφιερώνεται αρκετός χρόνος για την διδασκαλία της Γεωμετρίας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επίσης η Στερεομετρία και η γεωμετρική μελέτη των κωνικών τομών «έχουν τοποθετηθεί σε κάποιο μουσείο». Όσον αφορά τις μαθηματικές μηχανές χάραξης γεωμετρικών καμπυλών (νέοι διαβήτες κατά τον Descartes), οι οποίες διαμόρφωσαν τουλάχιστον δύο γενιές μαθηματικών κατά τον 17^ο και 18^ο αιώνα, έχουν εξαφανισθεί, ακόμη και ως έννοιες.

Στην Ιαπωνία, ο συγγραφέας σχολικών βιβλίων Minoru Kuroda την δεκαετία του 1920, είχε εισάγει στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση της χώρας του την διδασκαλία του Λογισμού μέσω μαθηματικών μηχανισμών για μαθητές-τριες 15 ετών. Στις ΗΠΑ, ο David Dennis και η Jere Confrey εστίασαν στο ίδιο σημείο θεωρώντας ότι η αναλυτική γεωμετρία θα μπορούσε να παρουσιαστεί ως ένας βρόγχος μεταξύ του απτικού, του γεωμετρικού κόσμου των καμπυλών και του σημειωτικού κόσμου της Άλγεβρας καθώς και των αριθμητικών δεδομένων. Στην Ιταλία η Maria G. Bartolini Bussi και ο Pietro Milici εμπλέκονται σε καινοτόμα έργα χρησιμοποιώντας μαθηματικές μηχανές και προσομοιώσεις τους μέσω λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας από τις αρχές της δεκαετίας του 1980.

Αυτή η εργασία κινείται ταυτοχρόνως σε τέσσερα επιστημονικά πεδία με προβληματισμούς σχετικούς με την αλγεβρικά και γεωμετρικά ισόρροπη διδασκαλία των καμπυλών και των συναρτήσεων, έχοντας ως σημείο αναφοράς την παραβολική καμπύλη. Διατρέχει τις περιοχές των Μαθηματικών, της Μηχανολογίας (Engineering), της Ιστορίας των Μαθηματικών και της Διδακτικής τους. Εξετάζεται η ανάλυση, η προσομοίωση, η ανακατασκευή και η επέκταση δύο ιστορικών παραβολογράφων και η εισαγωγή τους στη διδασκαλία της παραβολής και των συναρτήσεων. Είναι σημαντικό τα φυσικά και λειτουργικά χαρακτηριστικά αυτών των τεχνουργημάτων, καθώς και τα μαθηματικά που ενσωματώνουν, να οδηγήσουν τους μαθητές-τριες από ένα μηχανολογικό και γεωμετρικό περιβάλλον σε συμπεράσματα που αναπαρίστανται αλγεβρικά. Επίσης γίνεται και προσπάθεια αξιολόγησης του επιπέδου κατανόησης των μαθητών και μαθητριών σε πέντε πτυχές γνώσης και δραστηριότητας.

Αρχικά αφού διατυπωθούν οι στόχοι αυτής της έρευνας, θα παρουσιασθεί ένα ευρύτερο θεωρητικό πλαίσιο που αφορά την παράλληλη διαδρομή των Μαθηματικών και των Μηχανών από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Θα ακολουθήσουν τα ερευνητικά ερωτήματα και στη συνέχεια θα παρουσιασθούν και θα αναλυθούν οι ιστορικοί παραβολογράφοι του Frans van Schooten και του Bonaventura Cavalieri καθώς και η προσπάθεια ανακατασκευής

τους. Στη συνέχεια θα αναλυθούν και θα αξιολογηθούν τα δεδομένα που προέκυψαν από την διδασκαλία της παραβολικής καμπύλης με την διαμεσολάβηση αυτών των μηχανισμών, σε τμήμα μαθητών και μαθητριών της Β΄ Λυκείου.

ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Να αναδειχθεί ο ρόλος των μαθηματικών μηχανών ανά τους αιώνες, στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.
- 2) Να αναδειχθούν, μέσω της κομβικής έννοιας της παραβολής, οι δυνατότητες σύνδεσης περιοχών μέσα στα Μαθηματικά, αλλά και μέσω των Μαθηματικών.
- 3) Να πραγματοποιηθεί η ανάλυση, η προσομοίωση και η φυσική κατασκευή δύο ιστορικών παραβολογράφων του 17^{ου} αιώνα, για να τεκμηριωθεί η λειτουργία τους ως «γέφυρα διδασκαλίας» μεταξύ Γεωμετρίας και Άλγεβρας.
- 4) Να αναδειχθεί η δυναμική της κινηματικής Γεωμετρίας καθώς και η σύνδεση της διδασκαλίας των Μαθηματικών, της Τεχνολογίας της Μηχανολογίας καθώς και της Ιστορίας των Μαθηματικών και της Μηχανολογίας μέσω της διερεύνησης τεχνουργημάτων τα οποία εμφανίστηκαν στην ανθρωπότητα για κάποιο συγκεκριμένο λόγο.
- 5) Να εξοικειωθούν οι μαθητές και οι μαθήτριες με τη διαδικασία του μηχανολογικού σχεδιασμού.
- 6) Να ελεγχθεί η δυνατότητα επέκτασης αυτών των μηχανισμών καθώς και οι περαιτέρω πληροφορίες που μπορούν να αντληθούν για το γεωμετρικό αντικείμενο που ενσωματώνουν και σχεδιάζουν, και στη συνέχεια αποτελούν νέα αντικείμενα διδασκαλίας (τοπική καμπυλότητα παραβολής και αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα παραβολής).
- 7) Να αποδειχθεί και η «μηχανολογική» ισοδυναμία των ορισμών της παραβολής που είναι ενσωματωμένοι σε αυτούς των ιστορικούς παραβολογράφους.
- 8) Να πραγματοποιηθεί μία διεπιστημονική προσέγγιση και πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών για την δευτεροβάθμια εκπαίδευση.
- 9) Να εφαρμοσθεί κάποια μέθοδος ανάλυσης και αξιολόγησης της κατανόησης των μαθητών-τριών που εργάζονται με την διαμεσολάβηση μαθηματικών μηχανών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

1.1. Μαθηματικοί μηχανισμοί & μαθηματικά όργανα

Η λέξη «μηχανή» εμφανίστηκε στα κείμενα του Ομήρου τον 8^ο π.Χ. αιώνα, αλλά με άλλη σημασία από τη σημερινή (Χόνδρος, 1998). Ο Διογένης ο Λαέρτιος (3^{ος} αιώνας μ.Χ.) αναφέρει ότι ο Αρχύτας από τον Τάραντα (428-347 π.Χ.) εισήγαγε γεωμετρική μελέτη στην μηχανική και χρησιμοποίησε κίνηση για την επίλυση του Δηλίου γεωμετρικού προβλήματος (Capeccchi & Ruta, 2022).

Μια μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων «τριχοτόμησης γωνίας» και «τετραγωνισμού κύκλου» ήταν η χρήση της «τετραγωνίζουσας» του Ιππία (460 - 400 π.Χ.) και αποτελεί ίσως το πρώτο παράδειγμα καμπύλης, που ορίζεται μέσω κίνησης, η οποία δεν είναι δυνατόν να χαραχθεί με κανόνα και διαβήτη (Taimina, 2007) (<https://www.geogebra.org/m/avvckmn4>).

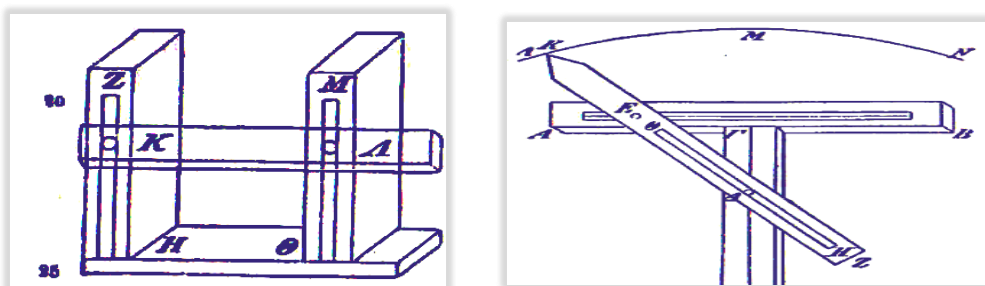
Ο Απολλώνιος ο Περγαίος (270-190 π.Χ.) «προσγείωσε» τις κωνικές τομές στο επίπεδο και κατασκεύασε τις εφαπτόμενές τους, οι οποίες εφαρμόστηκαν σε προβλήματα μέτρησης περιοχών, τροχιάς σώματος, κατασκευής μηχανισμών, μεγιστοποίησης μεγέθους, στην έννοια της συνάρτησης, και στην έννοια της παραμέτρου. Το έργο του συνέβαλε αργότερα στον συγκερασμό της Γεωμετρίας με την νεοσύστατη Άλγεβρα κατά τον 17^ο αιώνα (Dennis, 1995). Στα Κωνικά του, οι καμπύλες μελετώνται μέσω διατεταγμένων τμημάτων σε κάποια διάμετρο της καμπύλης, εισάγοντας την «γεωμετρία των συντεταγμένων». Θεωρούσε την καμπύλη ως μία ακολουθία τέτοιων τεταγμένων τμημάτων: «καταγόμεναι τεταγμένως παρά την διάμετρον» ή «τεταγμένως κατηγμέναι» Αυτή η θεώρηση αναβίωσε τον 17^ο αιώνα από τον Descartes, τον Newton και τον Leibnitz και δημιουργήθηκε όλη αυτή η επιστημονική και πολιτιστική «επανάσταση». (Σταμάτης, 1975, σ. 8).

Θεμελιώδης και καθοριστική για την ανάπτυξη των Μαθηματικών και της Μηχανολογίας (Engineering) υπήρξε η προσπάθεια επίλυσης του «Δηλίου προβλήματος» κατά την Αρχαιότητα, που απετέλεσε κίνητρο διαρκούς έρευνας μέχρι τον 19^ο αιώνα. Το Δήλιο πρόβλημα αφορούσε την κατασκευή κύβου με διπλάσιο όγκο δεδομένου κύβου και λύθηκε με δώδεκα τρόπους, έξω από τα όρια της Ευκλείδειου Γεωμετρίας. Απαιτείτο η χρήση άλλων καμπυλών εκτός της ευθείας και του κύκλου ή η μέθοδος της «νεύσης», καθώς και κίνηση. Αυτές οι προσπάθειες περιγράφονται από τον Ερατοσθένη, ο οποίος ήταν διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας γύρω στο 230 π.Χ., σε επιστολή του προς τον Πτολεμαίο τον

Γ', την οποία παραθέτει ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης (550 μ.Χ.) στα σχόλιά του για το 2^ο Βιβλίο του Αρχιμήδη «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» (Νικολαντωνάκης, 2023).

Σύμφωνα με τον Σταμάτη (1949):

- Αρχύτας ο Ταραντίνος (428-365 π.Χ.) «κατασκευάζει» το πρόβλημα με ημικυλίνδρους όπως αναφέρει ο Εύδημος,
- Πλάτωνας (427-347 π.Χ.) με παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων και με συγκεκριμένο μηχανισμό («κυβιστής» του Πλάτωνα), ο οποίος μάλλον ήταν επινόηση του Ευδόξου (εικόνα 1),
- Ευδόξος ο Κνίδιος (407-354 π.Χ.) με την «καμπύλη του» που έχει εξίσωση $\rho = \frac{\alpha^2}{\beta \cdot \sin^2 \theta}$ (σε πολικές συντεταγμένες).
- Μέναιχος (380-320 π.Χ.) με την χρήση δύο παραβολών καθώς και με την τομή παραβολής και υπερβολής, Υπάρχουν επίσης αναφορές ότι ο Μέναιχος διέθετε μια μηχανική συσκευή για την κατασκευή κωνικών τομών, την οποία χρησιμοποίησε για να λύσει το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου (Taimina, 2007).
- Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) με παραβολή και υπερβολή,
- Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (276-194 π.Χ.) με τον μηχανισμό «μεσολάβιον»,
- Απολλώνιος ο Περγαίος (270-190 π.Χ.) με κύκλο και ισοσκελή υπερβολή όπως περιγράφεται στην πραγματεία του «εύρεση δύο μέσων αναλόγων όταν δοθούν δύο άνισες ευθείες» η οποία διεσώθη από τον Ευτόκιο,
- Νικομήδης (200 π.Χ.) με την κοχλοειδή ή κογχοειδή καμπύλη και με τον μηχανισμό «τριχοτομούσα» (εικόνα 1),
- Ήρων ο Αλεξανδρεύς (200 π.Χ.) με νεύση,
- Διοκλής (1ος π.Χ. αι.) με την κισσοειδή καμπύλη που χρησιμοποιείται και για τριπλασιασμό, τετραπλασιασμό κτλ. κύβου, και
- Πάππος (3ος μ.Χ αι.) με νεύση.



Εικόνα 1: «κυβιστής του Πλάτωνα» (Σταμάτης, 1949) <https://www.geogebra.org/m/c53pprfs> & « συσκευή χάραξης κογχοειδούς καμπύλης του Νικομήδη» (Σταμάτης, 1949) <https://www.geogebra.org/m/k7fxn4a5>

Ο Issac Newton (1643-1727) σχολιάζοντας όλες τις προτεινόμενες κατασκευές του Δηλίου προβλήματος θεωρούσε καλύτερη μέθοδο μέσω της κογχοειδούς του Νικομήδη για την επίλυση τριτοβάθμιων πολυωνυμικών εξισώσεων (Σταμάτης, 1949).

Στην ελληνορωμαϊκή αρχαιότητα, η τέχνη ή η επιστήμη της μηχανικής περιλάμβανε ένα ευρύ φάσμα χειρωνακτικών και διανοητικών δραστηριοτήτων από την κατασκευή μηχανισμών ακριβείας, στην εξελιγμένη θεωρητική ανάλυση των μηχανών με όρους εννοιών όπως για παράδειγμα ο νόμος του μοχλού, που διατυπώθηκε και αποδείχθηκε από τον Αρχιμήδη ως ακριβής ποσοτική σχέση μεταξύ δυνάμεων και βαρών και στο «Περί Διόπτρας» του Ήρωνα περιγράφεται επακριβώς αυτό το γεωμετρικό όργανο που μοιάζει με τον μετέπειτα θεοδόλιχο (Κηπουρός, 2000). Συγκεκριμένα, για τη θεωρητική μηχανική, ο Ήρωνας αναφέρει τον Αρχιμήδη περίπου δέκα φορές στη «Μηχανική» του. Παρατίθεται ως αυθεντία για την απόδειξη του νόμου του μοχλού. Η δεύτερη κύρια πηγή πάνω στο οποίο ο Ήρωνας άντλησε για τη μηχανική θεωρία ήταν η ψευδο-αριστοτελική Μηχανική. Η αφήγηση του Ήρωνα για τον τροχό και τον άξονα, τον μοχλό, τη σύνθετη τροχαλία, τη σφήνα και την βίδα παρέχει μια εξαιρετική απεικόνιση πολλών πτυχών της αλληλεπίδρασης μεταξύ των θεωρητικών της μηχανικής και των γνώσεων των επαγγελματιών. Ταξινόμησε τις μηχανές δεχόμενος ότι αποτελούνται από πέντε στοιχεία (μοχλός, σφόνδυλος, κοχλίας, σφήνα, τροχαλία) και έγινε η απαρχή κατασκευής θερμικών μηχανών (Δημαρόγκωνας, 1985).

Ο Πάππος αναφέρει ότι ο μηχανικός Ήρων και οι περί αυτόν μηχανικοί διέκριναν μεταξύ του λογικού μέρους της μηχανικής (που περιελάμβανε γνώση γεωμετρίας, αριθμητικής, αστρονομίας και φυσικής) και του χειραπτικού που περιελάμβανε δεξιότητες όπως η κατεργασία χαλκού, η οικοδόμηση, η ξυλουργική και η ζωγραφική (Schiefsky 2008). Βέβαια, υπάρχουν στοιχεία αμφίδρομης αλληλεπίδρασης μεταξύ τους: Η μηχανική τεχνολογία αναπτύχθηκε μερικές φορές με την εφαρμογή της θεωρητικής γνώσης, αλλά οι τεχνολογίες συχνά προηγούνταν κάθε θεωρίας που θα μπορούσε να τις εξηγήσει. Η ανάπτυξη της τεχνολογίας παρήγαγε ένα σύνολο προβληματικών φαινομένων που απαιτούσαν εξήγηση και έτσι τόνωσε την ανάπτυξη της θεωρητικής μηχανικής.

Από τους πιο γνωστούς Ρωμαίους αρχιτέκτονες-μηχανικούς ήταν ο Marcus Vitruvius Pollio, (80/70 - 25 π.Χ.). Σύμφωνα με πολλούς σύγχρονους μελετητές, η ρωμαϊκή επιστήμη ήταν πλήρως βασισμένη στις ελληνικές σπουδές και οι Ρωμαίοι επιστήμονες δεν παρέχουν καμία νέα ιδέα σε σύγκριση με τους Έλληνες επιστήμονες. Η επιστήμη είχε μια πιο αφηρημένη στάση, δηλαδή απαντούσε σε θεωρητικά ερωτήματα και αφιερώθηκε στην εξήγηση φαινομένων της φύσης ή των φυσικών νόμων, χωρίς να δοκιμάσει καμία πρακτική εφαρμογή. Από την άλλη πλευρά, η τεχνολογία ήταν πιο πρακτικού προσανατολισμού, με μια ισχυρή

πραγματιστική προσέγγιση, που δεν χρησιμοποιούσε συχνά τα αποτελέσματα της θεωρητικής επιστήμης. Ακόμη και οι πιο επικριτικοί μελετητές δεν μπορούν να αποφύγουν να παρατηρήσουν ότι οι Ρωμαίοι εκείνη την περίοδο είχαν φτάσει σε πολύ υψηλότερο τεχνολογικό επίπεδο σε σύγκριση με τους Έλληνες. Έτσι, τυπικές ρωμαϊκές μηχανές μπορούν να θεωρηθούν γερανοί για την ανύψωση βαρών (πέτρες για δρόμους και κτίρια, φορτία για σκάφη κ.λπ.), αντλίες για ύδρευση, μύλοι για λείανση δαπέδων και άλλων υλικών και πολεμικές μηχανές. Στην αρχή του βιβλίου X ο Vitruvius γράφει ότι «μια μηχανή είναι ένας συνδυασμός υλικών και εξαρτημάτων που έχουν την ικανότητα να μετακινούν βάρη». Έστρεψε την προσοχή του σε μηχανές που στόχος τους είναι η κίνηση των μηχανικών μερών για τη μεταφορά φορτίου. Τα μηχανήματα θεωρούνταν από τους Ρωμαίους ως απαραίτητο μέσο για την επιτυχή επίτευξη πρακτικών στόχων. Αν και η θεωρία πίσω από αυτά ήταν γνωστή και εξακολουθούσε να ερευνάται με κάποιο τρόπο, οι Ρωμαίοι μηχανικοί έλκονταν περισσότερο από πρακτικές εφαρμογές και οι γνώσεις και οι δεξιότητές τους χρησιμοποιούντο ως καθιερωμένη πρακτική για τις ανάγκες της κοινότητας.

Πίσω στον ελληνικό χώρο, ο Πάππος (290-350 μ.Χ.) ταξινομεί τα γεωμετρικά προβλήματα σε κατηγορίες ανάλογα με τα μέσα που απαιτούνται για την επίλυσή τους. Στη «Συναγωγή» του που αποτελεί ένα είδος μαθηματικής εγκυκλοπαίδειας, σχολιάζει τα «Κωνικά» του Απολλώνιου στα εμπεριεχόμενα λήμματα και ταξινομεί τα γεωμετρικά προβλήματα σε τρεις κατηγορίες: (α) «επίπεδα» που επιλύονται με την χρήση ευθείας και κύκλου, (β) «στερεά» που επιλύονται με την χρήση κωνικών τομών, και (γ) «γραμμικά» που επιλύονται με την χρήση άλλων καμπυλών (Σταμάτης, 1975). Μηχανισμοί χάραξης των καμπυλών, είχαν ήδη σχεδιασθεί από τους Έλληνες μαθηματικούς για να κατασκευασθούν γεωμετρικά προβλήματα τα οποία δεν μπορούσαν με κανόνα και διαβήτη, όπως ο ελλειψογράφος, η σπείρα, η έλικα, η τετραγωνίζουσα, η κογχοειδής, η κισσοειδής. Ο μαθηματικός Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης (480-540 μ.Χ.) αναφέρει επίσης τον μαθηματικό και αρχιτέκτονα Ισίδωρο τον Μιλήσιο (442- 537 μ.Χ.) ο οποίος ήταν ο βασικός συνεργάτης του Ανθεμίου του Τραλλιανού (474-534 μ.Χ.) για την ανοικοδόμηση του ναού της Αγίας Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη το 537 μ.Χ. επί Ιουστινιανού Α΄, και διέθετε κάποιον παραβολογράφο (Allman, 1889. Dyck, 1892). Πιθανόν ο παραβολογράφος αυτός να είναι ο παραβολογράφος του Μέναιχμου (Σταμάτης, 1949, σελ. 17).

Τα Ελληνικά Μαθηματικά κατά τις περιόδους του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης, ήταν η βάση της μεταγενέστερης ανάπτυξης. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση κατασκευής κανονικού επταγώνου με δεδομένο εξ' αρχής το μήκος της πλευράς του, ένα θέμα που απασχόλησε τον Αρχιμήδη, ο οποίος χρησιμοποίησε «κινηματική Γεωμετρία»,

δείχνοντας, σύμφωνα με τις πηγές που υπάρχουν, την ύπαρξη της κατασκευής αυτής (Berggren, 1986). Το πρόβλημα της κατασκευής του κανονικού επταγώνου παρέμεινε άλυτο για περίπου 1200 χρόνια μέχρι την αναλυτικο-συνθετική επίλυσή του από τον Ιρανό Μαθηματικό Abū Sahl al-Kūhī (10^{ος} αι. μ.Χ.) που μελέτησε εκτεταμένα το έργο των αρχαίων Ελλήνων Γεωμετρών εστιάζοντας στο έργο του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου. Βασίστηκε σε μεγάλο βαθμό στη γεωμετρική μέθοδο της ανάλυσης που εφαρμόζαν οι Έλληνες γεωμέτρες, με στόχο να αναχθεί η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων της εποχής σε κατασκευές οι οποίες μπορούσαν να επιτευχθούν με τη χρήση κωνικών τομών. Τα αποτελέσματά του αφορούσαν κατά κύριο λόγο προβλήματα, τα οποία ανάγονταν στην επίλυση εξισώσεων με βαθμό μεγαλύτερο του δύο, αρκετά από τα οποία ήταν αυξημένης δυσκολίας. Είχε γράψει μάλιστα και μια πραγματεία με τίτλο «*On the perfect compass*» στην οποία περιέγραφε ένα μαθηματικό όργανο το οποίο επέτρεπε την ακριβή χάραξη των κωνικών τομών (εικόνα 2), το οποίο αργότερα το επανεμφάνισαν οι μαθηματικοί Francesco Barozzi (1537-1604) και Bonaventura Cavalieri (1598 -1647).



Εικόνα 2: «Δύο κωνικογράφοι από το βιβλίο του Barozzi «*Admirandum illud geometricum problema*, 1586, Venetis, σελ. 30 & 31» <https://www.geogebra.org/m/sefxugd>

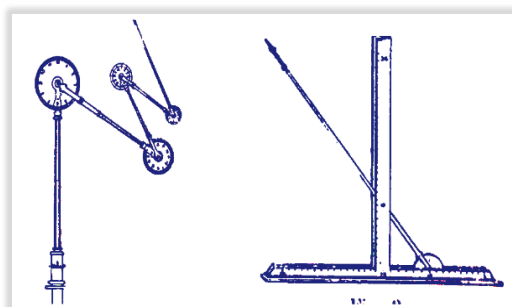
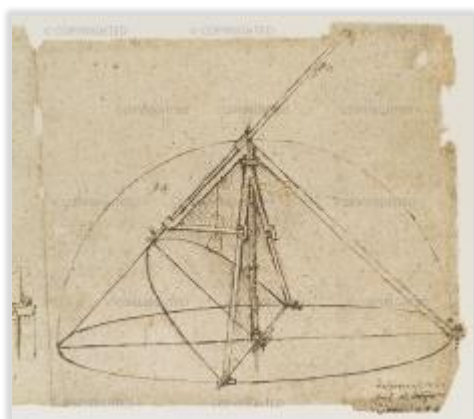
Ο Abū Sahl al-Kūhī περιέγραψε την κατασκευή του κανονικού επταγώνου αναλυτικο-συνθετικά, στηριζόμενος στην κατασκευή του Αρχιμήδη, ανάγοντας την σε κατασκευή τριγώνου με πλευρές που βρίσκονται σε αναλογία 1: 4: 2 και καταλήγει στο συμπέρασμα πως το ζητούμενο σημείο, το οποίο καθορίζει και την κατασκευή του προβλήματος, αποτελεί σημείο τομής δύο κωνικών τομών, μίας παραβολής και μία υπερβολής (Αλεξοπούλου, 2015).

Την περίοδο του Μεσαίωνα της Δυτικής Ευρώπης, υπήρξε δραστηριότητα από τα μοναστήρια για την κατασκευή μαθηματικών οργάνων αστρονομίας και ηλιακών ρολογιών. Τα μοναστήρια ήταν «υποδοχέας» επιστημονικής γνώσης από το διαλυμένο Βυζάντιο και από τον Ισλαμικό κόσμο, και αυτό αποτελούσε ένδειξη τεχνογνωσίας και εξουσίας. Ο ηγούμενος του μοναστηριού στο St. Albans της Αγγλίας, Richard of Wallingford (1292-1336), τόνισε την πολυλειτουργικότητα του οργάνου Albion (εικόνα 3) και τόνισε τη δυνατότητά του να «κατευθύνει την σκέψη πολλών ανθρώπων σε ανώτερα πράγματα» (Falk, 2016).



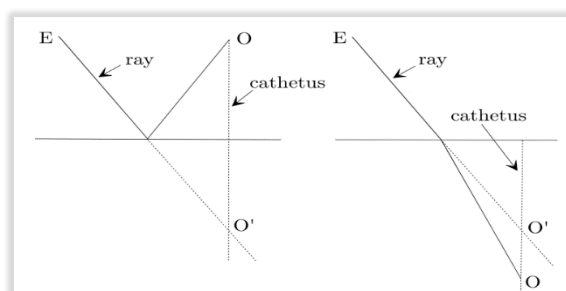
Εικόνα 3 : Albion 14^{ου} αιώνα (Tractatus Albionis (1326). Ρώμη, Museo Astronomico e Copernicano) & η πραγματεία του Richard of Wallingford για τη θεωρία, την κατασκευή και τη χρήση του οργάνου Albion (Πανεπιστήμιο Οξφόρδης) https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/EarlyMathematicians_0.pdf

Ο Leonardo da Vinci (1452-1519) ήταν πιθανώς ο πρώτος που κατέγραψε μια μεγάλη ποικιλία μηχανισμών, πολλοί από τους οποίους πιστεύεται ότι εφευρέθηκαν από τον ίδιο. Ενδεικτικά αναφέρεται η μελέτη του για την μεταφορά δυνάμεων με οδοντωτούς τροχούς και τροχαλίες, τη φθορά των εδράνων, την δοκιμή των κοχλιών, τις τριβές, καθώς και για κωνικογράφους (Δημαρόγκωνας, 1985). Εφηύρε τόρνο για την περιστροφή τμημάτων έλλειψης, χρησιμοποιώντας έναν ελλειψογράφο, ο οποίος ήταν συνδεσμολογία τεσσάρων ράβδων (linkage) και λειτουργούσε με ανεστραμμένη κίνηση του σταθερού συνδέσμου (Taimina, 2007). Σχέδιο του για έναν τρισδιάστατο κωνικογράφο σώζεται στο Μουσείο Galileo στη Φλωρεντία (εικόνα 4). Κατά την ίδια περίοδο, μαθηματικές μηχανές χάραξης καμπυλών παρουσίασε ο Albrecht Dürer (1471-1528) στο έργο του «για λόγους και αναλογίες» (εικόνα 4). Η σημασία των αναλογιών και των διαδοχικών ομοιοτήτων μεταξύ τριγώνων είναι βασικό εργαλείο της μηχανολογίας.



Εικόνα 4 : σχέδιο κωνικογράφου από τον da Vinci https://redi.imss.fi.it/invenzioni/index.php/Compasso_per_parabole & «μηχανισμοί αναλογιών του Dürer από το βιβλίο του «Four books on proportions (1532)»

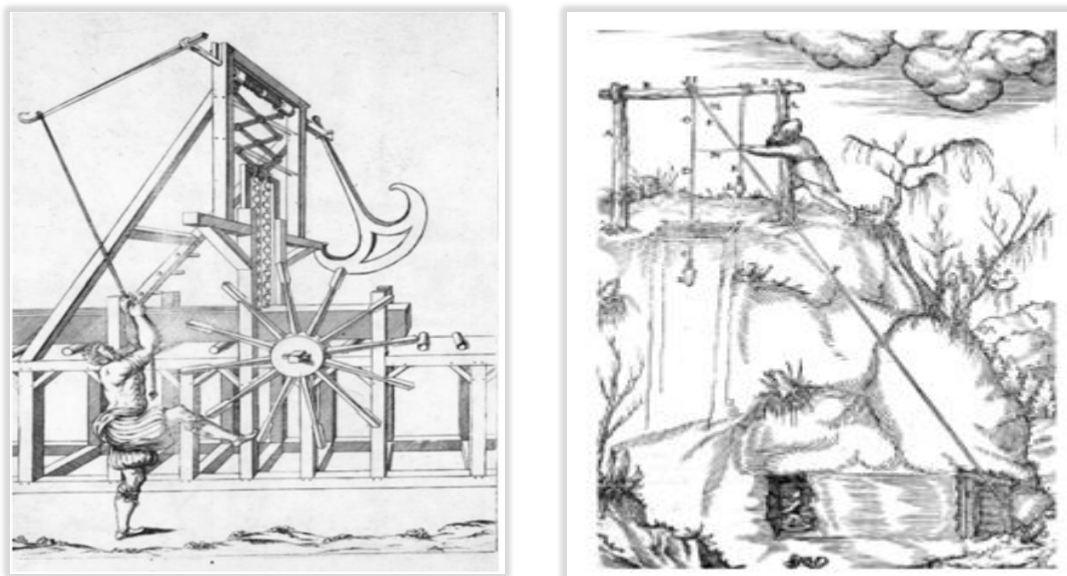
Τα «οπτικά διαγράμματα», γεωμετρικές κατασκευές που αναπαριστούσαν οπτικές εμπειρίες για να τις κάνουν συμβατές με την Ευκλείδεια γεωμετρία (εικόνα 5), εμφανίζονται από την αρχαιότητα (Smith, 2019). Μπορούν να γεφυρώσουν το εννοιολογικό κενό που συνήθως εμφανίζεται μεταξύ των υλικών εργαλείων και των τρόπων αναπαράστασης των μαθηματικών που εμπεριέχουν. Τόσο τα εργαλεία όσο και τα οπτικά διαγράμματα λειτουργούν ως όργανα (instruments) κατασκευής, χειρισμού και αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης που εμπεριέχουν. Στην Αναγέννηση της Δύσης, μελετητές και επαγγελματίες προσπάθησαν να κατασκευάσουν οπτικά διαγράμματα με πειραματικό πνεύμα που οδήγησε σε ένα ευρύ φάσμα νέων αστρονομικών, τοπογραφικών και άλλων μαθηματικών οργάνων. Βασικά πρόσωπα των εξελίξεων στα οπτικά διαγράμματα είναι ο Ελληνικής καταγωγής μαθηματικός Francesco Maurolico (1494-1575) που έφτιαξε οπτικά γεωμετρικά διαγράμματα φωτός σε γυάλινη σφαίρα, ο πολυμαθής Giovanni Battista Della Porta (1535-1615) που έφτιαξε οπτικά διαγράμματα κυρίως τυποποιημένης εμπειρίας και ο μαθηματικός Johannes Kepler (1594-1630), ο οποίος παρέδωσε διαγράμματα γεωμετρικά και εμπειρικά (Borrelli, 2018).



Εικόνα 5 : «Ο κανόνας της «cathetus» (οπτικό διάγραμμα) για την επίπεδη ανάκλαση (στα αριστερά) και την επίπεδη διάθλαση (στα δεξιά). E = μάτι, O = αντικείμενο; οριζόντια γραμμή = επίπεδο ανάκλασης ή διάθλασης. πλήρης γραμμή = οπτική ακτίνα» (Borrelli, 2018).

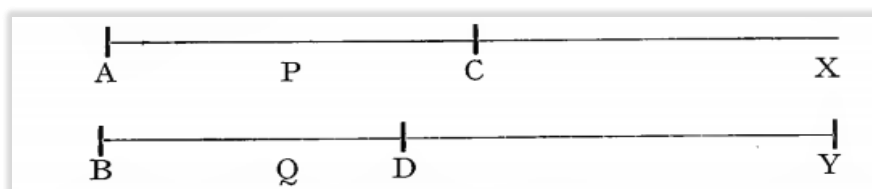
Τον 16^ο αιώνα σημαντική ήταν η προσφορά του Georgius Agricola (1494-1555), ο οποίος αν και δεν ήταν μαθηματικός ή μηχανικός, θεμελίωσε την Γεωλογία ως επιστημονικό κλάδο, δραστηριοποιούμενος αρκετά έτη στην Σαξονία με τις εξορύξεις, τη μεταλλουργία και με την «υπόγεια γεωμετρία». Στηριζόταν σε ομοιότητα τριγώνων και περιγράφει την διαδικασία στο έργο του «De Re Metallica» το 1557 (Morel, 2017). Στα σχέδιά του μπορούμε να δούμε συνδεσμολογίες (linkages) μετατροπής της περιστροφής ενός τροχού νερού σε παλινδρομική κίνηση κατάλληλη για αντλίες εμβόλου. Οι συνδεσμολογίες του είχαν μεγάλες διαστάσεις και χρησιμοποιήθηκαν όχι μόνο για τη μετατροπή κίνησης, αλλά και για τη μετάδοση ενέργειας. Μεγάλες συνδεσμολογίες, κυρίως για εργασίες άντλησης σε ορυχεία, συνέδεαν υδάτινους τροχούς στην όχθη του ποταμού με αντλίες ψηλά στην πλαγιά κάποιου λόφου (εικόνα 6). Μια τέτοια εγκατάσταση (1713) στη Γερμανία είχε μήκος τριών χιλιομέτρων (Taimina, 2007). Οι συνδεσμολογίες άκαμπτων ράβδων αποτελούνταν κυρίως από τέσσερεις ράβδους και

κατέληγαν σε μηχανισμό ολισθητήρα-στρόφαλου. Στην εικόνα 6 περιγράφεται η χρήση μιας συνδεσμολογίας σε πριονιστήριο του 16ου αιώνα. Ο Agricola παρέδωσε σημαντικό έργο στην «Φιλοσοφία ως μέθοδο ανακάλυψης» έχοντας επηρεασθεί από τα ιταλικά ανθρωπιστικά και νεοπλατωνικά κινήματα κατά την δεκαετή διαμονή του στην Ιταλία, επηρεάζοντας αργότερα το φιλοσοφικό έργο του Descartes (Lenoir, 1979).



Εικόνα 6 : «πριονιστήριο 16^{ου} αιώνα από την συλλογή Besson (1595)» & «Γενική αρχή της «geometria subterranea» σύμφωνα με τον Agricola (1556), σ. 90»

Ο John Napier (1550-1617) δημοσίευσε το 1614 την περιγραφή της μεθόδου του λογαριθμικού υπολογισμού όσο και της ίδιας της λέξης λογάριθμου. Η επεξεργασία πινάκων αριθμητικών και γεωμετρικών ακολουθιών του Napier βασίζεται στη σύγκριση των ταχυτήτων δύο κινούμενων σημείων P , Q , (εικόνα 7) όπου το ένα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά στην γραμμή AX και το άλλο κινείται ευθύγραμμα χωρίς σταθερού μέτρου ταχύτητα στην γραμμή BY ¹. Εάν τώρα το C είναι το σημείο στο οποίο έχει φτάσει το P , όταν το Q και έχει φτάσει στο D , απέδειξε ότι ο αριθμός που μετρά το AC είναι ο λογάριθμος του αριθμού που μετρά το DY (Horsburgh, 1914).



Εικόνα 7 : οπτικό διάγραμμα υπολογισμού λογαρίθμων (Horsburgh, 1914)

¹ Η ταχύτητά του σε οποιοδήποτε σημείο έπρεπε να είναι ανάλογη με την απόσταση του κινητού από το τέλος Y της γραμμής κίνησης.

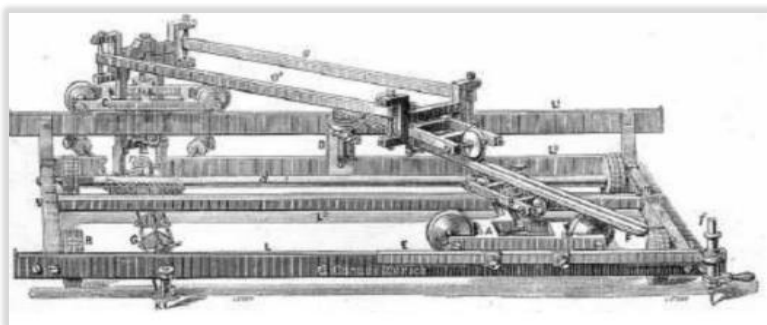
Ο Napier δεν δημοσίευσε ο ίδιος κάτι σχετικά με τη μέθοδο υπολογισμού των λογαρίθμων. Το 1619, μετά το θάνατό του, ο Andrew Hart εξέδωσε την μέθοδο του Napier στο έργο του με τίτλο «*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*», προλογίζοντας ο γιος του Napier (Horsburgh, 1914). Το έργο του Napier αποτελεί βασική προϋπόθεση της σύγχρονης βιομηχανικής ανάπτυξης και επηρέασε ισχυρά την τότε επιστημονική σκέψη. Ο όρος «*slide rule*» (κανόνας ολίσθησης) χρησιμοποιείται ως κανόνας υπολογισμού λογαρίθμων, και ήταν βασική αιτία αξιοποίησης του έργου του Napier (Cajori, 1909). Ο Newton έλυνε την κυβική εξίσωση με την χρήση τριών λογαριθμικών κανόνων. Μεταξύ των ονομάτων που σχετίζονται με την ανάπτυξη των «*slides rules*» είναι οι: Everett, Hannyngton, Thacher, Fuller, Barnard, R. H. Smith, Anderson (εικόνα 8), Proell, Baines, Hudson, Fiirle, Smith-Davis, Maitland και Strachey (Horsburgh, 1914).



Εικόνα 8 : Κανόνας ολίσθησης (slides rule), ευρεσιτεχνίας του F. J. Anderson (Horsburgh, 1914)

Εξέλιξη της μεθόδου Napier μπορούν να θεωρηθούν πολλοί μαθηματικοί μηχανισμοί οι οποίοι παρουσιάστηκαν Ευρωπαϊκή Έκθεση που πραγματοποιήθηκε στο Εδιμβούργο της Σκωτίας από τις 24 Ιουλίου έως τις 27 Ιουλίου 1914, μόλις πέντε ημέρες πριν από την έναρξη του Α' Παγκοσμίου Πολέμου, σηματοδοτώντας την τριακοσιοστή επέτειο από τη δημοσίευση του έργου του Napier «*Mirifici logarithmorum Canonis Descriptio*» κατά το έτος 1614. Η Έκθεση περιελάμβανε κατασκευαστές από τη Σκωτία, την Αγγλία, τη Γαλλία και τη Γερμανία και είχε σκοπό να πραγματοποιηθεί και συνέδριο για τα υπολογιστικά Μαθηματικά. Ως εορτασμός του κομβικού ρόλου του Napier στην ιστορία των υπολογισμών, η έκθεση περιείχε πολλές και διαφορετικών τύπων υπολογιστικές μηχανές, καθώς και άλλα υπολογιστικά βοηθήματα όπως μαθηματικούς πίνακες, άβακες και κανόνες ολίσθησης, ολοκληρωτικογράφους και εμβαδόμετρα. Στο εγχειρίδιο αυτής της Έκθεσης αυτής αναφέρεται πως ο 1878 ο μαθηματικός και μηχανικός Bruno Abdank-Abakanowicz (1852-1900), εφηύρε τον ολοκληρωτικογράφο που είναι μια επεξεργασία και επέκταση του επιπεδόμετρου, ενός παλαιότερου, απλούστερου οργάνου που χρησιμοποιούνταν για εμβαδομέτρηση (εικόνα 9). Είναι ένα μηχανικό όργανο ικανό να εξάγει την ολοκληρωτική καμπύλη που αντιστοιχεί σε μια δεδομένη καμπύλη. Ως εκ τούτου, είναι ικανό να επιλύει

γραφικά μια απλή διαφορική εξίσωση². Τέθηκε σε παραγωγή από την ελβετική εταιρεία Coradi στη Ζυρίχη (Abakanowicz, 1886).



Εικόνα 9: «ολοκληρωτικογράφος σχεδιάστηκε από τον Abdank-Abakanowicz και παρήχθη από την εταιρεία Coradi» <https://www.historyofinformation.com/detail.php?id=1267>

Η ανίχνευση της ιστορίας των «μαθηματικών οργάνων» στην πρώιμη νεώτερη περίοδο (16^{ος} έως 18^{ος} αιώνας) θεωρείται σημαντική. Το μαθηματικό όργανο (mathematical instrument) ήταν σαφώς καθορισμένη κατηγορία μηχανισμών όδευσης, ανεξάρτητη από άλλες κατηγορίες συσκευών (apparatus), σε μια περίοδο όπου ο όρος «επιστημονικό όργανο» δεν ήταν καθιερωμένος. Εμφανίσθηκαν σε μεγάλο βαθμό όργανα τοπογραφικά, αστρονομικά, σκοπευτικά, ηλιακά ρολόγια και χρονόμετρα για την τοπογραφία, όπου η ομοιότητα τριγώνων και οι αναλογίες εφαρμόστηκαν στη χαρτογράφηση, στις οχυρώσεις πόλεων και στην βαλλιστική (εικόνα 10). Στο μουσείο Galileo στην Φλωρεντία υπάρχουν σχετικά εκθέματα (Bennett, 2017).



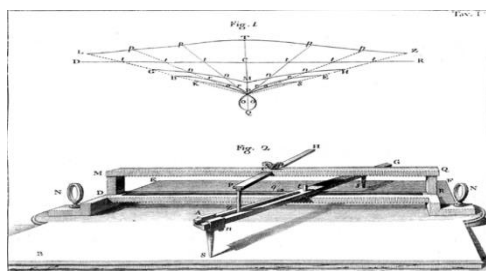
Εικόνα 10 : Θεοδόλιχος αζιμουθίου του Baldassarre Lanci (1557) & διαβήτη μείωσης (αγνώστου κατασκευαστή) με κινούμενο κέντρο για μείωση των μετρήσεων κατά συντελεστή. Μουσείο Galileo στη Φλωρεντία.

Η κυρίαρχη λογική των οργάνων μέχρι το τέλος του δέκατου έβδομου αιώνα αυτοχαρακτηριζόταν ως «μαθηματική». Ο «γεωμετρικός και στρατιωτικός διαβήτη» του

² Η μαθηματική μηχανή του Abakanowicz μπορούσε να λύνει διαφορικές εξισώσεις της μορφής $\frac{dy}{dx} = F(x)$ και έτσι $y = \int F(x)dx$. Η βασική προσέγγιση ήταν να σχεδιαστεί μια γραφική παράσταση της συνάρτησης F και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί ο δείκτης της συσκευής για να εντοπιστεί το περίγραμμα της συνάρτησης.

Galileo (1564-1642) είναι η πιο γνωστή από μια σειρά τέτοιων οργάνων, όπου εκτός από τους πυροβολητές τον χρησιμοποιούσαν οι τοπογράφοι, οι αρχιτέκτονες και οι μαραγκοί στον σχεδιασμό με κλίμακα, αλλά και για εμβαδομέτρηση ή ογκομέτρηση. Η έννοια του λογαρίθμου που είχε εφευρεθεί από τον John Napier, και η ταχεία εφαρμογή της στον «κανόνα» του Edmund Gunter (1581-1626) και στους «κύκλους» του William Oughtred (1574-1660) δείχνει τη συνεχιζόμενη σημασία του ρόλου που διαδραματίζουν τα όργανα για τα Μαθηματικά και όχι μόνο το αντίστροφο (Bennett, 2011).

Οι ιστορικοί των οργάνων μελετούν κυρίως όργανα οπτικής ή μεταφοράς ενέργειας, αλλά δεν πρέπει να παραμεληθεί η μελέτη των μαθηματικών οργάνων και μηχανισμών. Σύμφωνα με τον Bennet (2011) χωρίς την κατανόηση αυτής της κατηγορίας κατά την περίοδο τους, δεν μπορούν να εκτιμηθούν σωστά οι πτυχές των οργάνων και των μηχανισμών. Τα μαθηματικά όργανα και οι μαθηματικοί μηχανισμοί έχουν πολύ μεγαλύτερη ιστορία από τα οπτικά όργανα και τους μηχανισμούς μετάδοσης και μετατροπής ενέργειας. Συμβάλλουν στη κατασκευή μηχανών, αλλά αυτοί οι καθιέρωσαν την έννοια του «επιστημονικού οργάνου» (Bennet, 2011). Τα ακαδημαϊκά Μαθηματικά προωθούνταν κυρίως από άτομα με πανεπιστημιακή κατάρτιση, που ήξεραν Λατινικά και αρχαία Ελληνικά, που είχαν επίσης ρητορική και μεθοδολογική κατάρτιση. Οι κατασκευαστές οργάνων δεν είχαν τέτοια εκπαίδευση αλλά είχαν πρόσβαση σε μια κάποια μαθηματική παράδοση, που τους επέτρεπε να σκέφτονται συχνά τις ίδιες ερωτήσεις και προβλήματα με τους μαθηματικούς. Υπήρχε αλληλεπίδραση μεταξύ εκείνων που συναρμολογούσαν μηχανισμούς και εκείνων που εστίαζαν στις μαθηματικές ιδιότητες που εμπεριέχουν (Gessner, Hashagen, Pfeiffer, Tournès, 2018). Τα μαθηματικά όργανα αρχικά εθεωρούντο «ιδανικές» μηχανές» αποτυπωμένα σε οπτικά διαγράμματα, όπως οι μηχανικές συνδεσμολογίες (linkages) που σχεδιάστηκαν από τον Cavalieri, τον Descartes ή οι ελκτικοί ολοκληρωτικογράφοι (tractrix) των Descartes & Beaune, Perrault, Huygens, Leibnitz, Poleni, Riccati και Suardi (εικόνα 11). Σχεδιάστηκαν ως μέσα «ακρίβειας» των κατασκευών και νομιμοποίησης νέων καμπυλών για περαιτέρω γεωμετρικές κατασκευές.

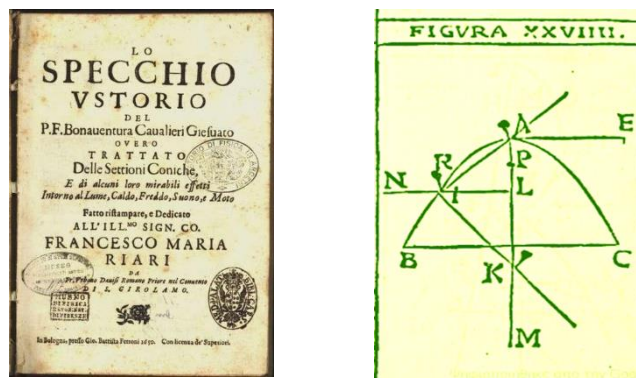


Εικόνα 11 : Μαθηματικές μηχανές του Suardi (α) χάραξης κογχοειδούς καμπύλης του Νικομήδη (drawingmachines.org) και χάραξης μεγάλης ποικιλίας καμπυλών (κατάλογος από Μουσείο Galileo).

Εστιάζοντας στην ιστορία των γεωμετρικών κατασκευών και των αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά του 16^{ου} και του 17^{ου} αιώνα, παρατηρούνται δύο ελαφρώς επικαλυπτόμενες περίοδοι: (α) η περίοδος από το 1530 έως το 1650, και (β) από το 1635 έως το 1750 (Bos, 2001). Κατά την πρώτη περίοδο, οι ερωτήσεις σχετικά με την κατασκευή προέκυπταν κυρίως σε σχέση με γεωμετρικά προβλήματα που απαιτούσαν να κατασκευαστεί ένα σημείο ή ένα τμήμα γραμμής και τα οποία επιδέχονταν μια ή το πολύ πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Εάν αυτά τα προβλήματα μεταφράζονταν σε άλγεβρα, οδηγούσαν σε εξισώσεις με έναν άγνωστο. Η «Γεωμετρία» του Descartes το 1637 αντλούσε τη δομή της από την πρώιμη παράδοση της επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων, και δυο βασικά ζητήματα ήταν (α) η επιλογή κατάλληλων μέσων για τις γεωμετρικές κατασκευές και (β) η χρήση της Άλγεβρας για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Στην δεύτερη περίοδο, οι ερωτήσεις σχετικά με τις κατασκευές και τις αναπαραστάσεις αφορούσαν κυρίως τετραγωνισμούς και αντίστροφα εφαπτομενικά προβλήματα. Γενικά, και στις δύο περιόδους, απαιτείτο να κατασκευαστεί γεωμετρικά μια καμπύλη, και όταν μεταφράζονταν σε άλγεβρα οδηγούσαν σε εξισώσεις με δύο άγνωστους, είτε απλές, είτε διαφορικές εξισώσεις (Bos, 2001, σελ.9).

Ο Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) ήταν Ιταλός Ιησουάτης μαθηματικός, γνωστός για την ενασχόληση του με προβλήματα Οπτικής και Κίνησης καθώς και για την «αρχή του Cavalieri» και την έννοια των «αδιαίρετων» (indivisibles) που απετέλεσαν πρόδρομο του ολοκληρωτικού λογισμού. Στο πρώτο βιβλίο του με τίτλο *«Lo specchio vstorio, overo, Trattato delle settioni coniche, et alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora»*, μελέτησε τα κάτοπτρα επηρεασμένος από το σχετικό έργο του Αρχιμήδη (Cavalieri, 1632). Διατύπωσε την ιδέα της κατασκευής ενός τηλεσκοπίου με τη χρήση κατόπτρων επιτυγχάνοντας την εφεύρεση του ανακλαστικού τηλεσκοπίου νωρίτερα από τον James Gregory (1638 –1675) και τον Isaac Newton (1642-1727) (Ariotti, 1975). Επίσης περιέγραψε επίπεδα και στερεά όργανα για την χάραξη κωνικών τομών όπως τον τέλειο διαβήτη (perfect compass) που είχε προηγουμένως περιγράψει και ο Barozzi, ο οποίος ήταν ένας τρισδιάστατος κωνικογράφος.

Περιγράφει τον επίπεδο παραβολογράφο του στο κεφάλαιο «Κωνικές τομές, παράγραφο XLV, σελ. 187 και με τίτλο *«Come si descriua la Parabola, mediante gl' iβrumenti sodi, composti diregoli, cb'è il secondo modo dell' inuention piana vera* (πως περιγράφεται η παραβολική καμπύλη μέσω οργάνων, τα οποία αποτελούνται από κανόνες) (εικόνα 12).



Εικόνα 12 : Οπτικό διάγραμμα του παραβολογράφου (Cavalieri, 1632) & <https://www.geogebra.org/m/dueqra5t>.

Η ιδέα της κατασκευής του μηχανισμού του πηγάζει από την Πρόταση II.14 των Στοιχείων η οποία αφορά τον τετραγωνισμό ενός επίπεδου ευθυγράμμου σχήματος ή από την Πρόταση VI.8 των Στοιχείων η οποία αφορά μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., 2001).) Ο Cavalieri στο έργο του αυτό παρομοιάζει τα δύο άκαμπτα και ορθογώνια μέλη του μηχανισμού ως Λ (λάμδα), και υπονοεί ότι ο μηχανισμός αυτός βασίζεται σε εφεύρεση του μαθηματικού και μηχανικού Ισίδωρου του Μιλήσιου (442- 537 μ.Χ.) (Παράρτημα [1]).

Την πρώτη περίοδο 1530-1650 η οποία κλείνει με τον θάνατο του Descartes, λόγω των νέων αλγεβρικών τεχνικών, διατυπώθηκαν προβληματισμοί σχετικά με την ανάλυση και την σύνθεση γεωμετρικών προβλημάτων κυρίως από τους Viète, van Ceulen, Clavius, Mersenne, Fermat και Descartes (Boss, 2001). Κατά το μεγαλύτερο μέρος του δέκατου έβδομου αιώνα, η Γεωμετρία ήταν η κυρίαρχη μορφή της μαθηματικής σκέψης (Cajori, 1894). Για την ανάλυση και ταξινόμηση των γεωμετρικών προβλημάτων, χρησιμοποιήθηκαν και αλγεβρικές μέθοδοι σε μία περίοδο όπου η Γεωμετρία βοηθούσε στην ανάπτυξη της Άλγεβρας και λόγω της έλλειψης αλγεβρικών συμβόλων (π.χ. η στερεομετρική απόδειξη ταυτοτήτων από τον Cardano). Επαναπροσδιορίστηκαν οι αλγεβρικές πράξεις σε περίοδο όπου ο αριθμός δεν ήταν μέγεθος (Bos, 2001).

Ο Rene Descartes (1596-1650) επηρεάστηκε από το φιλοσοφικό έργο του μηχανικού και νεοπλατωνιστή Rudolf Agricola (1444-1485) που ήταν γνωστός και για την κατασκευή συνδεσμολογιών (linkages) εργοστασιακής κλίμακας στην Σαξονία,. Επηρεάστηκε επίσης και από το έργο του φιλοσόφου Petrus Ramus (1515-1578) ο οποίος ανήκε στο κίνημα για την μεταρρύθμιση της Αριστοτελικής λογικής, η οποία έως τότε δεν έδινε «ευρετικά εργαλεία». Ο Descartes χρησιμοποίησε τους Αριστοτελικούς «τόπους» δομημένους από τα «σωματίδια» γνώσης του Ramus και με πλατωνική διαλεκτική προσπαθούσε να κατασκευάσει μία μεθοδική συλλογιστική εύρεσης της «αλήθειας» στηριζόμενος και στις μεθόδους «μνήμης» του Κικέρωνα (Lenoir, 1979). Θεωρούσε τις σχέσεις μεταξύ των «πραγμάτων» ως σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών μεγεθών χρησιμοποιώντας το απλούστερο μέγεθος που είναι το ευθύγραμμο τμήμα (Descartes, 1629) και οδήγησε στην «γεωμετρικοποίηση της σκέψης»

(Lenoir, 1979). Λόγω προβλημάτων που έχει η μνήμη και για την αποφυγή λαθών σε μακρές αλυσίδες συμπερασμάτων, θεωρούσε πως έπρεπε να αναπτυχθούν τεχνικές απαρίθμησης και αποθήκευσης οι οποίες θα διατηρούσαν την διάταξή τους και ως τέτοιο μέσο χρησιμοποίησε την Άλγεβρα, καθώς και τις συνδεσμολογίες άκαμπτων ράβδων (linkages) (Lenoir, 1979).

Είχε επηρεασθεί και από το έργο του μαθηματικού Christoph Clavius (1537-1612) ο οποίος χρησιμοποίησε μη Ευκλείδειες διαδικασίες χάραξης καμπυλών (Bos, 2001). Θεωρούσε ότι η κατανόηση της σχέσης μεταξύ των «πραγμάτων» δημιουργεί σχετική γνώση και πως έπρεπε να δημιουργηθεί μία «καθολική μέθοδος-επιστήμη» με σκοπό την επίτευξη της βεβαιότητας (Lenoir, 1979).

Το 1637 δημοσίευσε στην γαλλική γλώσσα την «Γεωμετρία» του, ως παράρτημα της «Μεθόδου» του, ορίζοντας την δική του αναλυτικο-συνθετική μέθοδο για γεωμετρικά προβλήματα που αναπαριστώνται από πολυωνμικές εξισώσεις μέχρι έκτου βαθμού. Έχοντας περιγράψει και αιτιολογήσει την «ακρίβεια» (exactness) των κατασκευών του, οριοθέτησε τις αποδεκτές καμπύλες από τον τρόπο χάραξής. Επέτρεψε στη συνέχεια τη χρήση αυτών των καμπυλών για επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Μελέτησε το «πρόβλημα του Πάππου», το οποίο έλυσε με τη βοήθεια κωνικών τομών, πραγματοποιώντας τις αντίστοιχες γεωμετρικές κατασκευές. Ταξινόμησε τα γεωμετρικά προβλήματα στα πρότυπα του Πάππου (Bos, 1984) .

Δεν δούλεψε με ομογενείς εξισώσεις όπως ο Viète, και χρησιμοποίησε δικό του αλγεβρικό συμβολισμό. Έχοντας επηρεασθεί από το έργο του Ludolph van Ceulen (1540-1610) εισήγαγε την μονάδα στις κατασκευές του. Οι ιδέες του συμπυκνώθηκαν στο κατασκευαστικό του πρόγραμμα, που ήταν ένα μία «πλατφόρμα» αναπτυσσόμενη από τον ίδιο αλλά και από άλλους μαθηματικούς. Δέχτηκε περισσότερες καμπύλες ως μέσα κατασκευής από αυτές που ο Πάππος είχε εισάγει. Δεν κατασκεύασε καμμία καμπύλη από την αλγεβρική της εξίσωση (Bos, 2001). Το έργο του ήταν αφιερωμένο στη χάραξη καμπυλών με συνδεσμολογίες άκαμπτων ράβδων (linkages) και εισάγοντας στη συνέχεια κατάλληλο σύστημα αξόνων. Θέλησε να επεκτείνει το ρεπερτόριο των επιτρεπόμενων καμπυλών, εκτός από τη ευθεία και τον κύκλο, συμπεριλαμβάνοντας καμπύλες των οποίων η κατασκευή ήταν «σαφής και διακριτή» (Lenoir, 1979). Αυτό σήμαινε καμπύλες που μπορούσαν να σχεδιαστούν από μια συνδεσμολογία ράβδων (linkage) ενός βαθμού ελευθερίας και να ταξινομηθούν σύμφωνα με τον αλγεβρικό βαθμό τους. Αυτές τις καμπύλες ονόμασε «γεωμετρικές» και όλες τις άλλες «μηχανικές». Αυτή η διάκριση είναι ισοδύναμη με εκείνη που ο Leibniz χαρακτήρισε «αλγεβρικές» και «υπερβατικές» αντιστοίχως. Ο Descartes έβλεπε τις «μηχανικές» καμπύλες ως συνδυασμό ασύμβατων ενεργειών (incommensurable actions) οι οποίες δεν μπορούσαν να συγκριθούν με κοινό πρότυπο μέτρησης. Όλες αυτές οι

καμπύλες είχαν ένα συνδυασμό περιστροφικής και γραμμικής κίνησης, δηλαδή δυο ξεχωριστές κινήσεις που δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν από μια συνεχή κίνηση μίας συνδεσμολογίας (linkage), και τις απέκλεισε από την Γεωμετρία.

Η μεθοδολογία του Descartes θα μπορούσε να περιγραφεί ως εξής: Οι καμπύλες κατασκευάστηκαν από γεωμετρικές ενέργειες, πολλές από τις οποίες αναπαραστάθηκαν μέσω μηχανικών συσκευών. Αφού σχεδιάστηκαν οι καμπύλες, εισήχθη κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και αναλύθηκαν οι ενέργειες σχεδίασης καταλήγοντας σε μια εξίσωση που την αναπαριστούσε αλγεβρικά. Οι εξισώσεις δεν δημιούργησαν τις καμπύλες αλλά οι καμπύλες προκάλεσαν εξισώσεις. (Dennis 1997, σελ.164). Στόχος της «Γεωμετρίας» του ήταν η κατασκευή λύσεων μέσω καμπυλών που χαράσσονται από όργανα, αν και γνώριζε πλέον την δύναμη των αλγεβρικών μεθόδων (Dennis 1997). Οι μόνες αποδεκτές αλγεβρικές εξισώσεις στη γεωμετρία ήταν όσες μπορούσαν να προέλθουν από γεωμετρική κατασκευή μέσω μίας συνεχούς κίνησης. Έτσι οι κωνικές τομές ήταν «κατάλληλα εργαλεία» γεωμετρικών κατασκευών, λόγω χάραξής των από μαθηματικούς μηχανισμούς (linkages) ενός βαθμού ελευθερίας.

Ο ρόλος της Άλγεβρας στη ανάλυση του Descartes, ήταν η απλοποίηση της επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων, που απαιτούσαν δύσκολες κατασκευές. Από αυτή την άποψη η Άλγεβρα δεν λειτουργούσε ως μέσο διερεύνησης της δομικής σχέσης των πραγμάτων, αλλά χρησίμευε ως το μέσο για την εύκολη αποθήκευση και γρήγορη ανάκτηση πληροφοριών σχετικά με τις γεωμετρικές κατασκευές (Lenoir, 1979, σελ. 363). Οι γεωμετρικές καμπύλες υπήρχαν πριν από την εισαγωγή κάποιου συστήματος συντεταγμένων και μία αυθαίρετη αλγεβρική εξίσωση, η οποία δεν συνδέεται με κάποιον μηχανισμό σχεδίασης, δεν είχε αξία για αυτόν (Lenoir, 1979).

Έπρεπε οι «νέοι διαβήτες» του να χαράσσουν μέσω μίας συνεχούς κίνησης και οι καμπύλες που προέκυπταν ήταν αποδεκτές, εάν ο λόγος των ταχυτήτων των κινήσεων ήταν ρητός αριθμός. Έτσι απέρριψε την «τετραγωνίζουσα» και τη «σπείρα» γιατί, όπως υποστήριζε, παράγονται από συνδυασμό ευθύγραμμων και κυκλικών κινήσεων και ο λόγος των ταχυτήτων συνεπάγεται το λόγο της περιφέρειας προς την διάμετρο του κύκλου τον οποίο θεωρούσε πως δεν ήταν γνωστός. Επίσης απέρριψε και την λογαριθμική καμπύλη που προέκυψε από κάποιο αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα που του έθεσε ο Florimond de Beaune (1601-1652) μέσω του Mersenne. Το πρόβλημα αφορούσε κατασκευή καμπύλης, σε πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων, όπου οι λόγοι των υποεφαπτομένων (subtangents) προς τις τεταγμένες (ordinates) είναι πάντοτε ίσοι με τον λόγο των τεταγμένων προς ένα σταθερό τμήμα, δηλαδή ένα είδος λογαριθμικής καμπύλης, και ισοδυναμούσε με διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (Lenoir, 1979). Ο Descartes δημιούργησε μια μέθοδο «σημειακής

προσέγγισης» αυτής της καμπύλης και παρουσίασε μια λεπτομερή μελέτη για το πώς θα μπορούσε να σχεδιαστεί η καμπύλη από ένα συνδυασμό κινήσεων με συγκεκριμένη ανάπτυξη των ταχυτήτων (**Παράρτημα [2]**). Καθόρισε σωστά την καμπύλη, αλλά την απέκλεισε από τη γεωμετρία, θεωρώντας ότι θα μπορούσε να την κατασκευάσει μόνο μηχανικά και προσεγγιστικά (Cippra & Milici, 2019). Με αυτό το πρόβλημα είχε πλέον ανοίξει ο δρόμος για την συστηματική μελέτη του «αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος»³. Το πρόβλημα της εύρεσης των ιδιοτήτων της εφαπτομένης σε μια δεδομένη καμπύλη είναι ένα κλασσικό Ελληνικό πρόβλημα αλλά τον 17^ο αιώνα διατυπώθηκε και εξετάστηκε το αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα. Η βάση της κατασκευής αυτών των καμπυλών είναι η Καρτεσιανή λογική αντιμετώπισης γεωμετρικών προβλημάτων με την εισαγωγή μηχανισμών που θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως ένας συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους διαβητών.

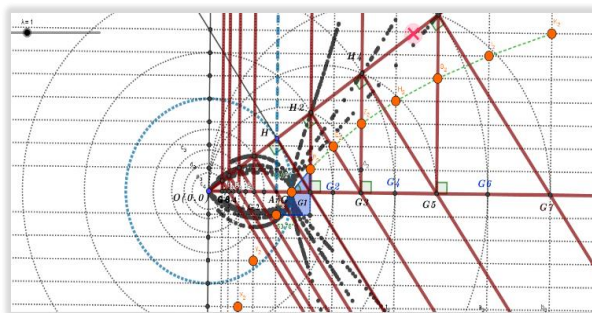
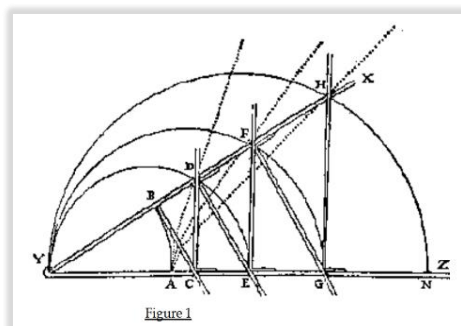
Μέσα από αλγεβρικούς υπολογισμούς συμπέρανε ότι οι γεωμετρικές καμπύλες αναπαρίστανται από αλγεβρικές εξισώσεις⁴ σε σύστημα ευθύγραμμων συντεταγμένων. Δηλαδή, όταν μια καμπύλη αναπαρίστατο από μία πολυωνυμική εξίσωση, τότε μπορούσε να προκύψει από συνδυασμό κινήσεων, οι οποίες είναι αποδεκτές και για αυτό και η καμπύλη αυτή ήταν αποδεκτή ως μέσο περαιτέρω γεωμετρικών κατασκευών. Στο πρώτο μέρος της «Μεθόδου» του, ο Descartes αναπαριστά αλγεβρικά το γεωμετρικό πρόβλημα. Τα άγνωστα ευθύγραμμα τμήματα αναπαριστώνται με $x, y, \dots$, και τα γνωστά με $a, b, \dots$, τα δεδομένα και οι ζητούμενες σχέσεις μεταξύ αυτών των τμημάτων εκφράζονται με πολυωνυμικές εξισώσεις. Τελικά προκύπτει σύστημα εξισώσεων όπου κάποιοι άγνωστοι απαλείφονται καταλήγοντας σε εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο. Σε αυτό το στάδιο της διαδικασίας υπεισέρχεται η κατασκευή της εξίσωσης. Η εξίσωση πρέπει να επιλυθεί, αλλά μια αλγεβρική λύση δεν είναι ικανοποιητική. Για παράδειγμα, η εύρεση δύο μέσων αναλόγων x και y μεταξύ δύο δοθέντων τμημάτων μήκους α, β οδηγεί στην εξίσωση $x^3 = \alpha^2 \beta$ που μπορεί να λυθεί αλγεβρικά $x = \sqrt[3]{\alpha^2 \beta}$. Όμως η λύση δεν είναι ικανοποιητική για το γεωμετρικό πρόβλημα όταν δεν μας δίνεται τρόπος για να κατασκευαστεί γεωμετρικά το τμήμα x . Αυτό που χρειαζόμαστε τότε είναι μια διαδικασία για την γεωμετρική κατασκευή των ριζών της εξίσωσης. Ο Descartes παρέδωσε μια θεωρία επίλυσης των εξισώσεων με αλγεβρικές καμπύλες ελάχιστου δυνατού βαθμού. Αν ο βαθμός της εξίσωσης είναι ένα ή δύο, τότε οι ρίζες τους μπορούν να κατασκευαστούν με ευθεία και κύκλο. Αν ο βαθμός της εξίσωσης είναι τρία ή τέσσερα, μπορούν να κατασκευαστούν με κύκλο και παραβολή (**Παράρτημα**

³ «δοθείσης της εφαπτομένης ευθείας μιας άγνωστης καμπύλης να προσδιορισθεί και να χαραχθεί η εν λόγω καμπύλη».

⁴ Αλγεβρική εξίσωση (algebraic equation) ή πολυωνυμική εξίσωση (polynomial equation) είναι μια εξίσωση της μορφής $P = Q$ όπου P και Q είναι πολυώνυμα με συντελεστές που ανήκουν σε κάποιο «σώμα».

[3]). Οι κατασκευές εξισώσεων βαθμού 3^{ου} έως 6^{ου} διαπραγματεύονται στο τρίτο και τελευταίο βιβλίο της «Γεωμετρίας». Όμως δεν κατάφερε να περιγράψει έναν γενικό τρόπο γεωμετρικής κατασκευής καμπύλων που αντιστοιχούν σε κάθε αλγεβρική εξίσωση όπως αργότερα κατάφερε ο Kempe το 1870 και τελειοποίησε ο Artobolevskii το 1964 (Bos, 2001).

Ο Descartes περιέγραψε επίσης μία συνδεσμολογία άκαμπτων ράβδων (Mesolabe) όπου οι καμπύλες χαράσσονται με μία ενιαία συνεχή κίνηση. Ειδικότερα, με διαδοχικές κινήσεις όπου κάθε μία από αυτές καθορίζεται πλήρως από την προηγούμενη κίνηση και μπορούσε πλέον να τοποθετηθεί αυθαίρετος αριθμός γεωμετρικών μέσων μεταξύ οποιωνδήποτε δύο μηκών (Lenoir, 1979). Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ιδανικό μαθηματικό μηχανισμό και σε συνδυασμό με την αντίληψη των λογαρίθμων του Napier (ως συμμεταβολή μεταξύ γεωμετρικών και αριθμητικών προόδων) επιτρέπεται να εκτελεστούν, γεωμετρικά πλέον, οι υπολογισμοί του Napier και άλλων κατασκευαστών πινάκων του 16^{ου} και του 17^{ου} αιώνα (εικόνα 13). Οι γεωμετρικές ακολουθίες μπορούν να κατασκευαστούν απεριορίστως πυκνά, και να αντιστοιχούν με οποιαδήποτε αριθμητική ακολουθία. Επίσης κατασκευάζονται απεριορίστως πυκνά σύνολα σημείων οποιαδήποτε λογαριθμικής καμπύλης.



Εικόνα 13: «οπτικό διάγραμμα του mesolabe, Descartes “Geometrie” 1637, p.317-318» & προσομοίωση του μηχανισμού μέσω λογισμικού Geogebra» <https://www.geogebra.org/m/htj5nt4d>

Η κινηματική χάραξη καμπυλών ήταν βασικό συστατικό του γεωμετρικού δόγματος του Descartes από προτεινόμενα κινηματικά μοντέλα, αλλά δεν αποτελούσε στον ίδιο κίνητρο για να κατασκευασθούν τα συγκεκριμένα όργανα χάραξης των.

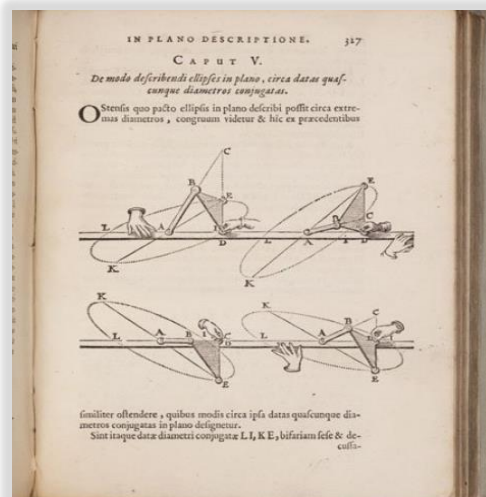
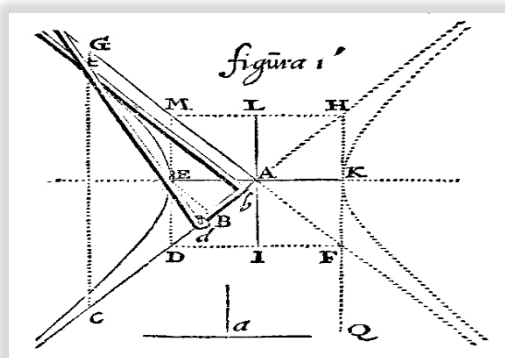
Σημαντικός συνεργάτης του υπήρξε ο μαθηματικός, μηχανικός και ζωγράφος Frans van Schooten (1615-1660). Σπούδασε μαθηματικά και μηχανολογία στη Σχολή Μηχανικών του Leiden υπό τον Ludolph van Ceulen (1540-1610). Το 1632 ως φοιτητής συναντήθηκε με τον Descartes, ο οποίος έζησε για είκοσι έτη στην Ολλανδία όπου και δημιούργησε το περισσότερο έργο του. Καταλυτική ήταν και η συνεργασία του το 1641 με τον Marin Mersenne (1588-1648) και μελέτησε το έργο των Viète & Fermat καθώς μελετούσε τον Descartes. Ο van Schooten διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στη διάδοση των νέων

μαθηματικών μεθόδων του Descartes και το έπραξε δημοσιεύοντας μια Λατινική μετάφραση της «Γεωμετρίας» του το 1649 αναλύοντας την σπουδαιότητα των κατασκευών του καθώς και με την επισύναψη σχετικών δικών του σχολίων, καθώς και των Florimond de Beaune (1601-1652), Jan de Witt (1625-1672), Henrik van Heuraet (1633-1660) και Johannes Hudde (1628-1704). Με την παρουσίαση μιας δεύτερης έκδοσης το 1659, αναλύθηκε μεθοδικά η κατασκευή των εξισώσεων 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού και η τεχνική των «προσδιοριστέων συντελεστών» (Suzuki, 2005) (**Παράρτημα [4]**). Την περίοδο από το 1650 μέχρι το 1690 η «κατασκευή των εξισώσεων» αναπτύχθηκε σε συνεκτική θεωρία και, εκτός από την «Geometrie» του Descartes, είχαν πολύτιμη συνεισφορά οι δύο εκδόσεις του «Mesolabum» (1659 και 1668) του Rene-Francois de Sluse (1622-1685) καθώς και το «Nouveaux Elements» (1679) του Philippe de La Hire (1640-1718) (Suzuki, 2005).

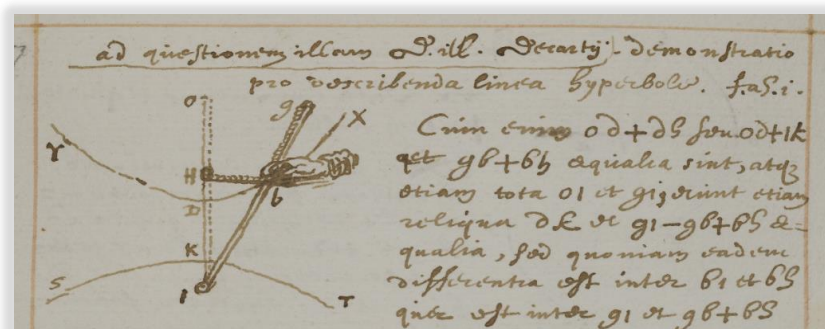
Ο Frans van Schooten στην πραγματεία του «*De organica conicarum sectionum in plano descriptione*» (1646), συσχετίζει τα αποτελέσματα της κλασσικής Ελληνικής θεωρίας για τις κωνικές τομές με τις δικές του ιδέες για τη κινηματική χάραξη καμπυλών και περιγράφει την κατασκευή αντιστοίχων οργάνων (Dorper, 2014). Το έργο του ήταν διττό: Κατ' αρχήν, η συστηματική αντιμετώπιση του ερωτήματος της ακριβούς χάραξης των κωνικών τομών. Για τον ίδιο δεν είναι ικανοποιητικό να χρησιμοποιηθεί ο τρισδιάστατος ορισμός του Μέναιχμου και του Απολλώνιου, ως τομή ενός κώνου και επίπεδο. Χαρακτηριστικά αναφέρεται το «*van Schooten's Locus Problem*» (Wetzel, 2010. Dorrie, 2013) (**Παράρτημα [5]**). Το δεύτερο κίνητρο ήταν πρακτικό. Η βαθύτερη κατανόηση των κωνικών τομών ήταν χρήσιμη σε πιο πρακτικούς κλάδους των μαθηματικών οργάνων, όπως στην μελέτη και κατασκευή διοπτρών και κατόπτρων. Ένας τέλειος φακός έπρεπε να έχει παραβολική, ελλειπτική ή υπερβολική επιφάνεια και η παραγωγή τους απαιτούσε πραγματικό και ακριβή σχεδιασμό των αντιστοίχων κωνικών τομών αλλά και σωστή λείανση των κρυστάλλων. Ο van Schooten μελέτησε την κατασκευή εργαλείων για τον ακριβή σχεδιασμό κωνικών τομών, δραστηριότητα που την ταξινόμησε ως μέρος της «*Μηχανικής*» του για να τη διακρίνει από τα «*Μαθηματικά*» του (Dorper, 2014). Η δομή της πραγματείας του αντικατοπτρίζει τη «διχογνωμία» μεταξύ της κίνησης ως νοητική δραστηριότητα για τη σωστή περιγραφή των κωνικών τομών και τον πραγματικό σχεδιασμό και κατασκευή εργαλείων για την χάραξη τους και την κατασκευή τρισδιάστατων φακών και κατόπτρων. Στα τέσσερα πρώτα θεωρητικά κεφάλαια του έργου περιγράφεται ο σχεδιασμός ιδανικών καμπυλών. Ο van Schooten δείχνει ότι οι καμπύλες που παράγονται από όργανα και ικανοποιούν τις ιδιότητες που απέδειξε ο Απολλώνιος. Έτσι τα τέσσερα πρώτα κεφάλαια αποτελούν την θεωρητική βάση των δέκα επόμενων πρακτικών κεφαλαίων και αφορούν την κατασκευή σχετικών εργαλείων και τον τρόπο χρήσης τους. Δίνονται λεπτομέρειες για τον τρόπο κατασκευής των

οργάνων, τα υλικά που πρέπει να χρησιμοποιηθούν και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί γίνεται η «μεταφορά της κίνησης» από το ένα μέρος του οργάνου στο άλλο.

Η διπλή διάσταση του έργου του φαίνεται και από τους τίτλους των κεφαλαίων καθώς και στα επισυναπτόμενα σχέδια και εικόνες. Οι τίτλοι των «θεωρητικών» κεφαλαίων είναι του τύπου: «Στις ελλείψεις που περιγράφονται από τις εμπλεκόμενες κινήσεις», ενώ τα «πρακτικά» κεφάλαια φέρουν τίτλους όπως «Σχετικά με τον τρόπο περιγραφής των ελλείψεων» (Dijksterhuis, 2011). Οι εικόνες των κινήσεων στα θεωρητικά κεφάλαια απεικονίζονται με «στυλιζαρισμένο» τρόπο, ενώ στα κεφάλαια της κατασκευής οργάνων και χάραξης καμπυλών απεικονίζονται τα μαθηματικά όργανα με κάποια «μικρά χέρια» που δείχνουν τη λειτουργία τους (εικόνες 14 & 15).



Εικόνα 14: «στυλιζαρισμένη κατασκευή υπερβολής (Schooten, 1646) & «ο van Schooten επιδεικνύει τη χρήση συνδεσμολογιών άκαμπτων ράβδων για την χάραξη ελλείψεων (Schooten, 1646)»



Εικόνα 15: «περιγραφή χάραξης υπερβολής με σχέδιο και κείμενο του van Schooten (1646)»

Ο van Schooten συμπεριέλαβε επίσης ως παράρτημα ένα κείμενο του σχετικό με την έννοια των πιθανοτήτων, το οποίο ξαναγράφηκε από τον Christiaan Huygens (1629-1695), ο οποίος επίσης ήταν φοιτητής και μετέπειτα συνεργάτης του. Το έργο του van Schooten μελετήθηκε και από τον Isaac Newton (1643-1727) όταν φοιτούσε στο Πανεπιστήμιο του

Cambridge, και τον βοήθησε στην εισαγωγή του στα σύγχρονα Μαθηματικά της εποχής (Dopper, 2014). Ο van Schooten διέθετε σημαντική κατάρτιση στα Μαθηματικά και στην Μηχανολογία, τόσο της εποχής του όσο και των προηγούμενων περιόδων. Ήταν εργατικός και ευσυνείδητος μελετητής, εμπνευσμένος δάσκαλος, και ανιδιοτελής. Έχοντας εμπιστοσύνη στην προσωπικότητα και τις ιδέες του Descartes, εργάστηκε σκληρά για να τις διαδώσει (Hofmann, 1962).

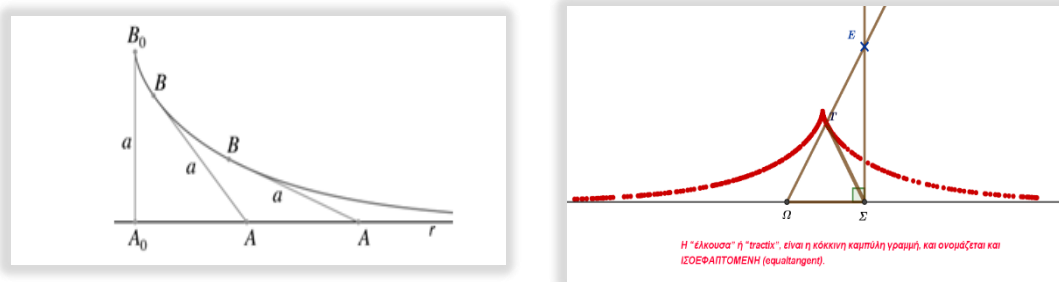
Οι μαθηματικοί μελετώντας το «πρόγραμμα» του Descartes αντιμετώπισαν δυσκολίες. Μία από αυτές ήταν η πεποίθηση μιας συνεπούς διασύνδεσης μεταξύ της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας. Ένα τέτοιο παράδειγμα αμφισβήτησης βρίσκουμε στα σχόλια του van Schooten για τη Λατινική έκδοση της «Γεωμετρίας» του. Αναφέρεται στο συμπέρασμα του Descartes ότι αν ένα πρόβλημα οδηγεί σε μια ανάγωση εξίσωσης τρίτου βαθμού, τότε το πρόβλημα είναι στερεό, δηλαδή δεν μπορεί να επιλυθεί με ευθείες και κύκλους (Bos, 2001). Ο Huygens αμφισβήτησε τον ισχυρισμό του Descartes. Ο Schooten βεβαιώνει ότι κάθε κατασκευαστικό πρόβλημα όπου δίνεται μια κωνική τομή και οδηγεί σε πολυωνυμική εξίσωση 3ου ή 4ου βαθμού, μπορεί να κατασκευαστεί με την δοθείσα κωνική και ένα κύκλο και ως εκ τούτου το πρόβλημα θα μπορούσε να θεωρηθεί επίπεδο επειδή δίνεται η παραβολή, αλλά αποφάσισε να διατηρήσει την ταξινόμηση του Descartes. Οι Daniel Bernoulli (1700–1782), Newton και Pierre de Fermat (1607-1665) απέρριψαν την απαίτηση του Descartes για τον βαθμό των κατασκευαστικών καμπυλών (Bos, 1984).

Εντούτοις, δεν χάθηκαν όλες οι ιδέες που προέκυψαν από τη θεωρία της κατασκευής των εξισώσεων και κληρονόμοι τους είναι (α) η «Άλγεβρική Γεωμετρία⁵», δηλαδή η μελέτη των αλγεβρικών καμπυλών και (β) ο σχεδιασμός και κατασκευή μαθηματικών μηχανών χάραξης καμπυλών ή γενικότερα μηχανισμοί μετατροπής και μεταφοράς κινήσεων. Το έργο των Descartes, Johann Hudde (1628-1704), John Wallis (1616-1703) και Isaac Barrow (1630-1677) βρισκόταν στα πρόθυρα της δημιουργίας ενός «λογισμού αλγεβρικών συναρτήσεων» που σε κανένα σημείο δεν απαιτούσε τη χρήση ορίων ή άπειρων ποσοτήτων. Ο Hudde ο οποίος ήταν φοιτητής και συνεργάτης του van Schooten και είχε προσθέσει σχόλια στην νεώτερη έκδοση της «Geometrie» του Descartes, είχε επίσης δώσει μεθόδους εύρεσης εφαπτομένης σε σημείο αλγεβρικής καμπύλης καθώς και ακροτάτων σημείων και σημείων καμπής χωρίς την χρήση ορίων ή απείρου (Suzuki, 2005). Τα πέντε βιβλία του περιείχαν βασική Αριθμητική και Γεωμετρία, απλές γεωμετρικές κατασκευές, προσπάθεια ανακατασκευής εργασιών του Απολλώνιου και κατασκευές κωνικών τομών.

⁵ Η Άλγεβρική Γεωμετρία είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με την μελέτη των ριζών των πολυωνυμικών εξισώσεων. Η σύγχρονη αλγεβρική γεωμετρία βασίζεται σε πιο αφηρημένες τεχνικές της άλγεβρας, ιδιαίτερα στην Αντιμεταθετική Άλγεβρα με τη γλώσσα και τα προβλήματα της Γεωμετρίας.

Ο λογισμός των Newton και Gottfried Leibniz (1646-1716) αφορά και τις «μηχανικές» καμπύλες (υπερβατικές συναρτήσεις). Αντικατέστησε τον Λογισμό των Descartes, Hudde, Wallis και Barrow (Suzuki, 2005) ο οποίος χάθηκε πρόωρα και αθόρυβα. Όμως ο γεωμετρικός ορισμός των «συναρτήσεων μιας καμπύλης» από τον Leibniz (Dennis & Confrey, 1995) εξακολουθεί να είναι ένα παράδειγμα μιας λησμονημένης ιστορίας των Μαθηματικών, η οποία μπορεί να προσφέρει μία ισχυρή εννοιολογική προσέγγιση των καμπυλών, παρέχοντας αποτελέσματα για την αναλυτική γεωμετρία αλλά και ιδιαιτέρως κατάλληλα για το δυναμικό περιβάλλον των μαθηματικών μηχανών και των λογισμικών γεωμετρίας.

Ο Claude Perrault (1613–1688) έθεσε το 1676 στον Gottfried Wilhelm Leibnitz (1645–1716) το πρόβλημα χάραξης καμπύλης της οποίας η εφαπτομένη σε κάθε της σημείο B να τέμνει κάποιον άξονα r σε σημείο A κατά τρόπον ώστε να είναι σταθερό το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος BA» (Tournès, 2009). Ο Perrault παρατήρησε την καμπύλη που ιχνηλατήθηκε από ένα ρολόι με αλυσίδα που έσυρε σε ένα επίπεδο τραπέζι, και λόγω της τριβής του ρολογιού με το επίπεδο, η τεταμένη αλυσίδα ήταν πάντα εφαπτομένη στην καμπύλη (εικόνα 16).

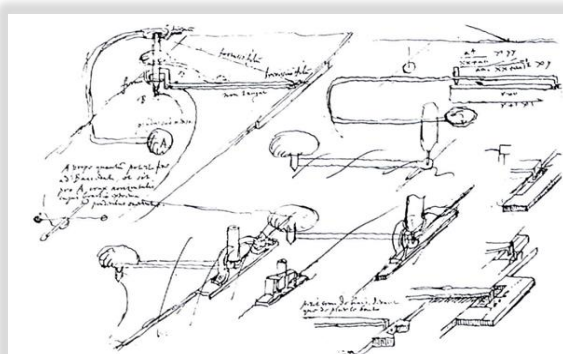
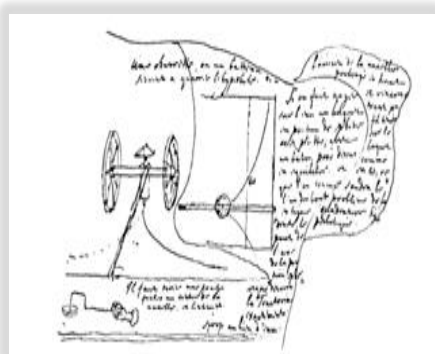


Εικόνα 16: «η έλκουσα» καμπύλη σε οπτικό διάγραμμα» & «η «έλκουσα» καμπύλη από προσομοίωση του μηχανισμού Poleni-Suardi» & <https://www.geogebra.org/m/tugrwe>

Συγκεκριμένα, αφού εισαχθεί κατάλληλο καρτεσιανό σύστημα, η καμπύλη αναπαρίσταται από την εξίσωση $y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \cdot \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$ (Παράρτημα [6]).

Ο Huygens θεωρούσε πολύ περιοριστικές τις προδιαγραφές της Καρτεσιανής γεωμετρίας για τις καμπύλες και πίστευε ότι με την νομιμοποίηση της έλκουσας (tractrix), το πρόβλημα του τετραγωνισμού του υπερβολικού χωρίου θα λυνόταν καθώς και άλλα προβλήματα που θα μπορούσαν να αναχθούν σε αυτό τον τετραγωνισμό (Bos, 1987). Οι συνδεσμολογίες άκαμπτων ράβδων (linkages) του Descartes καθώς και η «μηχανή έλξης» (tractix) χάρασσαν καμπύλες με μια και συνεχή κίνηση (έναν βαθμό ελευθερίας) έχοντας αφαιρέσει κατασκευαστικά τα όποια φυσικά εμπόδια υπήρχαν (Crippa & Milici, 2019).

Τον ίδιο αιώνα αναπτύχθηκαν γεωμετρικές ιδέες σχετικά με τις καμπύλες που καθορίστηκαν από τις εφαπτομενικές ιδιότητές τους. Ο Huygens και ο Bernoulli άρχισαν να σχεδιάζουν κάποια μέσα τα οποία, θα μπορούσαν να «καθοδηγήσουν» την εφαπτομένη ευθεία μιας καμπύλης, επεκτείνοντας τους μηχανισμούς του Descartes. Σε όρους αναλυτικής μηχανικής, εισήγαγαν «μη ολονομικούς κινητικούς περιορισμούς» δηλαδή την «καθοδήγηση» της εφαπτόμενης ευθείας της ζητούμενης καμπύλης. Οι αποδεκτές μαθηματικές μηχανές από τον Descartes περιείχαν μόνο «ολονομικούς κινητικούς περιορισμούς» δηλαδή περιορισμούς θέσεως αδιαφορώντας για τριβές και ταχύτητες των αρθρωμένων άκαμπτων ράβδων. Αυτή η επέκταση είναι η βάση της «ελκτικής κίνησης», αφορά υπερβατικές καμπύλες και καταλήγει σε μια ολοκληρωμένη θεωρία της ακριβούς γεωμετρικής κατασκευής των αλγεβρικών διαφορικών εξισώσεων (Riccati, 1752). Το πρώτο παράδειγμα αυτών των καμπυλών ήταν η tractoria ή tractrix (έλκουσα - ισοεφαπτομενική καμπύλη). Ο Huygens εμβάθυνε στο θέμα της ελκτικής κίνησης, στρεφόμενος προς μια μηχανική περιγραφή της και για να κατασκευάσει συγκεκριμένα μέσα χάραξής της. Σκέφτηκε να τοποθετήσει σώμα που να επιπλέει σε υγρή επιφάνεια (εικόνα 17) για να έχει οριζόντια θέση (Bos, 1987). Προσπάθησε να αφαιρέσει τα φυσικά εμπόδια της κατασκευής για να εμφανίζονται μόνο οι εφαπτομενικές ιδιότητες και η κίνηση να είναι γεωμετρική χωρίς να εξαρτάται από την τριβή ή την ταχύτητα (Huygens, 1693). Έδωσε μεγάλη προσοχή και κατάφερε να έχει την επιθυμητή ακρίβεια της κατασκευής, αλλά συνειδητοποίησε ότι δεν μπορούσε να σχηματιστεί πολυωνυμική εξίσωση και η καμπύλη δεν ήταν αποδεκτή. Για μεγάλο χρονικό διάστημα οι καμπύλες δεν αντιπροσωπεύονταν από τις εξισώσεις τους αλλά από τις γεωμετρικές διαδικασίες κατασκευής τους και μέχρι τον δέκατο όγδοο αιώνα η «λύση» μιας διαφορικής εξίσωσης ήταν στην ουσία η «κατασκευή» της αντίστοιχης καμπύλης με μαθηματικές μηχανές. Ο Riccati παρέδωσε έναν ολοκληρωμένο τρόπο γεωμετρικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων μέσω των «επεκτάσεων» των tractrix, αλλά συνέπεσε χρονικά με την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μέσω «Σειρών».

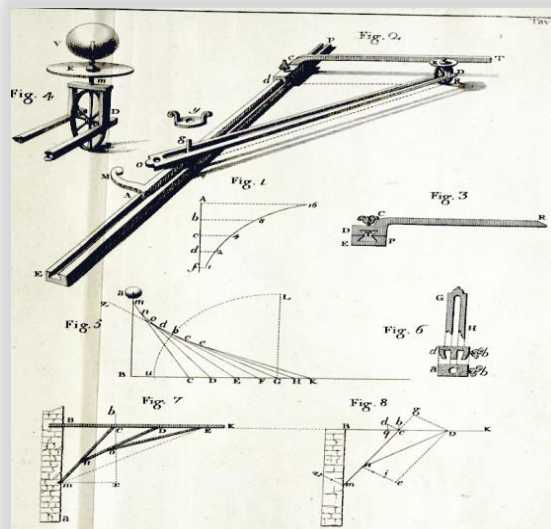
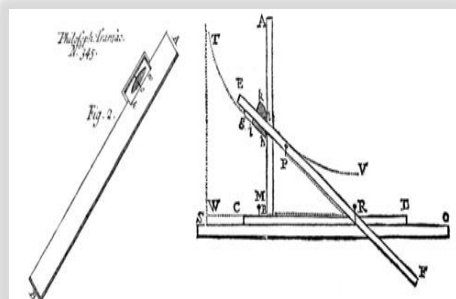


Εικόνα 17: «οπτικά διαγράμματα του Huygens σχετικά με την κίνηση έλξης» (University Library Leiden, Ms Hug. 6, fol. 64r & 59r)

Στα τέλη του 17ου αιώνα, οι αλγεβρικές καμπύλες δεν αποτελούσαν πλέον πηγή μεγάλου ενδιαφέροντος και το πρόβλημα της επέκτασης της Γεωμετρίας πέρα από τα όρια που ορίστηκαν από τον Descartes έγινε κυρίαρχο, κυρίως λόγω της αύξησης δύο κατηγοριών προβλημάτων για τα οποία τα εργαλεία δεν επαρκούσαν. Συγκεκριμένα, ήταν τα προβλήματα εμβαδομέτρησης περιοχής κάτω από μια καμπύλη, δηλαδή «προβλήματα τετραγωνισμού» καθώς και τα αντίστροφα εφαπτομενικά προβλήματα (Blasjo, 2017). Επίσης η έννοια του «αριθμού» είχε διεισδύσει στις κατασκευές και τελικά κατέλαβε τη Γεωμετρία και κατέληξε να είναι η μελέτη των μετρικών χώρων πάνω από αριθμητικά ή γενικότερα πεδία.

Ο Leibnitz εξερεύνησε νέα είδη «συνεχών κινήσεων» που θα μπορούσαν να δημιουργήσουν υπερβατικές καμπύλες και η ελκτική κίνηση θεωρήθηκε ως «αναζωογόνηση» για την Γεωμετρία. Αρχικά όμως διέκοψε την προσπάθειά του διότι αν και οι ιδεατοί μηχανισμοί του λειτουργούσαν με μία και συνεχή κίνηση, χρησιμοποιούσε ήδη κατασκευασμένες καμπύλες για να χαραχθούν οι νέες, το οποίο δεν συνέβαινε στις συνδεσμολογίες (linkages) του Descartes. Τελικά, η ανακάλυψη της tractrix επέτρεψε στον Leibnitz να ξεπεράσει τις δυσκολίες επειδή η χάραξη της δεν προϋπόθετε άλλες καμπύλες. Ως εκ τούτου, η ελκτική κίνηση θεωρήθηκε ως η φυσική επέκταση των καρτεσιανών καμπυλών και επέτρεψε την κατασκευή υπερβατικών (μηχανικών) καμπυλών χρησιμοποιώντας «μία μόνο συνεχή κίνηση» (Crippa, 2018, in Gessner et al., 2018). Σχεδίασε έναν μαθηματικό όργανο για εμβαδομετρήσεις και γεωμετρική κατασκευή διαφορικών εξισώσεων. Η ιδέα ήταν να πάρει μια τεταμένη χορδή και, με μια κατάλληλη μηχανική συσκευή να επιβάλει την προκύπτουσα κλίση της. Έτσι η κίνηση της χορδής χάραζε μια καμπύλη, της οποίας οι εφαπτόμενες ήταν εμφανείς, με άλλα λόγια, μια ολοκληρωτική καμπύλη, η οποία αποτελούσε επίλυση αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος.

Η « Universal Machine» του Leibniz ήταν ένας σχεδιασμένος μαθηματικός μηχανισμός και χωρίς αρχικό σκοπό να κατασκευασθεί (Crippa & Milici, 2019). Σε αυτή την προσπάθεια συνέβαλαν και οι μαθηματικοί Jacob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Guillaume L'Hopital (1661-1704) και Pierre Varignon (1654-1722) (Tournès, 2009). Αυτή η ιδέα γέννησε μια πλήρη θεωρία που αναπτύχθηκε αργότερα από τους Giovanni Poleni (1683-1761), Leonhard Euler (1707-1783), Vincenzo Riccati (1707-1775), John Perks (18^{ος} αι.) και Giambattista Suardi (1711-1767), και ήταν η αρχή της σύλληψης και της δημιουργίας πραγματικών πλέον ολοκληρωτικογράφων κατά κυρίως στα τέλη του 19ου αιώνα (Bos, 1988. Milici, 2015). Κεντρική ιδέα των μαθηματικών μηχανών που κατασκεύασαν ήταν η χρήση του «ολοκληρωτικού» τροχού», του οποίου η κατεύθυνση καθοδηγείται από μια ράβδο με σκοπό την κατασκευή καμπύλης με δεδομένες εφαπτομενικές συνθήκες (εικόνα 18).



Εικόνα 18: «μηχανισμός του Perks (1714-1716) για την tractrix και για τον τετραγωνισμό της υπερβολής» <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1706.0017> & «μηχανισμός του Suardi (1752) για την tractrix και την εκθετική καμπύλη» & <https://iiif.wellcomecollection.org/pdf/b30408441>

ο Σουηδός μηχανικός C. Polhem (1661-1751) παρήγαγε λεπτομερή ξύλινα μοντέλα εργασίας 80 βασικών μηχανισμών που ήταν τότε γνωστοί και τα χρησιμοποίησε ως βάση μαθημάτων μηχανικού σχεδιασμού (Franco, Trivella & Quaglia, 2020). Ίδρυσε το 1697 το «Laboratorium Mechanicum» για την διδασκαλία μετατροπής της κίνησης και την απεικόνιση των μηχανικών εξαρτημάτων. Στη συνέχεια, οι φοιτητές του Carl Johan Cronstedt (1709-1779) και Augustin Ehrensvärd (1710-1772) συνόψισαν τη λίστα των βασικών μηχανισμών σε ένα βιβλίο το οποίο ονόμασαν «μηχανικό αλφάβητο». Την ίδια περίοδο ο μαθηματικός Leonhard Euler (1707-1783) εργαζόμενος μέσω «πολλαπλών αναπαραστάσεων» πέτυχε αποτελέσματα στην ανάλυση και τις διαφορικές εξισώσεις, τα οποία και αποτελούν έως σήμερα τη βάση προηγμένων μηχανολογικών μαθηματικών. Η εμπειρική προσέγγισή του κατά καιρούς οδηγούσε σε παράδοξα, αλλά συνέχισε να πειραματίζεται μέχρις ότου φτάσει σε μέθοδο που είχε νόημα στο πλαίσιο του περιβάλλοντος εργασίας (Euler, 1988). Έκανε στατική ανάλυση ιμάντων και κατένειμε τους οδοντωτούς τροχούς (Δημαρόγκωνας, 1985). Στον 18ο αιώνα οι τεχνολογίες κίνησης έλξης εξελίχθηκαν ταχύτατα και χορδές υποκαταστάθηκαν από άκαμπτες ράβδους συνεργαζόμενες μεταξύ τους όχι μόνο με έλξη, αλλά και με συμπίεση. Τα βαριά σώματα αντικαταστάθηκαν από «στρεφόμενους ολοκληρωτικούς τροχούς» για να αντιμετωπισθεί η εγκάρσια ώθηση, όπως μπορεί να παρατηρηθεί στο μηχάνημα έλξης του Perks (Perks, 1714-1716). Ο Robert Willis (1800-1875) ο οποίος ήταν θεωρητικός της κινηματικής, το 1840 δημιούργησε μια συλλογή μηχανικών μοντέλων από ξύλο και

ορείχαλκο, για εκπαιδευτικούς σκοπούς που περιελάμβαναν και έναν μηχανισμό τεσσάρων άκαμπτων ράβδων (Franco, Trivella & Quaglia, 2020).

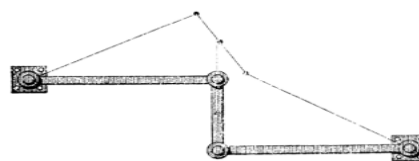
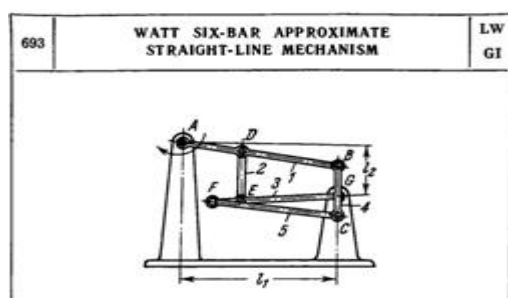
Όμως κατά το τέλος του 18^{ου} αιώνα σταμάτησε από τους μαθηματικούς η επίλυση διαφορικών εξισώσεων, η χάραξη υπερβατικών καμπυλών και ο τετραγωνισμός περιοχών με την χρήση μαθηματικών μηχανών λόγω της επικράτησης αυτόνομων συμβολικών διαδικασιών. Σταδιακά επικράτησε η «απειροστική ανάλυση», ανεξάρτητη από την γεωμετρική απεικόνιση των συντεταγμένων, των καμπυλών, των τετραγωνισμών και των εφαπτομένων, και με το δικό της αντικείμενο όπως ήταν οι «αναλυτικές εκφράσεις» και αργότερα οι «συναρτήσεις». Αυτή η διαδικασία «απογεωμετρικοποίησης» της ανάλυσης των γεωμετρικών προβλημάτων, απετέλεσε πλέον την κύρια δυναμική στο πεδίο των μαθηματικών δραστηριοτήτων γύρω από την έρευνα των καμπυλών, μέσω πεπερασμένης, αλλά και απειροστικής ανάλυσης (Milici, 2015).

Στην αρχή του δέκατου ένατου αιώνα, αρχίζουν να εμφανίζονται διάφορα αρθρωτά συστήματα όπως αυτές που χρησιμοποιούνται σήμερα σε ρομπότ, εκσκαφείς, κινητήρες κ.λπ. Χρησιμοποιούνται επίσης ευρέως για κινούμενα σχέδια χαρακτήρων σε συστήματα μοντελοποίησης. Οι Sylvester, Kempe και Cayley ανέπτυξαν τη γεωμετρία που σχετίζεται με τη θεωρία αυτών των συστημάτων στη δεκαετία του 1870. Ένα αρθρωτό σύστημα (συνδεσμολογία – linkage) είναι μια συλλογή βραχιόνων (άκαμπτων ράβδων – συνδέσμων – links). Σημεία των βραχιόνων συνδέονται με αρθρώσεις (joints), ενώ κάθε άρθρωση συνδέει δύο ή περισσότερους βραχίονες (Kempe, 1877). Το είδος των αρθρώσεων που χρησιμοποιούνται και ο τρόπος σύνδεσης με τους βραχίονες έχουν καθοριστική σημασία για το είδος κίνησης που θα επιτρέπουν στους βραχίονες (Uicker, Pennock, & Shigley, 2016). Οι βραχίονες είναι ελεύθεροι να περιστρέφονται γύρω από τις αρθρώσεις (Kempe, 1877).

Τα αρθρωτά συστήματα σχεδιάζονται έτσι ώστε να δέχονται μια κίνηση και να παράγουν μια διαφορετική κίνηση, μεταβάλλοντας την κινητική κατάσταση κάποιου ή κάποιων άλλων βραχιόνων. Εάν δύο ή περισσότεροι βραχίονες έχουν ελευθερία κινήσεων ως προς έναν σταθερό βραχίονα τότε η συνδεσμολογία ονομάζεται μηχανισμός (Siopi & Koleza, 2016). Βέβαια, μεταξύ 1603 και 1605 ο Γερμανός αστρονόμος Christoph Scheiner (1573-1650) είχε εφεύρει τον παντογράφο που ήταν το πρώτο «αντιγραφικό» μηχάνημα. Έπρεπε να περάσουν 25 χρόνια για να δημοσιεύσει το 1631 την εφεύρεσή του στο «*Pantographice, seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum mechanicum mobile in Rome*».

Ο James Watt (1736-1819) ήταν μαθηματικός και μηχανολόγος μηχανικός και πρωτοστάτησε για την έλευση της «Βιομηχανικής Επανάστασης» με την βελτίωση της μηχανής ατμού του

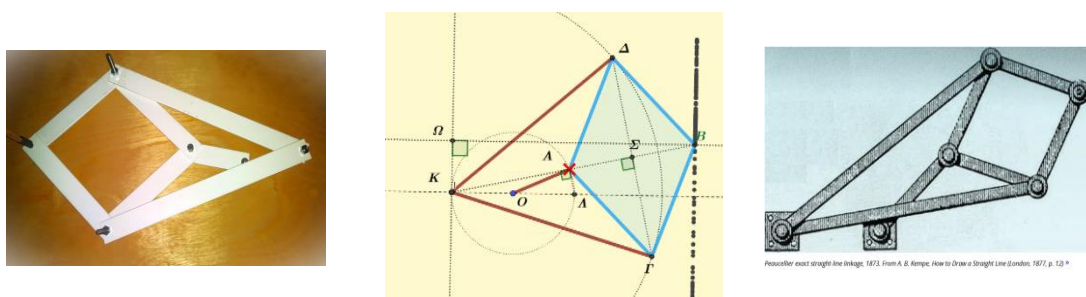
Newcomen. Αποτελούσε η μελέτη του μια μέθοδο μετατροπής παλινδρομικής κίνησης εμβόλου σε περιστροφική κίνηση (Miller, 2011). Αυτή η εφεύρεση ήταν καλύτερη από έναν στροφαλοφόρο άξονα που είχε ήδη κατοχυρωθεί με δίπλωμα ευρεσιτεχνίας (εικόνα 19). Το σύστημα επέτρεπε στον περιστρεφόμενο τροχό να περιστρέφεται περισσότερες από μία φορές ανά διαδρομή του εμβόλου δεδομένου ότι το έμβολο κινούνταν αργά, και αυτό ήταν σημαντική βελτίωση. Είχε επίσης επινοήσει έναν μηχανισμό για την μετατροπή της καμπυλόγραμμης κίνησης ράβδου σε περίπου γραμμική κίνηση εμβόλου (κινητήρας διπλής ενέργειας) (Miller, 2011).



Εικόνα 19: ευθυγράφοι Watt ως μηχανισμοί μετατροπής κυκλικής κίνησης σε ευθύγραμμη, από βιβλία των Artobolevsky και Kempe. <https://www.geogebra.org/m/hywwwfcs>

Οι γεωμετρικές και αναλυτικές ιδιότητες αυτών των μηχανισμών έδωσαν μια νέα ώθηση για έρευνα σε αμιγώς μαθηματικούς τομείς, και αυτή η διαδικασία συνεχίστηκε αργότερα τον 20^ο αιώνα. Ο Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), ήταν έναν από τους πιο σημαντικούς μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα. Ενδιαφερόταν για τη μηχανική από νεαρή ηλικία, αλλά η έρευνά του σε αυτόν τον τομέα ξεκίνησε μόνο μετά από ένα ταξίδι στην Ευρώπη που πραγματοποίησε τον Ιούνιο-Οκτώβριο 1852. Ήταν ένα επιστημονικό ταξίδι που χρηματοδοτήθηκε από την Ακαδημία Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης. Κατά τη διάρκεια αυτού του ταξιδιού, ο Chebyshev δημιούργησε σχέσεις με διάσημους Ευρωπαίους μαθηματικούς και, παράλληλα με τη θεωρητική του έρευνα, παρατήρησε εργοστάσια και εργαστήρια, μαθαίνοντας για τα τελευταία επιτεύγματα στη μηχανική και τα μηχανήματα. Το 1854, ο Chebyshev δημοσίευσε την πρώτη του εργασία για τις συνδεσμολογίες (linkages), η οποία σύντομα ακολουθήθηκε από αρκετές επεκτάσεις. Η λέξη «παραλληλόγραμμα» που εμφανίζεται σε αρκετούς τίτλους αυτών των εργασιών χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά για να δηλώσει έναν συγκεκριμένο μηχανισμό, δηλαδή το παραλληλόγραμμα του Watt και τις βελτιώσεις του (Zhukova, 2021). Τον προσέλκυσε ιδιαίτερα ένα κομμάτι μηχανισμού που περιλαμβανόταν στον κινητήρα του Watt που αποτελείται από μια μηχανική σύνδεση που μετατρέπει μια σχεδόν κυκλική κίνηση μιας ακτίνας παλινδρόμησης σε τμήμα μιας μηχανής σε ευθύγραμμη κίνηση ενός άξονα εμβόλου. Αυτή η συνδεσμολογία, την οποία ονόμασε «Watt parallelogram», και έπαιξε σημαντικό ρόλο στο έργο του. Σε μεταγενέστερα έργα,

χρησιμοποιήθηκε από τον Chebyshev για να δηλώσει συνδεσμολογίες που κατά κάποιο τρόπο σχετίζονται με αυτόν τον μηχανισμό. Οι τίτλοι των εργασιών έχουν μηχανική χροιά, αλλά το περιεχόμενο των περισσότερων από αυτά είναι καθαρά μαθηματικό. Αξίζει να πούμε ότι ο Chebyshev χρησιμοποίησε συνδεσμολογίες για να αναπτύξει τη θεωρία των προσεγγίσεων των συναρτήσεων. Οι ράβδοι μιας συνδεσμολογίας σχετίζονται μέσω αλγεβρικών σχέσεων μεταξύ των συντεταγμένων των συνδέσμων ή των επιλεγμένων σημείων στις ράβδους (Papadopoulos, 2021). Εάν η θέση ορισμένων σημείων της συνδεσμολογίας στο επίπεδο είναι σταθερή, τότε οι τροχιές των άλλων κινούμενων σημείων είναι αλγεβρικές καμπύλες. Τα φυσικά ερωτήματα που προκύπτουν εδώ είναι: Τι είδους αλγεβρικές καμπύλες μπορούν να ληφθούν από αυτές τις κινήσεις; Ποιες καμπύλες στο επίπεδο μπορούν να προσεγγιστούν από τις καμπύλες που ανιχνεύονται από επιλεγμένα σημεία στους συνδέσμους; Αν και ο Chebyshev έστρεψε την προσοχή του στη γενική θεωρία των προσεγγίσεων, αυτά τα ερωτήματα παρέμειναν σημαντικά (Zhukova, 2021). Η προσπάθεια εύρεσης μιας μηχανικής συνδεσμολογίας που μετατρέπει μια κυκλική κίνηση σε τελειώς ευθύγραμμη επετεύχθη το 1873 από τον Γάλλο μηχανικό Charles-Nicolas Peaucellier (1832-1919) και το 1871 από τον Λιθουανό μαθηματικό Lipman Lipkin (1846-1875) ο οποίος σπούδασε δίπλα στον Chebyshev (εικόνα 20) (Παράρτημα [8]).



Εικόνα 20 : ευθυγράφος Peaucellier-Lipkin στο 9^ο ΓΕΛ Πάτρας & προσομοίωση στο Geogebra & από το βιβλίο του Kempe (1877, p. 12). <https://www.geogebra.org/m/t7qunmrf>

Το 1868 ο Franz Reuleaux (1829-1905), καθηγητής εφαρμοσμένης μηχανικής στο Βερολίνο, συνέταξε ένα μηχανικό αλφάβητο με 800 μοντέλα (Bolt, 1991) και το 1875 ταξινομήσε εκ νέου τις μηχανές, ορίζοντας πως αποτελούνται από έξι βασικά στοιχεία (στρόφαλος, τροχός, κάμα, κοχλίας, στοιχεία διακοπόμενης κίνησης, ελαστικά στοιχεία) (Δημαρόγκωνας, 1985). Ο Reuleaux (1875) αναφέρει ότι οι μηχανές μπορούν να περιγραφούν ως αλυσίδες στοιχειωδών συνδέσμων που ονομάζονται κινηματικά ζεύγη. Οι περιορισμοί στη μηχανή περιγράφονται από περιορισμούς σε κάθε κινηματικό ζεύγος και η ακολουθία των κινήσεων των ζευγών παράγει μια κινηματική αλυσίδα. Χρησιμοποιώντας τη σημείωση και τις μεθόδους του για συστηματική μεταβολή των στοιχείων (π.χ. αναστροφές, αλλαγή των σχετικών μεγεθών των συνδέσμων κ.λπ.) έδειξε πώς η σύνδεση των τεσσάρων ράβδων θα

μπορούσε να μεταλλαχθεί σε 54 μηχανισμούς, οι οποίοι εμπίπτουν σε 12 κατηγορίες (εικόνα 21). Μετά το θάνατό του, εξήντα από τα μοντέλα του στάλθηκαν στο Deutsches Museum, αλλά το πιο σημαντικό μέρος της συλλογής καταστράφηκε κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου (Franco, et al., 2020). Σήμερα, το πιο πλήρες σύνολο βρίσκεται στο Cornell University College of Engineering.



Εικόνα 21 : Ευθυγράφοι Watt και Peaucellier, από συλλογή Reauleaux στο Cornell University

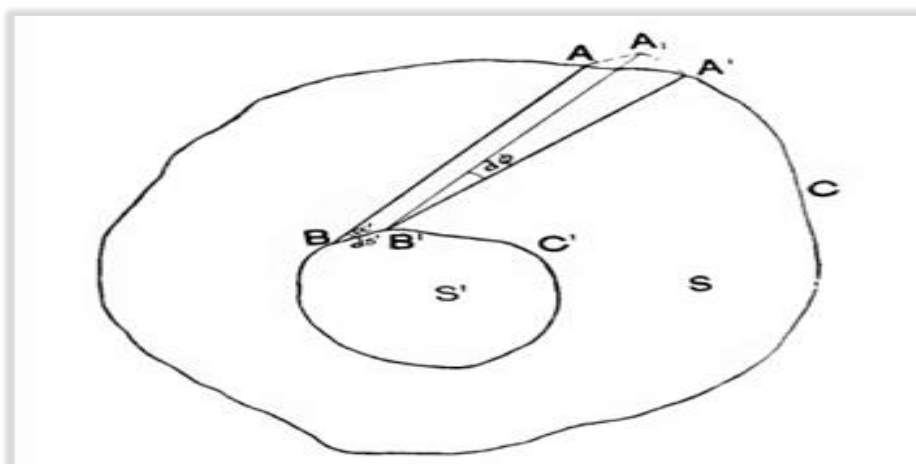
Την ίδια περίοδο, ο Henry T. Brown, ένας Αμερικανός μηχανολόγος μηχανικός, δημοσίευσε ένα βιβλίο με τίτλο «507 μηχανικές κινήσεις» (Brown, 1868). Το 1873, ο Chebyshev παρότρυνε τον Άγγλο μαθηματικό James Joseph Sylvester (1814-1897), να ασχοληθεί με την Κινηματική Γεωμετρία «η οποία προσέθετε μια τέταρτη διάσταση, αυτή της κίνησης». Ο Sylvester ασχολήθηκε πολύ, εκθειάζοντας τις αρετές της Κινηματικής Γεωμετρίας στις δημόσιες διαλέξεις του σε Αγγλία και Αμερική. Ο Άγγλος μαθηματικός Sir Alfred Bray Kempe (1849-1922) ακολούθησε τον Sylvester, αλλά η προσέγγισή τους ήταν ακαδημαϊκή και απέτυχαν να εκμεταλλευτούν τις πρακτικές εφαρμογές (Bolt, 1991). Ο Kempe (1877) περιγράφει την χάραξη ευθειών και γεωμετρικών καμπυλών από μαθηματικές μηχανές και ως αποτέλεσμα γεωμετρικών ενεργειών αναφερόμενος στον J. Watt και στο έργο των J.J. Sylvester, Peaucellier, Richard Roberts (1789-1864), Chebyshev, William Kingdon Clifford (1845-1879), Jules Antoine Lissajous (1822-1880), Samuel Roberts (1827-1913) και Arthur Cayley (1821-1895). Επίσης το 1876 σε άρθρο του δίνει μία γενική απόδειξη χάραξης όλων των αλγεβρικών συναρτήσεων με την χρήση συνδεσμολογιών (Kempe, 1876).

Μέσω των μηχανών, αναζητήθηκε επίσης η κατασκευή των διαφορικών εξισώσεων δηλαδή μια εύχρηστη και μηχανική λύση για την πιο απλή διαφορική εξίσωση $y' = f(x)$. Ο Johann Martin Hermann (1785-1841) σχεδίασε το 1814 μια τέτοια μαθηματική μηχανή (Fischer, 2018). Αν και δεν έχει δημοσιευθεί, η συσκευή του Hermann είναι πλέον αναμφισβήτητο το πρώτο γνωστό όργανο ικανό να μετρήσει με ακρίβεια το εμβαδόν οποιουδήποτε ακανόνιστου οριοθετημένου επιπέδου σχήματος (**Παράρτημα [9]**). Όμως δεν δημοσιεύτηκε η εργασία του αλλά βεβαιώνεται από τους κατασκευαστές μαθηματικών οργάνων Georg Reichenbach

(1771-1826) και Joseph Liebherr (1767-1840), καθώς και τον μαθηματικό Johann Georg [von] Soldner (1776-1833), καθώς και η ύπαρξη μόνο ενός τέτοιου οργάνου (Fischer, 2018).

Ο Tito Gonella (1794-1867) σχεδίασε το 1824 τρία είδη εμβαδόμετρων, τα οποία είχαν στην δομή τους (α) κώνο και υπερβολή, (β) κώνο και τροχό, (γ) δίσκο και τροχό, αλλά η 2^η πρότασή του «αντιγράφηκε» και παρουσιάστηκε το 1828 στην Ελβετία από τον Johannes Oppikofer (1782-1864). Τελικά κατάφερε να παράξει εμβαδόμετρα στην Φλωρεντία σύμφωνα με την 3^η πρότασή του, αλλά και ο Henrich R. Ernst (1803-1863) παρήγαγε μηχανισμούς τύπου «Oppikofer» (Fischer, 2018).

Οι Carse & Urquhart (1914) περιέγραψαν έναν γενικό τρόπο λειτουργίας του επιπεδόμετρου (planimeter) που έχει στην δομή του έναν βραχίονα σταθερού μήκους l . Στόχος είναι η εμβαδομέτρηση της περιοχής μεταξύ των δύο κλειστών γραμμών C και C' (εικόνα 22). Τελικά το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ των δύο κλειστών γραμμών ισούται με $E = l \cdot (n - \alpha \cdot 2\pi) + l^2 \cdot \pi$ (n = πλήθος περιστροφών ολοκληρωτικού τροχού πάνω στον οποίο έχει τοποθετηθεί η ράβδος και α η απόσταση του B' από τον τροχό και θεωρούμενη ως ακτίνα κύκλου κέντρου B'). Σε αυτήν τη λογική στηρίζεται η κατασκευή των πολικών και γραμμικών εμβαδόμετρων (Παράρτημα [10]).



Εικόνα 22: «οπτικό διάγραμμα εμβαδόμετρου με βραχίονα σταθερού μήκους από το βιβλίο του Horsburgh, M. (1914)»

Η θεωρία και τα όργανα μαζί τόνωσαν την αναζήτηση κατά το δυνατόν απλούστερης μηχανικής κατασκευής (από τη στιγμή που είχε εδραιωθεί η πιθανότητα θεωρητικής ακρίβειας) και μεταξύ περίπου δέκα διαφορετικών λύσεων, επεκράτησαν τρεις ανεξάρτητες μεταξύ τους: (α) ο μηχανισμός polar planimeter του Jakob Amsler (1823-1912) το 1854, (β) ο μηχανισμός των Albert Miller (1808-1891) & Ritter von Hauenfels (1818-1897) το 1855 και (γ) ο μηχανισμός του Pavel Alexeevich Zarubin (1816-1886) επίσης το 1855. Το όνομα που ορίστηκε από τον Amsler (πολικό εμβαδόμετρο ή polar planimeter) υπονοεί την περιστροφή

του οργάνου γύρω από σταθερό σημείο, τον «πόλο» (εικόνα 23) (Fischer, 2018). Μέχρι το 1864 είχαν κατασκευασθεί συνολικά 3675 εμβαδόμετρα διαφόρων τύπων.

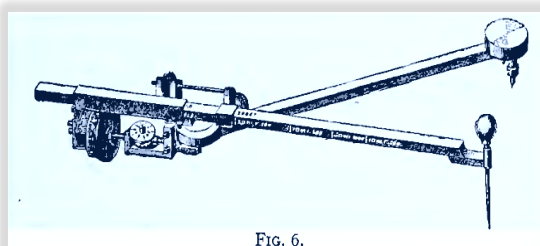
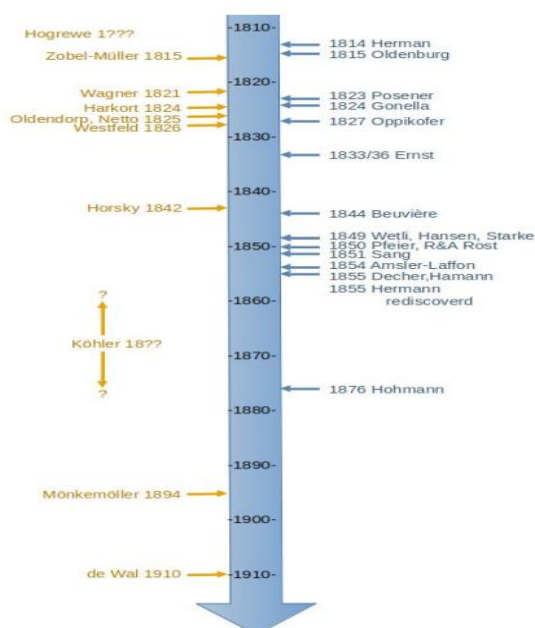


FIG. 6.



Εικόνα 23 : «Πολικό εμβαδόμετρο του Amsler από το βιβλίο του Horsburgh, M. (1914)» & «Πολικό εμβαδόμετρο, τύπος 31, αρ.89475, παραγωγή A. Ott, Kempten, Βαυαρία»

Το 2001, ενάμιση αιώνα αργότερα από την εμφάνιση του μηχανισμού εμβαδομέτρησης Hermann, σταμάτησε η παραγωγή μηχανικών αναλογικών εμβαδόμετρων και το συνολικό πλήθος των οργάνων μηχανικής ολοκλήρωσης ήταν περίπου 1,5 εκατομμύριο (Fischer, 2018). Στον ακόλουθο πίνακα (εικόνα 24) περιγράφεται η εξέλιξη του σχεδιασμού και παραγωγής ολοκληρωτικογράφων δύο ή τριών διαστάσεων, μέχρι και την κήρυξη του 1^{ου} παγκοσμίου πολέμου (Zerfowski, 2021).



Εικόνα 24: «χρονική τροχιά πρώιμων εμβαδόμετρων (πορτοκαλί μη ολοκληρωτικά, μπλε: ολοκληρωτικά), από το άρθρο του Zerfowski (2021).

Αξίζει να αναφερθεί ο μαθηματικός και μηχανολόγος μηχανικός Ljubomir Kleri'c (1844-1910) λόγω μιας εργασίας του που δημοσιεύτηκε το 1897 στο περιοδικό «*Dinglers polytechnisches Journal*» (Kleri'c, 1897), όπου ανακοίνωσε ένα φιλόδοξο πρόγραμμα για την κατασκευή των αριθμών π και e καθώς και όλων των κανονικών πολυγώνων, αν και δεν μνημονεύεται στον προηγούμενο πίνακα. Ο Kleri'c ήταν μηχανικός με ισχυρή κατάρτιση στα Μαθηματικά και μεταξύ 1872 και 1907, δημιούργησε 48 άρθρα και βιβλία σε διάφορους τομείς των επιστημών της μηχανολογίας και των μαθηματικών (Tournès, 2018). Συγκεκριμένα, το έργο του περιελάμβανε την κατασκευή νέων μηχανισμών όπως πολυπαντογράφο (polyphantograph), τρακτογράφο (tractoriograph) ή λογαριθμογράφου (logarithmograph), καμπυλόμετρου (curvimeter) και ενός λογαριθμόμετρου (logarithmometre). Περιγράφει τον τρακτογράφο ως εξής (Kleri'c, 1897, σελ. 234):

«Το 1891, επινόησα ένα πολύ απλό όργανο με το οποίο, για όλα τα είδη επίπεδων καμπυλών, μπορεί κάποιος να ιχνηλατεί την τροχιά τους σε σταθερή απόσταση, δηλαδή με σταθερή εφαπτομένη ως προς το μήκος της. Ονόμασα αυτό το όργανο «τρακτογράφο». Αυτό το όργανο κατασκευάζεται στο Μηχανικό Ινστιτούτο του Oskar Leuner στη Δρέσδη και κοστίζει 22 μάρκα».

Στην πραγματικότητα, ο μαθηματικός μηχανισμός του Kleri'c είναι μια παραλλαγή του διάσημου εμβαδόμετρου (planimeter) Prytz, ενός πολύ απλού οργάνου που επιτρέπει τον υπολογισμό των εμβαδών με πολύ καλή προσέγγιση επαρκή για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές στηριζόμενος στην «έλκουσα» (tractrix) του Beaune (εικόνα 25).



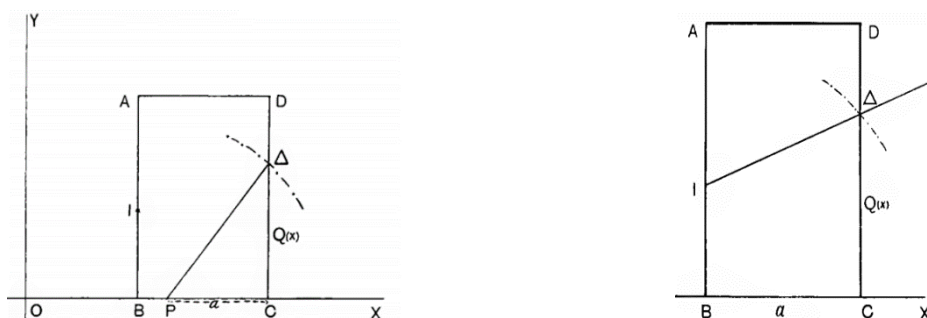
Εικόνα 25 : «ο τρακτογράφος του Kleri'c από το βιβλίο του (1897)»

Η πρωτοτυπία ήταν στο ότι δεν χρησιμοποιείται το όργανο μόνο για τον υπολογισμό των εμβαδών επιφανειών, αλλά και για την γεωμετρική κατασκευή μη κατασκευάσιμων γεωμετρικών προβλημάτων. Το μεγαλύτερο μέρος αυτών των κατασκευών βασίζεται στην «κυκλική έλκουσα», η οποία χαράσσει με την προϋπόθεση ότι ο τρακτογράφος είναι ίσος με την ακτίνα του κύκλου. Μια θεαματική ιδιότητα αυτής της καμπύλης είναι ότι, αν συνδεθεί με έναν χάρακα και ένα διαβήτη, επιτρέπει να κατασκευασθεί ο αριθμός π , να τετραγωνιστεί ο κύκλος και να εγγραφεί σε αυτόν ένα κανονικό πολύγωνο με οποιονδήποτε αριθμό πλευρών (Tournès, 2018). Χρησιμοποιώντας την έλκουσα ευθείας γραμμής (tractrix), ο Kleri'c απέδειξε ότι ο αριθμός e είναι επίσης κατασκευάσιμος με τον τρακτογράφο του.

Ταυτοχρόνως μια διαφορετική λύση του τετραγωνισμού του κύκλου δημοσιεύτηκε από τον Felix Klein (1849-1925) στο βιβλίο του «*Famous Problems of Elementary Geometry* και αναφέρεται (Klein, 1897, σ. 78):

«Μια πραγματική κατασκευή του π μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο με τη βοήθεια μιας υπερβατικής καμπύλης. Εάν είναι επιθυμητή μια τέτοια κατασκευή, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε εκτός από κανόνα και διαβήτη και μια «υπερβατική» συσκευή που θα χαράσσει την καμπύλη με συνεχή κίνηση. Μια τέτοια συσκευή είναι ο ολοκληρωτικογράφος, που πρόσφατα εφευρέθηκε και έχει περιγραφεί από έναν Ρώσο μηχανικό, τον Abdank-Abakanowicz, και κατασκευάστηκε από τον Coradi στη την Ζυρίχη. Για το σκοπό αυτό, μετακινούμε το σύνδεσμο του ολοκληρωτικογράφου έτσι ώστε το σημείο οδήγησης να ακολουθεί τη διαφορική καμπύλη. Το σημείο ανίχνευσης θα ανιχνεύσει τότε την ολοκληρωτική καμπύλη. Για μια πληρέστερη περιγραφή αυτού του έξυπνου οργάνου αναφερόμαστε στο αρχικά κείμενα (στα γερμανικά, Teubner, 1889, στα γαλλικά, Gauthier- Villars, 1889.)»⁶.

Σύμφωνα με τον Charles Tweedie (2014), η «γενική δομή μιας μαθηματικής μηχανής ολοκλήρωσης» (εικόνα 26) είναι τέτοια ώστε θεωρώντας στο επίπεδο ένα ορθογώνιο πλαίσιο $ABCD$ του οποίου η πλευρά BC μπορεί να ολισθήσει στον άξονα $x'x$ του εισαχθέντος ορθογωνίου συστήματος. Πάνω στην πλευρά BC ορίζεται σημείο P στο έτσι ώστε το $PC = a =$ παράμετρος, καθώς και σημεία Δ και I που μπορούν να ολισθήσουν στις πλευρές CD και AB αντιστοίχως, με τέτοιο τρόπο ώστε καθώς το ορθογώνιο μετακινείται κατά μήκος του άξονα $x'x$, το Δ ιχνηλατεί μια δεδομένη καμπύλη $y = Q(x)$. Το I υποχρεούται (από την δομή του μηχανισμού) να κινηθεί έτσι ώστε η εφαπτομένη ευθεία στο ίχνος του $I(x, y)$ να είναι μονίμως παράλληλη με το $P\Delta$ (εικόνα 26).

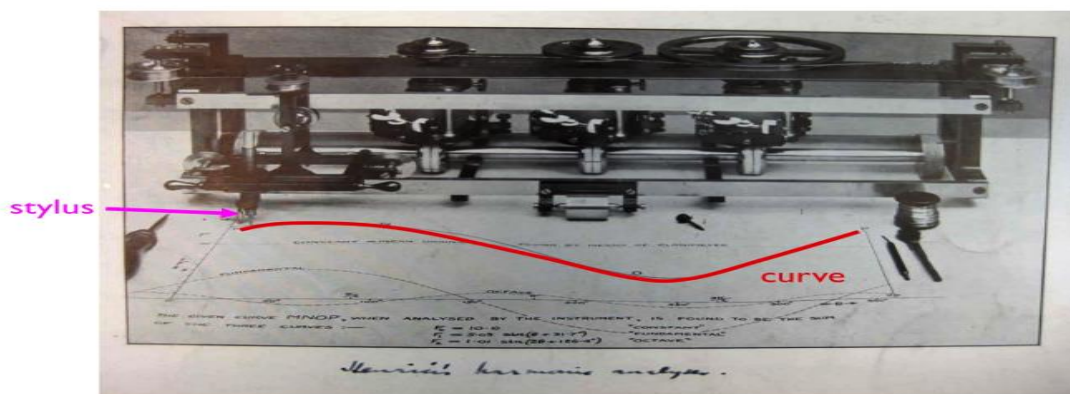


Εικόνα 26 : «οπτικό διάγραμμα λογικής του ολοκληρωτικογράφου Abdank-Abakanowicz (1878)» & «οπτικό διάγραμμα λογικής μηχανισμών που επιλύουν γεωμετρικά την γραμμική δ.ε. $ay' + y = Q(x)$ ».

⁶ Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ως γενικότερη εξέλιξη της μεθόδου Napier μπορούν να θεωρηθούν πολλοί μηχανισμοί οι οποίοι παρουσιάστηκαν κατά την Ευρωπαϊκή Έκθεση που πραγματοποιήθηκε προς τιμή του στο Εδιμβούργο της Σκωτίας από τις 24 Ιουλίου έως τις 27 Ιουλίου 1914, μόλις πέντε ημέρες πριν από την έναρξη του Α' Παγκοσμίου Πολέμου, εκ των οποίων ένας εξ αυτών ήταν και ο μαθηματικός μηχανισμός- ολοκληρωτικογράφος του Abdank-Abakanowicz, και κατασκευάστηκε από τον Coradi στη την Ζυρίχη.

Λόγω της παραλληλίας της εφαπτομένης στο I και της $P\Delta$ (εφαρμόζοντας στο I κατάλληλο ολοκληρωτικό τροχό), οι κλίσεις τους θα είναι ίσες και το «απειροστό τρίγωνο του Leibnitz» στο I της χαρασσόμενης καμπύλης θα είναι όμοιο με το τρίγωνο $P\Delta C$. Άρα, $\frac{(\Delta C)}{(PC)} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{Q(x)}{a} = \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{για } a=1} Q(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = Q(x)dx \Rightarrow \int dy = \int Q(x)dx \Rightarrow y = \int Q(x)dx$, δηλαδή η χαρασσόμενη καμπύλη από το I (ή ο «φάκελος» από τις εφαπτόμενες στο I) υπολογίζεται και αλγεβρικά αλλά και κατασκευάζεται γεωμετρικά με αυτόν τον «εφαπτομενικογράφο» επιλύοντας την διαφορική εξίσωση $y' = Q(x)$. Η κλίση του $P\Delta$ ανά πάσα στιγμή είναι $Q(x)/a$ και αυτή της εφαπτομένης στο I είναι $dy/dx = \varepsilon\varphi\widehat{P\Delta O}$. Οι δύο καμπύλες που ιχνηλατούνται ταυτοχρόνως από τα σημεία Δ και I καλούνται αντιστοίχως «διαφορική καμπύλη» και «ολοκληρωτική καμπύλη», και τα σημεία Δ και I ορίζονται αντιστοίχως «διαφοροποιητής» (differentiator) και «ολοκληρωτής» (integrator). Με παρόμοιο λογική (εικόνα 26) δομήθηκαν και οι ολοκληρωτικογράφοι που λύνουν γεωμετρικά την γραμμική διαφορική εξίσωση $ay' + y = Q(x)$, $a = \text{σταθερά}$. Επίσης κατασκευάστηκαν και ολοκληρωτικογράφοι που «κατασκευάζουν» την κανονική μορφή της διαφορικής εξίσωσης του Riccati $y' = A(x) \cdot y^2 + B(x) \cdot y + C(x)$ καθώς και «πολικοί ολοκληρωτικογράφοι» (Tweedie, 2014).

Την ίδια περίοδο είχαν εμφανισθεί μαθηματικές μηχανές κατάλληλες για την αρμονική ανάλυση Fourier. Ο William Thomson (1824-1907) (αργότερα Λόρδος Kelvin) κατασκεύασε το 1878 αρμονικό αναλυτή ακριβείας, αλλά με κάποιες δυσκολίες στην λειτουργία του. Είχε προτείνει επίσης ότι οι ολοκληρωτικογράφοι θα μπορούσαν να συνδεθούν μεταξύ τους και έτσι να αναγκαστούν να παράγουν λύσεις διαφορικών εξισώσεων (Bush, 1931). Επίσης ο Olaus Henrici (1840-1918) κατασκεύασε το 1893 έναν νέο αρμονικό αναλυτή στον κατασκευαστή οργάνων Gottlieb Coradi (1847–1929) στη Ζυρίχη, ο οποίος αποτελείτο από πολλαπλές τροχαλίες και γυάλινες σφαίρες (ολοκληρωτές κυλιόμενης σφαίρας) συνδεδεμένες με οθόνη μέτρησης (εικόνα 27). Η καμπύλη τοποθετείται κάτω από τη συσκευή και ο χρήστης μετακινεί μια μηχανική γραφίδα κατά μήκος καμπύλης ιχνηλατώντας τη μορφή του κύματος. Οι μετρήσεις που προκύπτουν δίνουν τη φάση και το πλάτος έως και δέκα συντελεστών Fourier (Barrow-Green, 2018). Ο Vannevar Bush (1890-1974) θεωρεί ότι είναι πιο ευχάριστο να κατασκευασθεί μια συσκευή αυτού του είδους από το να λαμβάνεται το τελικό προϊόν της (Bush, 1936).

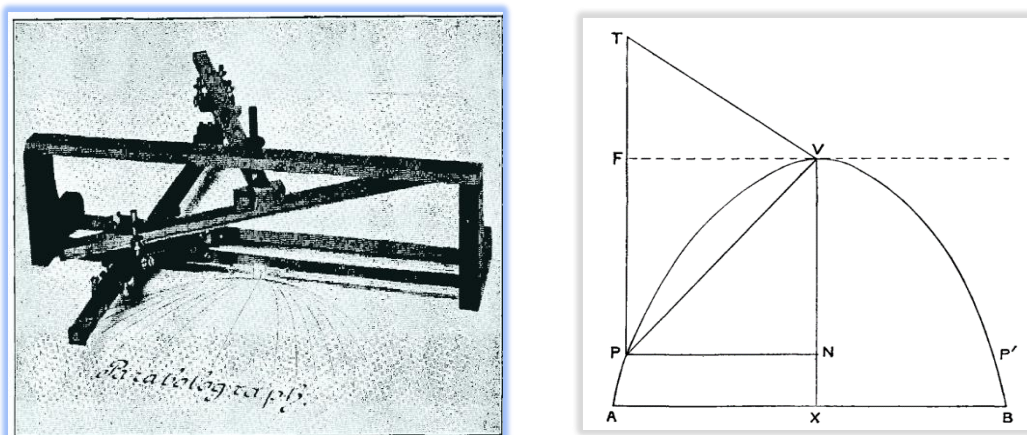


Εικόνα 27 : «ο αρμονικός αναλυτής Henrici (Barrow-Green, 2018)».

Το 1895, ο Αμερικανός μαθηματικός George Bruce Halsted (1853-1922), ο οποίος ήταν φοιτητής του J.J.Sylvester στο Πανεπιστήμιο «Johns Hopkins», πρότεινε (ως κριτικός των σχολικών μαθηματικών εγχειριδίων της Αμερικανικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης) να εισαχθούν οι μαθηματικοί μηχανισμοί-ευθυγράφοι, το «Κύτταρο του Peaucellier-Lipkin» (Peaucellier-Lipkin Cell) και το «Αντιπαραλληλόγραμμα του Hart» (Hart's Contraparallelogram) στα εγχειρίδια Γεωμετρίας (Roberts, 2014). Αξίζει να αναφερθεί πως το 1893 ο Sylvester του είχε προσφέρει ένα πρωτότυπο βιβλίο της «Γεωμετρίας» του Descartes στην γαλλική έκδοση, το οποίο επίσης είχε προσφερθεί στον Sylvester από κάποιον Letenneur το 1847 (Cajori, 1922).

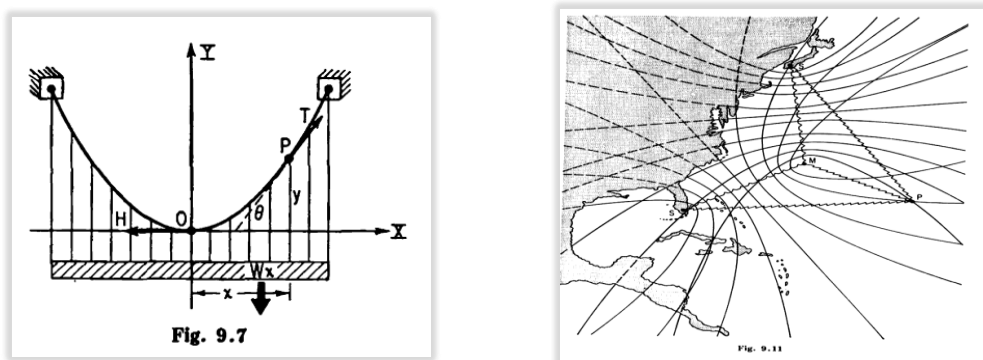
Ο Karl Pearson F.R.S. (1857-1936) τονίζει σε άρθρο του το 1904 την ανάγκη γρήγορης και ακριβούς χάραξης παραβολικών καμπυλών για τη επίλυση προβλημάτων (α) συνεχούς δοκιμίου⁷, (β) καμπυλών ταχύτητας από τις καμπύλες ενέργειας και (γ) σταθερότητας φραγμάτων. Ανέθεσε τον σχεδιασμό κάποιου παραβολογράφου στον καθηγητή Μηχανολογίας H. Payne. Σχεδιάστηκε πάνω σε συγκεκριμένη ιδιότητα της παραβολής που αποτελεί και ισοδύναμο ορισμό της (εικόνα 28). Κατασκευάστηκε από τον Οίκο Coradi στην Ζυρίχη και απετέλεσε «βήμα από την τέλεια θεωρία στην αποτελεσματική πρακτική» και αναφέρεται πλέον ως «παραβολογράφος Payne-Coradi» (Pearson, 1904).

⁷ Συνεχή προβλήματα δοκιμίου (continuous girder problems) είναι προβλήματα που αναφέρονται στον υπολογισμό και τον σχεδιασμό δομημένων στοιχείων όπως δοκοί και δέσμες που τοποθετούνται συνεχόμενα και συνδέονται μεταξύ τους. Συνήθως, πρόκειται για κατασκευές όπως γέφυρες, πύργοι, περιβραχιόνια, όπου τα στοιχεία απότομα μεταβαίνουν από το ένα σημείο στο άλλο και πρέπει να ληφθεί υπόψη η συνέχεια της κατανομής του φορτίου και των αντιδράσεων στη διάρκεια της κατασκευής. Ο υπολογισμός συνεχών δοκιμών απαιτεί την επίλυση διαφορικών εξισώσεων και την εξέταση της συμπεριφοράς των υλικών και των δομικών στοιχείων κατά μήκος του έργου. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση μαθηματικών μεθόδων και αναλύσεων, ώστε να διασφαλιστεί ότι το δομικό στοιχείο θα παραμείνει σταθερό, ασφαλές και ολοκληρωμένο κατά τη διάρκεια της κατασκευής και της λειτουργίας του. Συνολικά, τα συνεχή προβλήματα δοκιμίου αποτελούν σημαντικό κομμάτι της μηχανικής δομών και απαιτούν την εξειδικευμένη γνώση των μηχανικών για την ασφάλεια και την αποδοτικότητα των κατασκευών.



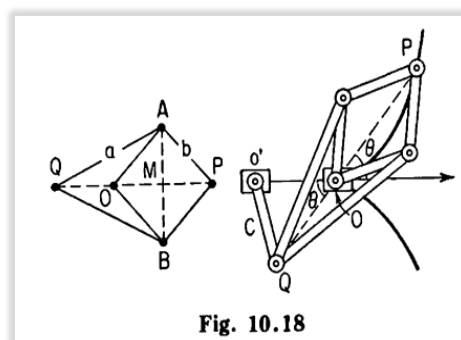
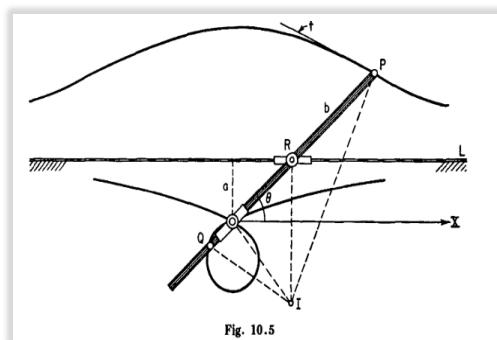
Εικόνα 28 : «παραβολογράφος Payne-Coradi (Pearson, 1904)» & «οπτικό διάγραμμα (Pearson, 1904)».
<https://www.geogebra.org/m/kkxwgdxw>

Λίγα έτη αργότερα, ο Αμερικανός μαθηματικός Robert Yates (1904-1963) περιγράφει ιδιότητες των κωνικών τομών που αποτελούν τη βάση σε κατασκευές φακών σε μικροσκόπια και τηλεσκόπια, σε μορφές καλωδίων για κρεμαστές γέφυρες (εικόνα 29), σε καμάρες στηρίξεων οδογέφυρας και σε χάρτες μεγάλης εμβέλειας της αεροπορικής και θαλάσσιας πλοήγησης (Yates, 1961). Επίσης παρουσιάζει μηχανικές συσκευές (εκκεντροφόρους, γρανάζια και συνδεσμολογίες) και συστήματα Loran (εικόνα 29), τα οποία στηρίζονται στην γεωμετρία και τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, αλλά και υποστηρίζουν την περαιτέρω έρευνα και ανάπτυξη αυτών των μαθηματικών περιοχών.



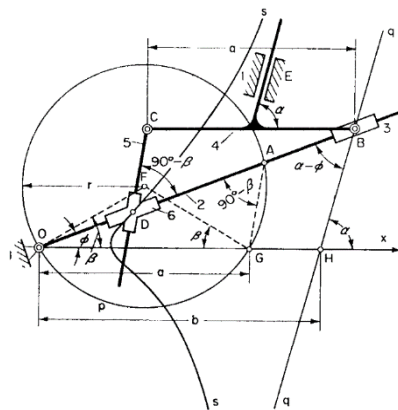
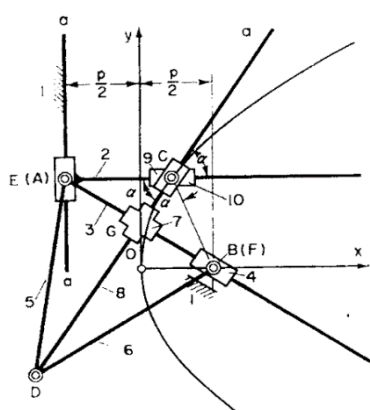
Εικόνα 29 : «κρεμαστή γέφυρα με παραβολικό καλώδιο» (Yates, 1961) & «ηλεκτρονικό σύστημα LORAN και υπερβολική καμπύλη» (Yates, 1961).

Θεωρεί ο Yates ότι η βασική κίνηση των μηχανισμών είναι η κυκλική, και μία μη παραμορφώσιμη ράβδος, αρθρωμένη σε σταθερό σημείο, αρκεί για να την δημιουργήσει με ακρίβεια. Από αυτή τη βασική κίνηση ο σχεδιάζεται μια κινητή δομή για να δώσει, στην «έξοδο» της, κίνηση επιθυμητού χαρακτήρα (εικόνα 30). Τόνισε την σημαντική προσφορά των μηχανισμών για την Γεωμετρία, αλλά και την χρησιμότητα τους στην βιομηχανία (Yates, 1961).



Εικόνα 30 : «μηχανισμός χάραξης «κογχοειδούς» καμπύλης του Νικομήδη (Yates, 1961)» & «μηχανισμός χάραξης κισσοειδούς καμπύλης του Διοκλή (Yates, 1961)».

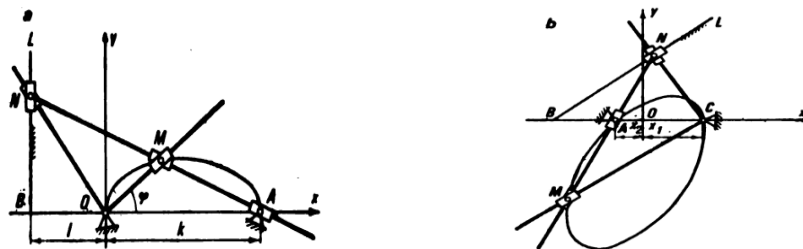
Ο Ρώσος μαθηματικός και μηχανολόγος Ivan Ivanovich Artobolevskii (1905-1977), απέδειξε ότι όλες οι αλγεβρικές συναρτήσεις έχουν μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση με τις συνδεσμολογίες ράβδων (Artobolevskii, 1964) βελτιώνοντας την θεωρία του Descartes καθώς και του Kempe. Επίσης δημοσίευσε πέντε τόμους σχετικά με τους μηχανισμούς και τον μηχανολογικό σχεδιασμό (Artobolevskii, 1976). Ο στόχος της πραγματείας του ήταν να παραδώσει έναν κατάλογο μηχανισμών, περιγράφοντας τους, και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για την δημιουργία πιο σύνθετων μηχανών. Σε αυτή τη συλλογή, βρίσκουμε συνδεσμολογίες (linkages) για την χάραξη των κωνικών τομών, τον «κυβιστή» του Πλάτωνα, την τριχοτομούσα του Descartes, συνδεσμολογία χάραξης της κογχοειδούς καμπύλης του Νικομήδη καθώς και της κισσοειδούς καμπύλης του Διοκλή (εικόνα 31). Μπορούμε επίσης να βρούμε υπερβατικούς μηχανισμούς όπως το πολικό επιτεδόμετρο του Amsler, τον ολοκληρωτικογράφο Abdank-Abakanowicz, όργανα έλξης για την χάραξη της λογαριθμικής καμπύλης και τη σπείρα του Αρχιμήδη.



Εικόνα 31 : «παραβολογράφος van Schooten, (Artobolevskii, 1964, pp. 92)» & « μηχανισμός χάραξης κισσοειδούς του Διοκλή, (Artobolevskii, 1964, pp. 140)»

Σύμφωνα με τον Ρώσο μηχανολόγο E. G. Berger (1970), οι σύγχρονες μέθοδοι σύνθεσης μηχανισμών, σχεδιασμένες για την χάραξη ή για την «φακελλοποίηση» επίπεδων καμπυλών βασίζονται είτε σε διαφορετικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, είτε σε προκαταρκτικό

προσδιορισμό των ιδιοτήτων των καμπυλών που οδηγούν στην κατασκευή τους. Ωστόσο, το πρόβλημα του προσδιορισμού των ιδιοτήτων μιας καμπύλης από τις εξισώσεις της ή της εύρεσης μετασχηματισμών από τους οποίους μπορούν να ληφθούν οι καμπύλες χωρίς τη χρήση των γενικών μεθόδων επίλυσης της εξίσωσης, είναι εξαιρετικά χρονοβόρο και πολύπλοκο. Οι μέθοδοι σύνθεσης μηχανισμών είναι χρήσιμες για την κατασκευή μηχανισμών χάραξης καμπυλών απευθείας από τις εξισώσεις τους χωρίς να λαμβάνονται υπ' όψη οι ιδιότητες των δεδομένων καμπυλών (εικόνα 32). Οι μηχανισμοί που χρησιμοποιούνται για την αναπαραγωγή και την «φακελλοποίηση» καμπυλών απαντώνται συνήθως σε υποσυγκροτήματα διαφόρων αυτόματων μηχανών, σε όργανα ακριβείας και αριθμομηχανές. Ενδεικτικά αναφέρεται η περίπτωση κατασκευής κωνικογράφου γνωρίζοντας μόνο την καρτεσιανή αναπαράστασή της καμπύλης, η οποία λαμβάνει την ενιαία μορφή $y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 - 2px = 0$ σε ορθοκανονικό σύστημα ⁸, όπου το σημείο τομής των αξόνων έχει τοποθετηθεί σε κορυφή της και ο κύριος άξονας συμμετρίας της ταυτίζεται με τον άξονα των τετμημένων (Τασσόπουλος, 1981). (Παράρτημα [7]).



Εικόνα 32 : «ειδική περίπτωση κωνικογράφου $\varepsilon < 1$, χαράσσοντας ημιέλλειψη (Berger, 1970)» & «γενική περίπτωση κωνικογράφου $\varepsilon < 1$, χαράσσοντας έλλειψη (Berger, 1970)» <https://www.geogebra.org/m/axwsv8v2>

Το πρόβλημα του χαρακτηρισμού των μαθηματικών αντικειμένων που μπορούν να κατασκευαστούν με ένα δεδομένο σύνολο οργάνων οδήγησε συχνά σε βαθιές θεωρητικές έρευνες, από την Ευκλείδεια γεωμετρία κατασκευών με κανόνα και διαβήτη, μέχρι το θεώρημα του Shannon (1941) όπου συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να κατασκευασθεί εάν δεν είναι υπερ-υπερβατική⁹. Οι μηχανολόγοι-μηχανικοί στο τέλος του 19^{ου} και στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, ανακάλυψαν ξανά, με ανεξάρτητο τρόπο, τις ίδιες θεωρητικές αρχές και τις ίδιες τεχνικές λύσεις με εκείνες του 18^{ου} αιώνα (Milici, 2015). Η χρήση παλαιών θεωριών των Ludwig Ernst Hans Burmester (1840–1927) και Franz Reuleaux (1829–1905), από μοντέρνους κινηματικούς όπως οι Ferdinand Freudenstein (1926–2006), και Ανδρέας Δημαρόγκωνας (1938–2000), έκαναν δυνατή την ευρεία χρήση των Μαθηματικών στην ανάλυση και σύνθεση επίπεδων ή χωρικών μηχανισμών (Χόνδρος, 1998). Πέρα από τις

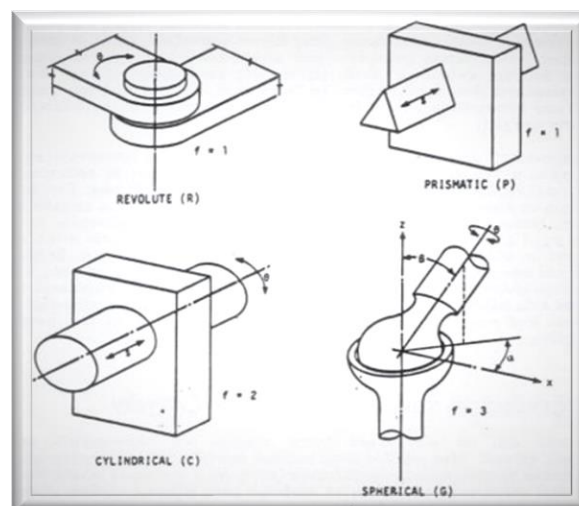
⁸ Το δ είναι η απόσταση της Εστίας από την διευθετούσα της κωνικής τομής, το ε η εκκεντρότητά της και η ποσότητα $\varepsilon\delta$ είναι η παράμετρος p αποτελεί το μισό του μήκους χορδής που είναι κάθετη του κυρίου άξονα διαμέσου κάποιας Εστίας της κωνικής τομής.

⁹ συναρτήσεις Γάμμα ή Ζήτα

καθαρά μαθηματικές και μηχανολογικές εκτιμήσεις, τα όργανα θα πρέπει να θεωρούνται και πολιτιστικά αντικείμενα κάποιας χρονικής περιόδου. Συγχωνεύουν τις προοπτικές του εφευρέτη, του κατασκευαστή και του χρήστη. Σε αυτήν την συσσωρευμένη κληρονομιά αναγνωρίζεται ο θεμελιώδης ρόλος των μαθηματικών μηχανών, μηχανισμών και οργάνων που έχουν σχεδιαστεί από την αρχαιότητα με αιτία την επίλυση προβλημάτων Μαθηματικών και Φυσικής, και βρίσκονται στο σταυροδρόμι Μαθηματικών, Φυσικής, Μηχανολογίας και Τεχνολογίας.

1.2. Περί μηχανών

Κάθε σώμα στον χώρο μπορεί να κάνει έξι κινήσεις (τρεις γραμμικές ως προς τους τρεις νοητούς άξονες συντεταγμένων, και τρεις περιστροφικές γύρω από αυτούς. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το σώμα έχει έξι βαθμούς ελευθερίας. Η άρθρωσή του στη συνέχεια με άλλο σώμα μειώνει τους βαθμούς ελευθερίας. Οι κινηματικές αρθρώσεις ταξινομούνται (α) σύμφωνα με τους βαθμούς ελευθερίας τους, και (β) σύμφωνα με το εάν είναι ισχυρές ή ευαίσθητες αρθρώσεις (εικόνα 33). Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν η περιστροφική, η ολισθητική και η ελικοειδής άρθρωση ενός βαθμού ελευθερίας ή πέμπτης τάξεως, καθώς και η κυλινδρική άρθρωση δύο βαθμών ελευθερίας ή τετάρτης τάξεως και η επίπεδη και σφαιρική άρθρωση με τρεις βαθμούς ελευθερίας ή 3^{ης} τάξεως. Στην δεύτερη κατηγορία, ισχυρή άρθρωση θεωρείται η επίπεδη, η ολισθητική και η περιστροφική, ενώ ως ευαίσθητη μπορεί να θεωρηθεί η κάμα με τον ακόλουθό της καθώς και οι οδοντωτοί τροχοί (Μαυρομάτης, 1985).



Εικόνα 33 : «αρθρώσεις σε μηχανισμούς (Χόνδρος, 1998)»

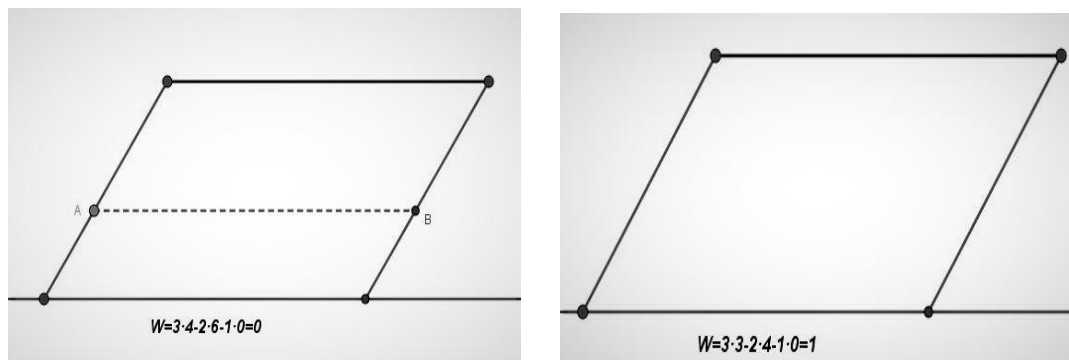
Η «κινηματική αλυσίδα» ορίζεται ως τα διαδοχικώς αρθρωμένα μέλη ενός μηχανισμού, και οι κινηματικές αλυσίδες ταξινομούνται σε (α) απλές κινηματικές αλυσίδες και ορίζονται όσες

έχουν το πολύ δύο αρθρώσεις σε κάθε μέλος τους, (β) σύνθετες κινηματικές αλυσίδες και ορίζονται όσες έχουν μέλος με τρεις αρθρώσεις, (γ) κλειστές κινηματικές αλυσίδες και ορίζονται όσες έχουν τουλάχιστον δύο αρθρώσεις σε κάθε μέλος τους, (δ) ανοιχτές κινηματικές αλυσίδες ορίζονται όσες έχουν κάποιο μέλος με μία άρθρωση. Στη συνέχεια ως «μηχανισμός» ορίζεται η κινηματική αλυσίδα που έχει έναν «κρίκο αναφοράς» ως προς τον οποίο οι άλλοι κρίκοι εκτελούν μονοσήμαντα ορισμένη κίνηση, έχοντας όμως ήδη δεδομένη κίνηση για κάποιον ή κάποιους κρίκους (οι οποίοι καλούνται «είσοδος» ή «κινητήρια μέλη»). Ο κρίκος που δίνει την κίνηση για την οποία έχει φτιαχτεί ο μηχανισμός, ορίζεται ως «έξοδος» ή «κινούμενο μέλος». Ο κρίκος αναφοράς καλείται και «σώμα» και συνήθως είναι ακίνητο μέλος της αλυσίδας (Μαυρομάτης, 1985).

Βαθμός ελευθερίας ή βαθμός κινητικότητας (mobility) ενός μηχανισμού είναι το πλήθος των κρίκων των οποίων η δεδομένη κίνησή τους, κινεί μονοσήμαντα (ως προς το σώμα) όλους τους υπόλοιπους κρίκους. Υπολογίζονται οι βαθμοί ελευθερίας επίπεδων μηχανισμών σύμφωνα με την εξίσωση «Kutzbach ή Chebysseva». Κάθε μέλος ενός επίπεδου μηχανισμού μπορεί να κάνει το πολύ τρεις ανεξάρτητες κινήσεις στο επίπεδο. Επίσης οι μόνες αρθρώσεις που διατηρούν την επίπεδη κίνηση είναι οι 5^{ου} και 4^{ου} βαθμού (δηλαδή με ένα ή δύο βαθμούς ελευθερίας). Η εξίσωση Kutzbach-Chebysseva $W = 3(n - 1) - 2f_1 - f_2$, δίνει τους βαθμούς ελευθερίας επίπεδου μηχανισμού, όπου n το πλήθος των μελών του μαζί με τον κρίκο αναφοράς ή σώμα, f_1 το πλήθος των αρθρώσεων με έναν βαθμό ελευθερίας ή 5^{ης} τάξεως, και f_2 το πλήθος των αρθρώσεων με δύο βαθμούς ελευθερίας ή 4^{ης} τάξεως. Ουσιαστικά, από το μέγιστο πλήθος βαθμών ελευθερίας των μελών της κινηματικής αλυσίδας, αφαιρείται το πλήθος των επίπεδων δεσμεύσεων που δημιουργούν οι αρθρώσεις μεταξύ τους (Μαυρομάτης, 1985). Μία άρθρωση ορίζεται ως «κατωτέρας τάξεως» όταν μεταξύ των αρθρωμένων μελών της, σημείο, ευθεία ή επίπεδο συνεργάζεται αντιστοίχως με σημείο, ευθεία ή επίπεδο. Επίσης ορίζεται ως «ανωτέρας τάξεως» όταν μεταξύ των αρθρωμένων μελών, καμπύλη ή επιφάνεια συνεργάζεται, αντιστοίχως με καμπύλη ή επιφάνεια.

Για να αναλυθεί η κινητικότητα ενός μηχανισμού πρέπει να αποτυπωθεί ο μηχανισμός. Η «μονογραμμική απεικόνιση» αποτελεί την απλοποιημένη αναπαράσταση σύνθετων μηχανισμών. Σε απλούς μηχανισμούς γίνεται κατανοητός ο τρόπος λειτουργίας και η κινητικότητα τους. Σε σύνθετους μηχανισμούς, αυτό δεν είναι προφανές και απαιτείται η διατύπωση ενός συστηματικού τρόπου για τον υπολογισμό της κινητικότητας του. Όμως σε μερικές περιπτώσεις επίπεδων μηχανισμών υπάρχουν «περιττά μέλη» τα οποία δεν προσφέρουν κάτι στην κινητικότητα του, και εάν δεν γίνουν αντιληπτά πιθανόν να προκύψει ότι δεν έχει βαθμούς ελευθερίας ενώ ο μηχανισμός έχει έναν βαθμό ελευθερίας (εικόνα 34).

Αυτή η συνδεσμολογία (linkage) έχοντας παραλληλόγραμμα όλα τα τετράπλευρα που εμφανίζονται, και με περιστροφικές αρθρώσεις σε όλες τις κορυφές τους, το μέλος AB είναι περιττό και δεν πρέπει να υπολογισθεί ως κρίκος της (Χόνδρος, 1998).

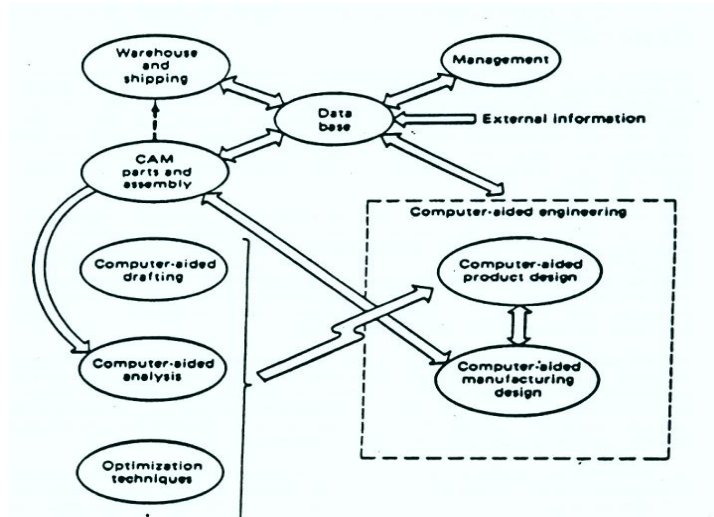


Εικόνα 34 : Συνδεσμολογία (linkage) με περιττό μέλος AB & συνδεσμολογία χωρίς περιττό μέλος.

Στους επίπεδους μηχανισμούς εφαρμόζεται η «κινηματική ανάλυση» η οποία διερευνά την τροχιά, την μεταβολή της ταχύτητας και την μεταβολή της επιτάχυνσης των μελών της αλυσίδας. Στη συνέχεια εφαρμόζεται η «δυναμική ανάλυση» η οποία διερευνά τις δυνάμεις που ενεργούν στην αλυσίδα επηρεάζοντας την κίνησή της καθώς και την ποιότητα λειτουργίας. Οι σπουδαιότεροι μέθοδοι κινηματικής ανάλυσης επίπεδων μηχανισμών είναι (α) η γραφοαναλυτική μέθοδος, (β) η αλγεβρική μέθοδος, (γ) η μέθοδος ανάλυσης στο μιγαδικό επίπεδο (Μαυρομάτης, 1985).

Όσον αφορά τον σχεδιασμό μηχανών και μηχανισμών καθώς και την προσομοίωση τους, υπάρχει πλέον μεγάλη διευκόλυνση λόγω της χρήσης ηλεκτρονικών υπολογιστών και μπορούν να εφαρμοσθούν υπολογιστικές μέθοδοι οι οποίες θα απαιτούσαν τεράστιο αριθμό πράξεων, καθώς και χρονοβόρες και κοστοβόρες δοκιμές σε διάφορες φάσεις της κατασκευής (Χόνδρος, 1998). Τα συστήματα CAD/CAM/CAE είναι βασικά προϊόντα της Βιομηχανίας Γραφικών (Computer Graphics Industry) που έχουν ως κύριο αντικείμενο τη σύνθεση, ανάλυση και επεξεργασία εικονικών παραστάσεων (εικόνα 35). Οι όροι CAD/CAM/CAE είναι ακρωνύμια των *Computer-Aided-Design*, *Computer-Aided-Manufacturing* & *Computer-Aided-Engineering*. Επειδή οι όροι σχεδιασμός (designing) και τεχνική μελέτη (engineering) εν μέρει ταυτίζονται, ενώ συγχρόνως αναφέρονται τόσο στην εκτέλεση υπολογισμών, όσο και στην παραγωγή σχεδίων, έχει προκύψει ένας εννοιολογικός επαναπροσδιορισμός των παραπάνω όρων, ο οποίος έχει επικρατήσει στη διεθνή ορολογία. Όταν χρησιμοποιείται ηλεκτρονικός υπολογιστής τότε αντιστοιχεί σε *Computer-Aided-Engineering* (CAE) και όταν παράγονται μόνο σχέδια, αντιστοιχεί σε *Computer-Aided-Drafting* (CAD). Όταν συμβαίνουν και οι δύο διαδικασίες αναφέρεται ως *Computer-Aided-Design and Drafting* (CADD). Στην περίπτωση χρήσης του υπολογιστή για διακίνηση πληροφοριών και παραγωγή καταλόγων

έχουμε *Computer-Aided-Administration* (CAA). Τέλος, *Computer-Aided-Engineering* (CAE) είναι το σύνολο των παραπάνω, δηλαδή: $CAE = CAD + CA + CADD + CAA$. Χρησιμοποιείται το CAE για αυτόματη παραγωγή διαφόρων προϊόντων οπότε μιλάμε για *Computer-Aided-Manufacturing* (CAM) (Χόνδρος, 1998).



Εικόνα 35 : Οργανόγραμμα CAD-CAM» (Χόνδρος, 1998, σ. 44)

Καθώς ο σχεδιασμός με τη βοήθεια υπολογιστή είναι πλέον πραγματικότητα, η αντίστροφη μηχανική (reverse engineering) έχει γίνει μια βιώσιμη μέθοδος για τη δημιουργία ενός τρισδιάστατου εικονικού μοντέλου ενός υπάρχοντος φυσικού μέρους, με 3D CAD, CAM, CAE ή άλλο λογισμικό. Η διαδικασία «αντίστροφης μηχανικής» περιλαμβάνει τη μέτρηση ενός αντικειμένου και στη συνέχεια την ανακατασκευή του ως μοντέλο 3D. Το φυσικό αντικείμενο μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας τεχνολογίες τρισδιάστατης σάρωσης, όπως CMM, σαρωτές λέιζερ, δομημένους ψηφιοποιητές φωτός ή βιομηχανική CT Scanning (υπολογιστική τομογραφία). Η αντίστροφη μηχανική χρησιμοποιείται για να φέρει την υπάρχουσα φυσική γεωμετρία σε περιβάλλον ανάπτυξης ψηφιακού προϊόντος. Χρησιμοποιείται (α) για την εύρεση του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί ένα προϊόν (β) για το τι κάνει και για τα συστατικά του (γ) για τον υπολογισμό του κόστους και (δ) για τον εντοπισμό ενδεχόμενης παραβίασης των διπλωμάτων ευρεσιτεχνίας (Paltheru, 1997).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Μαθηματικές μηχανές στην Εκπαίδευση

2.1. Καμπύλες και Συναρτήσεις

Ο μακραίωνος αγώνας του ανθρώπου για την επίλυση των προβλημάτων του και τη θεμελίωση των συλλογισμών του αναδεικνύει την διαρκή παρουσία μηχανών. Τα Μαθηματικά, η Φυσική, η Μηχανολογία, η Φιλοσοφία και η Εκπαίδευση έχουν μεταξύ τους διαρκή ώσμωση, η οποία ερευνάται διαρκώς. Οι μαθηματικοί και οι μηχανικοί φαίνεται να διαφωνούν σε όλα για το ευρύ κοινό: πρέπει να περιγραφεί το εμβαδόν ενός κύκλου χρησιμοποιώντας τον καθαρό τύπο πr^2 ή σε σχέση με την πιο εύκολα μετρήσιμη διάμετρο και με τον τύπο $\frac{\pi d^2}{4}$; Ωστόσο, πάντα θα υπάρχουν μαθηματικοί που ενδιαφέρονται για πρακτικά προβλήματα και μηχανικοί με σοβαρό πάθος για τα Μαθηματικά (Sangwin, 2011).

Οι Νικομήδης, Αρχιμήδης, Ήρωνας, Barozzi, Cavalieri, Descartes, van Schooten, Huygens, Newton, Leibnitz, Eüler, Suardi, Poleni, Chebyshev, Kempe, Sylvester, Kempe, Reaulex, Bush, Artobolevskii, Δημαρόγκωνας και πολλοί άλλοι μαθηματικοί, φιλόσοφοι και μηχανικοί είχαν την ιδέα να εισάγουν στη «μηχανή» εκείνα τα μέρη των διαδικασιών της ανθρώπινης σκέψης που είναι εγγενώς μηχανικά και επαναλαμβανόμενα, την «αυτοματοποιημένη» συλλογιστική του Descartes, την «μέθοδο και την ακρίβεια» (Bos, 2001). Ο Dennis (1995) τονίζει ότι οι μηχανικές συσκευές χάραξης καμπυλών, διαδραμάτισαν θεμελιώδη ρόλο για την δημιουργία νέων συμβολικών γλωσσών, όπως η Άλγεβρα και ο Λογισμός καθώς και για την εδραίωση τους. Οι εφαπτόμενες καμπυλών, το εμβαδόν της περιοχής κάτω από τόξο καμπύλης καθώς και το μήκος αυτού του τόξου είχαν κατασκευασθεί (σε γεωμετρικές καμπύλες) πολύ πριν υπολογισθούν με τις σύγχρονες αλγεβρικές μέθοδοι.

Ο μαθηματικός **Βένιος Αγγελόπουλος** (1946-2023) σε ομιλία του το 1997 σε συνέδριο της Ε.Μ.Ε.¹⁰ επισημαίνει την υποχώρηση των καθαρά γεωμετρικών μεθόδων με αντιπροσωπευτικό παράδειγμα την εξαφάνιση των λογαριθμικών κανόνων (slide rules) από τους μηχανικούς καθώς και την εξαφάνιση της παρουσίας των γραναζιών από τα ρολόγια. Θεωρεί ότι η Γεωμετρία, η οποία συνέβαλε καθοριστικά στην ανάπτυξη και «χειραφέτηση» των Μαθηματικών, μεταφέρεται ηθελημένα και σταδιακά από το εκπαιδευτικό σύστημα στο «μουσείο των επιστημών». Αντί για τις επιφάνειες, διδάσκονται με υπερβάλλουσα

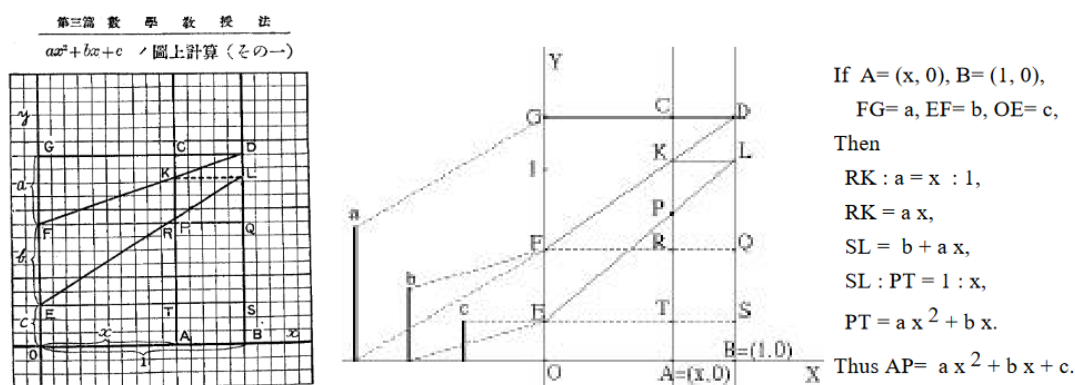
¹⁰ Εκείνη την περίοδο, το Ελληνικό Υπουργείο Παιδείας ξεκίνησε την διαδικασία κατάργησης της Γεωμετρίας από τα σχολεία.

αυστηρότητα, τα υποσύνολα του R^3 χωρίς να υπάρχει πλέον άσκηση του νου αλλά μόνο αποστήθιση (Αγγελόπουλος, 2007).

Τα Μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν ότι βασίζονται στον αλγεβρικό συμβολικό χειρισμό διακριτών στοιχείων και σε γεωμετρικές κατασκευές μέσω εξιδανικευμένων και συνεχών λειτουργιών. Το πλαίσιο διδασκαλίας της Αριθμητικής, της Άλγεβρας, της Γεωμετρίας και της Ανάλυσης είναι αφαιρετικό και συνήθως απουσιάζει το πραγματικό πρόβλημα ή αντικείμενο. Εδώ και πολλές δεκαετίες, η κομβική έννοια της «συνάρτησης» παρουσιάζεται ως μηχανή «εισόδου-εξόδου» ή σαν ένα είδος «αντιστοίχισης». Η γραφική παράσταση χαράσσεται προσεγγιστικά μέσω ένωσης σημείων και όχι με την χρήση γεωμετρικού οργάνου. Υπάρχει σύγχυση για το εάν συνάρτηση είναι η εξίσωσή της ή η γραφική της παράστασή. Εξαίρεση αποτελεί κάποιο ευθύγραμμο ή κυκλικό τμήμα που χαράσσονται «νωχελικά» από τους μαθητές με χάρακα και διαβήτη. Θεωρείται πλέον «ξεπερασμένη» η χρήση πραγματικών γεωμετρικών οργάνων. Είναι ενθαρρυντικό που έχουν αναπτυχθεί λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας τα οποία δίνουν την γραφική παράσταση με σχετική ακρίβεια, αλλά το αποτέλεσμα προκύπτει μέσα από την εισαγωγή της αλγεβρικής της εξίσωσης. Όμως μεσολαβεί ένα άγνωστο συνήθως περιβάλλον για τον χρήστη. Μέσω της οθόνης είναι δυνατός κάποιος κινηματικός μετασχηματισμός της στατικής Γεωμετρίας, και οι μαθητές μπορούν να βιώσουν την αλγεβρική επιβεβαίωση ενός γεωμετρικού αποτελέσματος (Dennis, 1995). Από την διδασκαλία στο λύκειο της αναλυτικής Γεωμετρίας και του Λογισμού, αυτό που μάλλον εμπεδώνουν οι μαθητές είναι ότι «οι γραφικές παραστάσεις δημιουργούνται από εξισώσεις». Συγχέουν σε μεγάλο βαθμό, την έννοια της καμπύλης και την έννοια της γραφικής παράστασης, χωρίς να έχουν συνειδητοποιήσει ότι οι δύο έννοιες έχουν χρονική διαφορά αιώνων. Μερικές φορές δίνεται ένας πίνακας αριθμητικών δεδομένων και μετά ένα σύνολο συντεταγμένων και στη συνέχεια μία γραφική παράσταση κατά προσέγγιση. Οι «άλλοι διαβήτες» κατά τον Descartes της παραβολής, της έλλειψης, της υπερβολής και της λογαριθμικής-εκθετικής καμπύλης είναι πλέον κάποιες εξισώσεις δύο μεταβλητών. Δεν υπάρχει παρουσίαση της καμπύλης ως πρωταρχικού αντικειμένου μέσω κάποιου είδους φυσικής γεωμετρικής δράσης, που στη συνέχεια αναδύονται γεωμετρικές ιδιότητες συγκεκριμένων μεγεθών της καμπύλης, όπως τετμημένη, τεταγμένη, εφαπτομένη, υποεφαπτομένη, τέμνουσα και υποτέμνουσα. (Dennis, 1995). Επίσης, δεν αντιμετωπίζεται η συνάρτηση ως «συμμεταβολή» μεγεθών όπου με αυτήν την οπτική η συνάρτηση αποτελεί ένα ζεύγος μεγεθών που καταγράφονται ταυτόχρονα σε στήλες πίνακα, βρίσκοντας τρόπους επέκτασης ή παρεμβολής τιμών ή υπολογισμού κάποιας σχέσης σύνδεσής των. Δεν γίνεται αντιληπτό ότι αυτές οι δύο αντιλήψεις για την «συνάρτηση» έχουν διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στη γένεση της αναλυτικής Γεωμετρίας και του Λογισμού (Confrey & Smith, 1995).

Τον 17^ο και 18^ο αιώνα οι καμπύλες θεωρούνταν ότι έχουν μια πρωταρχική ύπαρξη ανεξάρτητα από οποιαδήποτε ανάλυση των αριθμητικών ή αλγεβρικών τους ιδιοτήτων. Οι εξισώσεις δεν χάρασσαν καμπύλες όπως συμβαίνει σήμερα, αλλά οι καμπύλες δημιουργούσαν εξισώσεις. Όταν ο Descartes δημοσίευσε τη «Γεωμετρία» του, προέκυψαν οι αλγεβρικές εξισώσεις πολλών καμπυλών. Προηγείτο περιγραφή σχεδιασμού μέσω οπτικού διαγράμματος ή μέσω μαθηματικής μηχανής και στη συνέχεια αναλύοντας τις γεωμετρικές και μηχανολογικές ενέργειες που προηγήθηκαν, έφτανε σε μια εξίσωση που προέκυπτε μέσω της εισαγωγής πλαγίου ή ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (Dennis, 1995). Στη συνέχεια χρησιμοποίησε αυτές τις εξισώσεις για να ταξινομήσει τις γεωμετρικές καμπύλες (Lenoir, 1979) και να τις χρησιμοποιήσει για περαιτέρω γεωμετρικές κατασκευές. Αργότερα άλλαξε η αντίληψη περί καμπυλών και Γεωμετρίας, χρησιμοποιώντας αναλυτικο-αλγεβρικά μέσα (Bos, 1988) και έχει εδραιωθεί πλέον σε όλους μία «μεγάλη εμπιστοσύνη» για την αλγεβρική αναπαράσταση των καμπυλών.

Στην Ιαπωνία γύρω στο 1920 έγινε προσπάθεια με τον σχεδιασμό και την κατασκευή συνδεσμολογιών (linkages) να διδαχθεί ο Λογισμός σε μαθητές και μαθήτριες 15 ή 16 ετών (Isoda, 1998). Όμως η εξέλιξη του Β' Παγκοσμίου πολέμου, ανέτρεψε το εκπαιδευτικό πρόγραμμα της Ιαπωνίας και τα περισσότερα αρχεία και εργαλεία καταστράφηκαν. Μέσω ομοιότητας τριγώνων και μέσω παραλλήλων ράβδων είναι δυνατή η κατασκευή της δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής καμπύλης ή αλλιώς ενός παραβολικού τόξου (εικόνα 36).



Εικόνα 36: από το βιβλίο του Minoru Kuroda (1927) και επανασχεδιασμός από τον Isoda (1998)
<https://www.geogebra.org/m/n3qrxwhf>

2.2. Χωρική ικανότητα

Η γνωστική ικανότητα κάποιου να συλλαμβάνει, να θυμάται, να δημιουργεί και να διαχειρίζεται νοητικές αναπαραστάσεις αντικειμένων, διαγραμμάτων, χαρτών και χωρικών σχέσεων για την επίλυση προβλημάτων ονομάζεται χωρική ικανότητα (Spatial Ability). Η χωρική ικανότητα έχει οριστεί από τους Linn και Petersen (1985) ως μια γνωστική ικανότητα

που εμπλέκεται στην αναπαράσταση, τον μετασχηματισμό, τη δημιουργία και την ανάκληση συμβολικών μη γλωσσικών πληροφοριών. Ο Carroll (1993) ανίχνευσε πέντε κύριες ομάδες χωρικής ικανότητας: χωρική οπτικοποίηση, χωρικές σχέσεις, ταχύτητα κλεισίματος, ευελιξία κλεισίματος και αντιληπτική ταχύτητα. Τρεις άλλοι παράγοντες έχουν επίσης εντοπιστεί σε μια ξεχωριστή μελέτη: ο χωρικός προσανατολισμός, η δυναμική χωρική ικανότητα και η περιβαλλοντική ικανότητα (Yilmaz, 2009), ενώ οι παράγοντες οπτικοποίησης και προσανατολισμού (spatial visualization/spatial orientation.) προέκυψαν από μια βιβλιογραφική ανασκόπηση του McGee (1979). Η έρευνα δείχνει ότι η χωρική ικανότητα είναι ισχυρός προγνωστικός δείκτης επιτυχίας στην Επιστήμη, την Τεχνολογία, τη Μηχανολογία, και τα Μαθηματικά (S.T.E.M.).

Στη βιβλιογραφία, διάφοροι όροι αναφέρονται στη χωρική ικανότητα, όπως νοητική ή οπτική εικόνα /mental or visual image (Presmeg, 1986), οπτικοποίηση/ visualization (Yakimanskaya, 1991) και χωρική σκέψη/spatial thinking (Clements,1998; Hauptman, 2010). Στην βιβλιογραφία, αυτοί οι όροι χρησιμοποιούνται εναλλακτικά με πιο συνηθισμένο τον όρο «οπτικοποίηση» που σύμφωνα με τον Gutiérrez (1996), πρόκειται για ένα είδος συλλογιστικής δραστηριότητας που βασίζεται στη χρήση οπτικών ή χωρικών στοιχείων, είτε διανοητικά, είτε ενσώματα». Ο Gutiérrez (1996, σελ.10) υποστηρίζει ότι για τη δημιουργία νοητικών εικόνων τα άτομα θα πρέπει να είναι ικανά για:

- Αναγνώριση μιας συγκεκριμένης φιγούρας απομονώνοντάς την από ένα σύνθετο φόντο (Figure-ground perception).
- Αντιληπτική σταθερότητα (Perceptual constancy), δηλαδή ικανότητα να αναγνωρίζουν ότι ορισμένες ιδιότητες ενός αντικειμένου (πραγματικές ή σε νοερή εικόνα) είναι ανεξάρτητες από το μέγεθος, το χρώμα, την υφή ή τη θέση και τον προσανατολισμό.
- Νοητική εναλλαγή (Mental rotation), δηλαδή ικανότητα παραγωγής δυναμικών νοητικών εικόνων και να αναγνωρίζουν μια χωρική διαμόρφωση σε κίνηση.
- Αντίληψη των χωρικών σχέσεων (Perception of spatial relationships), δηλαδή ικανότητα συσχέτισης πολλών αντικειμένων, εικόνων, και/ή νοερών εικόνων μεταξύ τους ή ταυτόχρονα προς τον εαυτό τους.
- Οπτική διάκριση (Visual discrimination), δηλαδή ικανότητα σύγκρισης πολλών αντικειμένων, εικόνων ή/και νοητικών εικόνων για να εντοπίσουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ τους.

Σύμφωνα με τον Duval, «η νοητική επεξεργασία των μαθηματικών αντικειμένων (εννοιών), εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο σημειωτικό σύστημα αναπαράστασης. Ένα άτομο μπορεί να έχει έγκυρη και ικανή πρόσβαση σε μια μαθηματική έννοια, μόνον αν διαθέτει

τουλάχιστον δύο διαφορετικά και ανεξάρτητα σημειωτικά συστήματα γι' αυτή την έννοια, και αν μπορεί να περνά χωρίς δυσκολία από το ένα σύστημα στο άλλο» (Duval 1995, σελ. 22).

Ιδιαίτερα σε ότι αφορά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, η Yakimanskaya (1991) ισχυρίζεται ότι η δημιουργία νοητικών εικόνων είναι δυνατή λόγω της συσσώρευσης αναπαραστάσεων που χρησιμεύουν ως σημείο εκκίνησης. Η χρήση λογισμικού τρισδιάστατης δυναμικής γεωμετρίας σε συνδυασμό με τρισδιάστατο χειραπτικό υλικό έχει την δυνατότητα να παρέχει στους μαθητές ποικιλία και πλούτο χωρικών εικόνων. Όσο πιο πλούσιο και ποικιλόμορφο είναι το απόθεμα των χωρικών αναπαραστάσεων, τόσο πιο εύκολο είναι για τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν εικόνες για την επίλυση προβλημάτων. Είναι πλέον ευρέως αποδεκτό ότι η χρήση πολλαπλών μορφών αναπαράστασης (π.χ. οπτικές ή διακριτές-concrete) διευκολύνει τους μαθητές στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (π.χ. Brenner et al., 1997) και οδηγεί στη βελτίωση των μαθηματικών τους ικανοτήτων και την ανάπτυξη δεξιοτήτων συλλογισμού και επίλυσης προβλήματος (Krutetskii, 1976; Yakimanskaya, 1991; Greeno & Hall, 1997; Presmeg, 1999).

Αν και η όραση είναι η κύρια αισθητηριακή οδός που χρησιμοποιείται από τους ανθρώπους προκειμένου να εξερευνούν και να αναγνωρίζουν αντικείμενα στο περιβάλλον τους, η απτική αντίληψη παρέχει επίσης σημαντικές πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά του άμεσου, δηλαδή του προσιτού περιβάλλοντος κάποιου. (Chow et al. 2022). Σε αντίθεση με τη χωρική ικανότητα, η απτική ικανότητα/αντίληψη δεν περιγράφεται εκτενώς στην επιστημονική βιβλιογραφία, αλλά αντιπροσωπεύει ένα ταχέως εξελισσόμενο πεδίο (Ledermam & Klatzky, 2009). Ενώ η χωρική ικανότητα συχνά εξετάζεται στο πλαίσιο της νοητικής ερμηνείας των οπτικών ερεθισμάτων, οι αισθήσεις της αφής μπορούν επίσης να προσφέρουν πληροφορίες θέσης και χωρικής σχέσης. «Απτική αντίληψη» ορίζεται ως η ενεργή αισθητηριακή αλληλεπίδραση με τα φυσικά αντικείμενα (Loomis & Lederman, 1986; Heller & Ballesteros, 2006; Ballesteros & Heller, 2008; Grunwald, 2008).

Η απτική αντίληψη έχει διερευνηθεί σε πολλά πεδία όπως τις επιστήμες γενικά (Jones et al., 2006), τη γνωσιακή ψυχολογία (Crandall & Karadoğan, 2021), φυσική (Han & Black, 2011), μηχανική (Study NE, 2002; Skulmowski et al., 2016), την ανατομία (Kinnison et al., 2009; Reid et al., 2019; Shapiro et al., 2023) και τις επιστήμες υγείας (Urbankova et al., 2013; Bakr et al., 2014; Shahriari-Rad et al., 2017), Medicine (Zhou et al., 2007; Εσκομπάρ-Καστίγιος et al., 2016)

Διάφορες διερευνητικές χειραπτικές μέθοδοι διαπίστωσης ιδιοτήτων ενός αντικειμένου έχουν εντοπιστεί σε ανθρώπους, συμπεριλαμβανομένης της πλάγιας κίνησης (υφή), της πίεσης (σκληρότητα), της στατικής επαφής (θερμοκρασία), του μη υποστηριζόμενου

κρατήματος (βάρος), του περιβλήματος (σφαιρικό σχήμα, όγκος) και της μεθόδου ακολουθίας του περιγράμματος (ακριβές σχήμα, όγκος) (Lederman & Klatzky, 1987, 2009). Αυτές οι μη αυτόματες μέθοδοι συμβάλλουν στη συλλογή πληροφορίας θέσης και χωρικής σχέσης (Lederman & Klatzky, 2009). Η όραση και η αφή εμπλέκονται και οι δύο στη χωρική αντίληψη. Η συσχέτιση της αφής με την όραση έχει μελετηθεί (Loomis et al., 1991; Reuschel et al., 2010). Έχει προταθεί ότι οι πληροφορίες που προέρχονται από οπτικές αισθητηριακές εισροές μπορεί να είναι ανεξάρτητες από αυτές που λαμβάνονται από απτικές αισθητηριακές εισροές, αφού η απτική και η οπτική αντίληψη έχουν διαφορετικές προσαγωγές οδούς στο νευρικό σύστημα.

Συμπερασματικά, η διαδικασία της χωρικής σκέψης μπορεί να περιλαμβάνει διάφορα στάδια οπτικοποίησης και τη δημιουργία νοητικών εικόνων. Υποθετικά, μπορεί να ειπωθεί ότι η χωρική σκέψη μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να εκτελέσουν ένα γεωμετρικό συλλογισμό, αν ο γεωμετρικός συλλογισμός είναι μια σύνθετη διαδικασία, που η οπτικοποίηση είναι μόνο ένα μέρος της. (Duval, 1998).

Σύμφωνα με τον Duval (1998), οι μαθητές θα πρέπει να εφαρμόζουν τρεις τύπους γνωστικής διαδικασίας κατά την εκμάθηση γεωμετρικών εννοιών: οπτικοποίηση, κατασκευή και συλλογισμός. Με άλλα λόγια, αυτό που καλείται ως «γεωμετρική σκέψη», περιλαμβάνει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών.

- Διαδικασίες «οπτικοποίησης» (ή νοερής απεικόνισης), που σχετίζονται με τη νοερή αναπαράσταση μιας γεωμετρικής έννοιας ή την ευρετική/λειτουργική διερεύνηση μιας σύνθετης γεωμετρικής κατάστασης
- Διαδικασίες «κατασκευής» με χρήση εργαλείων, και
- Διαδικασίες «συλλογισμού», ιδιαίτερα λεκτικές, για την επέκταση της γνώσης, την επεξήγηση, ή την απόδειξη.

Αυτές οι τρεις διαδικασίες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και οι αποτελεσματική τους εφαρμογή στην τάξη υποστηρίζει την ικανότητα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών-τριών. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές-τριες ως προς την κατανόηση και επεξεργασία των μαθηματικών εννοιών, οφείλονται κυρίως σε δυσκολίες οπτικοποίησης.

Η ανάπτυξη και η βελτίωση της χωρικής ικανότητας θεωρείται ένας από τους βασικούς στόχους της Γεωμετρίας ήδη από το δημοτικό σχολείο, και αποτελεί σημαντική προϋπόθεση για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Τα επίπεδα χωρικών ικανοτήτων έχουν συχνά συνδεθεί με υψηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά γενικά ή ειδικά στη Γεωμετρία. Για παράδειγμα, ο Battista (1990) έδειξε ότι η χωρική οπτικοποίηση είναι ένας σημαντικός παράγοντας στη μάθηση της Γεωμετρίας ενώ ο Tartre (1990) υποστήριξε ότι η ικανότητα

χωρικού προσανατολισμού σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

Σύμφωνα με το μοντέλο των Pierre & Dina van Hiele, ο μαθητής υποβοηθούμενος από κατάλληλες διδακτικές εμπειρίες περνάει από διαδοχικά επίπεδα γεωμετρικής σκέψης ξεκινώντας από την αναγνώριση των σχημάτων ως σύνολο (επίπεδο 0), προχωρώντας στην ανακάλυψη των ιδιοτήτων των σχημάτων και στον άτυπο συλλογισμό σχετικά με αυτά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους (επίπεδα 1 και 2) και καταλήγοντας σε μια αυστηρή μελέτη της αξιωματικής γεωμετρίας (επίπεδα 3 και 4) (Fuys, Geddes & Rosamond, 1984). Επίσης όλοι οι μαθητές περνούν διαδοχικά από τα επίπεδα van Hiele για κάθε γεωμετρική έννοια που μαθαίνουν και κάθε μαθητής μπορεί να βρίσκεται σε διαφορετικά επίπεδα για διαφορετικές έννοιες. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ανακαλύπτει το επίπεδο του μαθητή και να προσαρμόζει την διδασκαλία του (Burger & Shaughnessy, 1986).

2.3. Η Θεωρία της Σημειωτικής Διαμεσολάβησης

Τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν δημιουργηθεί σε διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια που αναδύονται κατά τη διάρκεια της ιστορικής εξέλιξης των Μαθηματικών. Τα τελευταία τριανταπέντε έτη στη Μαθηματική Εκπαίδευση έχει γίνει προσπάθεια εισαγωγής της «εργαλειακής γένεσης» και της «σημειωτικής διαμεσολάβησης». Τα τεχνουργήματα (artefacts ή tools) καθώς και τα λογισμικά μαθηματικών είναι στο επίκεντρο της συζήτησης (Kilpatrick, 2013).

2.3.α. Κατασκευή της γνώσης

Το θεωρητικό πλαίσιο της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (Θ.Σ.Δ. ή T.S.M.) αναπτύχθηκε με σκοπό να περιγράψει ένα μοντέλο διδασκαλίας και μάθησης όπου η προσοχή επικεντρώνεται στις σημειωτικές διαδικασίες που σχετίζονται με τη χρήση πολιτιστικών αντικειμένων (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Η εξέλιξη των Μαθηματικών συνδέεται με την εξέλιξη διαφόρων σημειωτικών συστημάτων που είχαν ως βάση την «γλώσσα» και την «εικόνα». Από τη γραπτή γλώσσα, προέκυψαν τα συμβολικά συστήματα και η αλγεβρική γραφή, και από αυτήν οι τυπικές γλώσσες. Από την εικόνα, προέκυψαν τα γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση εργαλείων, τα σχήματα σε προοπτική, και οι γραφικές παραστάσεις με στόχο να μεταφραστούν οι γραμμές τους σε εξισώσεις (Κολέζα, 2003). Παράδειγμα αποτελούν οι «ισο-υποεφαπτομενικές» καμπύλες που ορίστηκαν ως λογαριθμικές-εκθετικές (Lenoir, 1979). Κάθε σημειωτικό σύστημα εξασφαλίζει ιδιαίτερους τρόπους αναπαράστασης και τρόπους μαθηματικής σκέψης (Κολέζα, 2003). Η Jere Confrey χρησιμοποιώντας μια ριζοσπαστική κονστρουκτιβιστική φιλοσοφία, βασισμένη αρχικά στις ιδέες των Jean Piaget (1896-1980) και Ernst von Glasersfeld (1917-2010), θεωρεί την κατασκευή της γνώσης από

τον μαθητή-τρια ως κυκλική αλληλεπίδραση μεταξύ του προσωπικού προβληματισμού, των προβληματικών καταστάσεων, των ενεργειών και των διαθέσιμων εργαλείων (Confrey, 2012). Έχοντας επιρροές και από τον Vygotsky, επισημαίνει τη σημασία της κοινωνικής αλληλεπίδρασης και του πολιτισμικού πλαισίου στην κατασκευή της γνώσης και συνδέοντάς την με τον ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό, θεωρεί ότι τα μαθηματικά σχηματίζονται από μια διαλεκτική μεταξύ «γειωμένης δραστηριότητας» και «συστηματικής έρευνας» και ισορροπούν μεταξύ φυσικής δραστηριότητας και συμβολικής γραφής (Confrey, 1993, σελ. 51). Σε αντίθεση με την αφαιρετική διαδικασία του Vygotsky όσο και του Piaget, θεωρεί σημαντική την ενσώματη δραστηριότητα (Confrey, 1994) ειδικότερα για τις σχολές μηχανικών όπου απαιτείται πνευματική και σωματική δεξιότητα καθώς και αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρικών-μηχανολογικών και συμβολικών εργαλείων. Μέσω μιας επιστημολογίας «πολλαπλών αναπαραστάσεων» μπορούν να συγκεντρωθούν δεδομένα από μια γεωμετρική-μηχανολογική κατάσταση και στη συνέχεια να εισαχθούν αριθμοί σε έναν πίνακα. Επεκτείνοντας ή πυκνώνοντας τις εγγραφές του πίνακα και σύμφωνα με το τι έχει νόημα μέσα σε αυτήν την αναπαράσταση, μπορούν να ελεγχθούν εάν είναι γεωμετρικά συνεπείς και εάν έχουν κάποια συνεισφορά προς την κατανόηση του προβλήματος και έτσι η αλγεβρική γλώσσα να αποκτήσει εγκυρότητα μέσα από τις εμπειρίες των μαθητών-σπουδαστών (Confrey & Smith, 1995).

Η «αναπαράσταση» είναι κοινό επιστημολογικό και διδακτικό εργαλείο απόκτησης μαθηματικής γνώσης (Duval, 2006). Η πρόοδος συνοδεύεται από την εμφάνιση νέων σημειωτικών συστημάτων που συνυπάρχουν με εκείνο της φυσικής γλώσσας. Η ύπαρξη διαφόρων μορφών αναπαράστασης του αντικειμένου αυξάνει τις γνωστικές δυνατότητες του υποκειμένου και τις νοητικές του αναπαραστάσεις (Duval, 1995).

2.3.β. Τεχνουργήματα

Ο όρος «τεχνουργήματα» αναφέρεται σε υλικά αντικείμενα που έχουν σκόπιμα κατασκευαστεί για να επιτελούν μια συγκεκριμένη λειτουργία (Preston, 2018). Οι λειτουργίες ενός τεχνουργήματος αναφέρονται ως «κατάλληλες λειτουργίες/proper functions» εάν τα τεχνουργήματα σχεδιάστηκαν για αυτές ακριβώς τις λειτουργίες. Ωστόσο, μερικές φορές αυτοσχεδιάζοντας, αποδίδεται μια λειτουργία σε ένα τεχνουργήματα, που δεν σχεδιάστηκε για αυτό το σκοπό. Σε μια τέτοια περίπτωση μιλάμε για «αυτοσχέδιες λειτουργίες/improvised functions»¹¹.

Ο R. Heersmink (2021) διακρίνει 4 κατηγορίες τεχνουργημάτων.

¹¹ Η διάκριση μεταξύ «κατάλληλων» και «αυτοσχέδιων» λειτουργιών ενός τεχνουργήματος θα φανεί χρήσιμη σε επόμενη ενότητα όπου συζητείται ο τρόπος κατασκευής μαθηματικών έργων με τη χρήση τεχνουργημάτων.

- Ενσώματα τεχνουργήματα (Embodied artifacts)
- Αντιληπτικά τεχνουργήματα (Perceptual artifacts)
- Συναισθηματικά τεχνουργήματα (Affective artifacts)
- Γνωστικά τεχνουργήματα (Cognitive artifacts)

Ενσώματα τεχνουργήματα είναι εκείνα που εκτελούν τη λειτουργία τους αλληλοεπιδρώντας σωματικά μαζί τους, και η επιτυχής χρήση εξαρτάται από συγκεκριμένες κινητικές και αντιληπτικές τεχνικές. Σφυριά, κατσαβίδια, στυλό, πινέλα, μαχαιροπίρουνα, μπαστούνια, και άλλες συσκευές χειρός λειτουργούν μόνο όταν τα κρατάμε και ασκούμε πίεση ή δύναμη στο τεχνούργημα. Τέτοια τεχνουργήματα λειτουργούν ως προεκτάσεις του σώματος μας. (Heersmink (2021, σελ 577-578). Σύμφωνα με τον Martin Heidegger (1962 / «Being and Time»), δεν αλληλοεπιδρούμε τόσο με το τεχνούργημα αλλά περισσότερο με τον εξωτερικό κόσμο μέσω του τεχνουργήματος. Ο Heidegger αναφέρεται σε τέτοια τεχνουργήματα ως «εξοπλισμός». Οι Trninic, D., & Abrahamson, D. (2012), υποστηρίζουν και μια άυλη φύση των ενσώματων τεχνουργημάτων, και συγκεκριμένα κάποιες επαναλαμβανόμενες ενέργειες (routines) που ασκούμε με το σώμα μας, με σκοπό την ανάπτυξη γνώσης (ενσώματη γνώση) σε έναν δεδομένο κλάδο.

Τα **αντιληπτικά τεχνουργήματα** χρησιμοποιούνται για να μας βοηθήσουν να αντιληφθούμε ή να ποσοτικοποιήσουμε καλύτερα τον κόσμο. Γυαλιά και βοηθήματα ακοής για παράδειγμα, χρησιμοποιούνται για τη διόρθωση της φυσιολογικής κατάστασης. Επίσης κιάλια, μικροσκόπια και τηλεσκόπια μεγεθύνουν την ποσότητα φωτός που ανιχνεύεται από τον αμφιβληστροειδή, επιτρέποντας στον χρήστη να δει πράγματα στο περιβάλλον που διαφορετικά θα ήταν αόρατα (Heersmink 2021, σελ.579).

Τα **συναισθηματικά τεχνουργήματα** είναι υλικά ή μη αντικείμενα που έχουν την ικανότητα να μεταβάλλουν τη συναισθηματική κατάσταση κάποιου. Μερικά τεχνουργήματα είναι σκόπιμα φτιαγμένα και χρησιμοποιούνται για συναισθηματικούς σκοπούς. Αντικείμενα όπως πίνακες ζωγραφικής, γλυπτά, Η μουσική και ο κινηματογράφος δημιουργούνται και χρησιμοποιούνται για να προκαλέσουν συναισθηματικές καταστάσεις στον ακροατή ή στον θεατή. Ομοίως, τα μουσικά όργανα κατασκευάζονται για να κάνουν μουσική, εκφράζοντας τελικά τα συναισθήματα και τις διαθέσεις του συνθέτη. Συλλογές αντικειμένων όπως γραμματόσημα ή αντίκες έχουν συναισθηματική σημασία για τον συλλέκτη. (Heersmink 2021, σελ. 582)

Ένα **γνωστικό τεχνούργημα** είναι κάτι φυσικό ή ψηφιακό που έχει βοηθήσει σε μια νοητική διαδικασία. Τα γνωστικά τεχνουργήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καθοδηγήσουν την επίλυση προβλημάτων, την ανάκληση πληροφοριών, πιθανόν και τη σκέψη (Κολέζα

2022). Παραδείγματα γνωστικών τεχνουργημάτων περιλαμβάνουν χάρτες, άβακες, οπτικά διαγράμματα, μοντέλα, συστήματα υπολογιστών. Για να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία τέτοια αντικείμενα απαιτείται συνδυασμός κινητικών, αντιληπτικών και γνωστικών τεχνικών. Ο Norman (1993) υποστηρίζει ότι τα γνωστικά τεχνουργήματα είναι αντικείμενα που μας κάνουν έξυπνους και χωρίς αυτά οι γνωστικές μας ικανότητες θα ήταν ριζικά διαφορετικές. Η ανάλυση του Norman εστιάζει στο ότι τα γνωστικά τεχνουργήματα αλλάζουν την ίδια τη φύση της εργασίας που εκτελείται και όχι μόνο την ικανότητά μας να ολοκληρώσουμε το έργο.

Αντίστοιχα η Mariotti (2002) κάνει μια διάκριση μεταξύ ενός οργάνου (instrument) και ενός τεχνουργήματος (artefact) τονίζοντας ότι ένα τεχνούργημα, είναι ένα ιδιαίτερο αντικείμενο με εγγενή χαρακτηριστικά, σχεδιασμένο για να εκπληρώσει έναν ιδιαίτερο στόχο, και διαμορφώνεται σε όργανο (instrument) μέσα από τον τρόπο χρήσης του (Wartofsky, 1979). Τα εργαλεία δεν είναι παθητικά αλλά ενεργά στοιχεία του πολιτισμού στον οποίο παρεμβάλλονται (Noss and Hoyles, 1996).

Ιδιαίτερη κατηγορία τεχνουργημάτων αποτελούν οι μηχανές. Οι μαθηματικές μηχανές ή μαθηματικοί μηχανισμοί είναι ιδιαίτεροι τύποι αρθρωτών συστημάτων. Είναι τεχνουργήματα (artefacts) που σχεδιάστηκαν (συνήθως από κάποιον μαθηματικό) έτσι ώστε, τα αρθρωτά τους μέρη να κινούνται και να χαράσσουν γραμμές ακολουθώντας ένα μαθηματικό νόμο. Μελετώντας τη μαθηματική μηχανή και την κίνησή της, προσπαθούμε να ανακαλύψουμε το νόμο που κρύβει (Κολέζα, 2022). Τα τεχνουργήματα διακρίνονται σε εργαλεία (tools) ή όργανα (instruments) με βάση τις λειτουργίες τους. Τα εργαλεία είναι σημαντικά για την κατασκευή, την επισκευή ή την τροποποίηση. Τα όργανα προορίζονται για την «καθοδήγηση» μιας διαδικασίας. Ενώ το εργαλείο επεκτείνει και ενισχύει άμεσα τις δεξιότητες των χρηστών, το όργανο χρησιμεύει για να εποπτεύει και να βοηθά στη διαχείριση αυτών των δεξιοτήτων. Και τα εργαλεία και τα όργανα έχουν να κάνουν με την άσκηση δεξιοτήτων και την εκτέλεση μιας λειτουργίας. Ωστόσο, στην περίπτωση του εργαλείου, η έμφαση δίνεται περισσότερο στη λειτουργία και στο είδος της εργασίας που εκτελείται, ενώ στην περίπτωση του οργάνου, έμφαση δίνεται περισσότερο στις δεξιότητες του χρήστη και στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η εργασία (Κολέζα, 2022). Οι Impedovo, M. A., Andreucci, C., & Ginestie, J. (2017) παρουσιάζουν μια λεπτομερή ταξινόμηση των τεχνουργημάτων. Συγκρίνοντας αυτήν τη ταξινόμηση με άλλες έρευνες σχετικά με τον καθορισμό των εννοιών τεχνούργημα, εργαλείο, όργανο, παρουσιάζονται επικαλύψεις. Για παράδειγμα ως ξεχωριστή κατηγορία εμφανίζονται τα «instruments», τα «classroom and instructional artifacts» και τα «cognitive artifacts».

Κοινό σημείο όλων αυτών των ταξινομήσεων είναι η έμφαση στο ότι τα όργανα παρέχουν ανατροφοδότηση σε μια διαδικασία, ενώ τα εργαλεία συνήθως απλώς κάνουν τη διαδικασία να συμβεί. Τα όργανα μας επιτρέπουν να παρακολουθούμε τη διαδικασία και να την προσαρμόζουμε στις ιδιαίτερες συνθήκες του έργου. Ταυτόχρονα όμως τα όργανα δρουν πάνω μας σε νοητικό επίπεδο. Είναι ένα ενδιάμεσο στο συνεχές μεταξύ νου και εργαλείου, περισσότερο «αντανακλαστικό» από ότι ένα εργαλείο και ταιριάζει σε αυτό που ο Norman (1993) αποκαλεί «σύνθετο μέσο» (compositional medium), όπου η «συνθετότητα» νοείται ως η γνωστική διαδικασία που «επιτρέπει την προσθήκη νέων παραστάσεων, την τροποποίηση και τη χειραγώγηση των παλαιών, και στη συνέχεια την πραγματοποίηση συγκρίσεων» (σελ. 247). Αυτό το «σύνθετο μέσο» ο φιλόσοφος Andy Clark (2011), αποκαλεί «συζευγμένο σύστημα» (coupled system), ένα «κύκλωμα» που εξαρτάται τόσο από ένα εσωτερικό όσο και από ένα εξωτερικό στοιχείο. Επειδή το εσωτερικό στοιχείο εξωτερικεύεται, μπορεί να μοιραστεί, και έτσι υπόκειται στις διαδικασίες της πολιτιστικής εξέλιξης, οι οποίες τυπικά διαμορφώνουν το εξωτερικό στοιχείο σε μια ακόμη πιο αποτελεσματική μορφή. Ο ρόλος της πολιτιστικής εξέλιξης είναι απολύτως κεντρικός για την αποτελεσματικότητα αυτών των διαρκώς βελτιωμένων στοιχείων, και συνεπώς για την ανάπτυξη της τεχνολογίας και της επιστημονικής προόδου. Ο πολιτισμός μας αποτελείται σε μεγάλο βαθμό από τέτοια «συζευγμένα συστήματα».

2.3.γ. Σημειωτικό Δυναμικό Τεχνουργήματος.

Ο Vygotsky (1978) εξετάζει πώς ένα τεχνούργημα μπορεί να μετατραπεί σε ψυχολογικό εργαλείο στο πλαίσιο της κοινωνικής και πολιτιστικής αλληλεπίδρασης που αναπτύχθηκε μέσω της «ζώνης εγγύτατης ανάπτυξης» και μέσω κάποιας διαδικασίας εσωτερίκευσης. Οι μελέτες των Verillon και Rabardel (1995) που έχουν τις ρίζες τους στη θεωρία του Vygotsky τόνισαν την ουσιαστική διαφορά ανάμεσα σε ένα τεχνούργημα και ένα όργανο ως ψυχολογική κατασκευή. Το θεωρητικό πλαίσιο της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (Θ.Σ.Δ.) αναπτύχθηκε με σκοπό την κατασκευή ενός μοντέλου διδασκαλίας και μάθησης, όπου η προσοχή επικεντρώνεται στις σημειωτικές διαδικασίες οι οποίες σχετίζονται με τη χρήση εργαλείων (Bussi & Mariotti, 2008). Το «ξεδίπλωμα» του σημειωτικού δυναμικού ενός εργαλείου είναι το σημείο εκκίνησης μιας διδακτικής διαδικασίας που βλέπει την είσοδο των μαθητών στον θεωρητικό κόσμο της Γεωμετρίας. Τα προσωπικά νοήματα για την επίτευξη μιας καθορισμένης εργασίας που προκύπτουν από την χρήση του εργαλείου, διακρίνονται από τα μαθηματικά νοήματα. Τα εργαλεία αποτελούν «πόρους» για τον εκπαιδευτικό και εισάγονται στην εκπαιδευτική διαδικασία ως εργαλεία σημειωτικής διαμεσολάβησης (Bussi & Mariotti, 2008). Σύμφωνα με την προσέγγιση του Vygotsky, οι σημειωτικές διεργασίες που δημιουργούνται με την χρήση εργαλείων και με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού,

προωθούν την κοινωνική κατασκευή της γνώσης. Η διδακτική πορεία προς τα αναμενόμενα μαθηματικά σήματα απαιτεί περαιτέρω παρεμβάσεις για να επιτευχθεί η ερμηνεία των παραγόμενων σημάτων του εργαλείου. Προτείνεται η ανταλλαγή και η σύνθεση των προσωπικών νοημάτων μεταξύ των μαθητών, διαμορφώνοντας έτσι τον διαπροσωπικό χώρο όπου ο εκπαιδευτικός μπορεί πλέον να εισάγει μια τυποποιημένη ορολογία (Mariotti & Maffia, 2018).

Για τη διδακτική διαχείριση του εργαλείου ιδιαίτερη σημασία έχει ο προσδιορισμός του «σημειωτικού δυναμικού» του εργαλείου που αποτελεί ένα βασικό στοιχείο για οποιουδήποτε εκπαιδευτικό σχεδιασμό που εστιάζει στη επιλογή και την χρήση ενός συγκεκριμένου εργαλείου. Ο κυκλικός σχεδιασμός της διδασκαλίας με τη χρήση μιας μαθηματικής μηχανής, πρέπει να βασίζεται στην περιγραφή του σημειωτικού δυναμικού της, δηλαδή του δεσμού μεταξύ προσωπικών νοημάτων που προκύπτουν από την χρήση της και αντιστοίχων μαθηματικών νοημάτων (Mariotti & Maffia, 2018). Εάν χρησιμοποιηθούν δύο μηχανές που παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα, ενεργοποιούνται διαφορετικές μαθηματικές έννοιες (Chassapis, 1998), διότι τα δύο εργαλεία έχουν διαφορετικό σημειωτικό δυναμικό.

Σημειωτικές αναπαραστάσεις εκφέρονται με χρήση σημάτων (signes), (εκφωνήσεις στη φυσική γλώσσα, αλγεβρικοί τύποι, γραφικές παραστάσεις, γεωμετρικά σχήματα). Αποτελούν το μέσο ενός ατόμου για να εξωτερικεύσει τις νοητικές του αναπαραστάσεις. Είναι «ανάγκη επικοινωνίας» (Κολέζα, 2003). Οι μαθητές, υπό την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, παράγουν τρία είδη σημάτων, στην ερμηνεία των οποίων στηρίζεται η διδακτική ανάλυση ενός τεχνουργήματος ως εργαλείου διαμεσολάβησης και συγκεκριμένα:

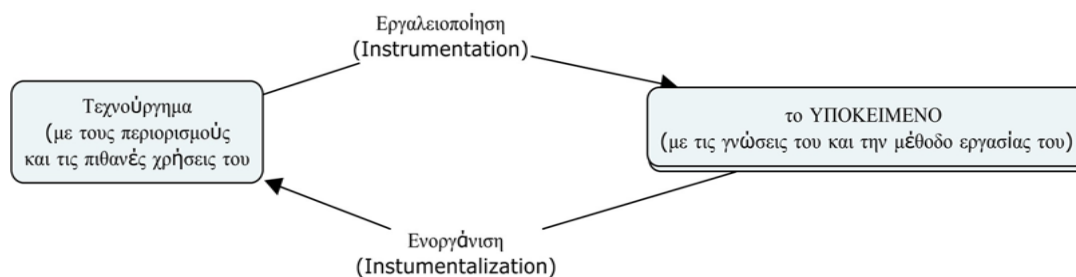
- «μηχανολογικά σήματα» που αναφέρονται σε χαρακτηριστικά του εργαλείου και προκύπτουν από την επαφή με το εργαλείο με νοήματα υποκειμενικά και συχνά υπονοούμενα,
- «μαθηματικά σήματα» που αναφέρονται σε συγκεκριμένες έννοιες ή διαδικασίες και έχουν χαρακτήρα αποδεκτό, και
- «περιστρεφόμενα σήματα» που χαρακτηρίζονται από πολυσημία¹² και αναφέρονται στο εργαλείο, με εκφράσεις στη φυσική γλώσσα ή με μαθηματικά σύμβολα υποκειμενικού χαρακτήρα.

2.3.δ. Εργαλειακή Γένεση

Το τεχνούργημα μετασχηματίζεται σε όργανο κατά τη διάρκεια μιας διαδικασίας «εργαλειακής γένεσης» (Verillon and Rabardel, 1995) σε συνάρτηση με το υποκείμενο και

¹² Πολυσημία είναι η δυνατότητα των σημαινόντων να αντιστοιχούν σε πολλαπλά σημαινόμενα. Εξαιτίας των ιδεολογικών της επεκτάσεων, η πολυσημία είναι ουσιώδους σημασίας στις κοινωνικές επιστήμες.

τον στόχο που το υποκείμενο θέλει να εκπληρώσει μέσω του εργαλείου. Η διαδικασία της εργαλειακής γένεσης αποτελεί αμφίδρομη διαδικασία κατά την οποία το εργαλείο έχει επιπτώσεις στην σκέψη του χρήστη και την διαμορφώνει (ενοργάνιση-instrumentalization) αλλά και το εργαλείο διαμορφώνεται από το χρήστη (εργαλειοποίηση-instrumentation) (Trouche, 1998). Σύμφωνα με αυτή την θεωρία, όταν το υποκείμενο χρησιμοποιεί ένα εργαλείο για να ολοκληρώσει έναν στόχο, περνά μέσω της ενοργάνισης στην εσωτερικοποίηση των σχημάτων χρήσης του εργαλείου (εικόνα 37). Αυτή η διαδικασία μπορεί να περάσει στη συνέχεια από τα στάδια της ανακάλυψης, της εξατομίκευσης και του μετασχηματισμού του τεχνουργήματος σε κατευθύνσεις που δεν είναι κατ'ανάγκη σχεδιασμένες από τον κατασκευαστή του, δηλαδή στην εργαλειοποίησή του (Guin and Trouche, 2002). Μόνο όταν γίνει κατανοητό ότι το τεχνούργημα μπορεί να επεκτείνει τις ικανότητες και δεξιότητές του για το συγκεκριμένο είδος δραστηριότητας και αφού αναπτυχθούν τα «σχήματα χρήσης του», το τεχνούργημα μετατρέπεται σε όργανο που μεσολαβεί στη δραστηριότητα και ανακάλυψη της σχετικής γνώσης. Για να δημιουργηθεί ένα όργανο από ένα τεχνούργημα πρέπει να αναπτυχθούν «γνωστικά σχήματα» (cognitive schemes) χειρισμού (Guin & Trouche, 1998).



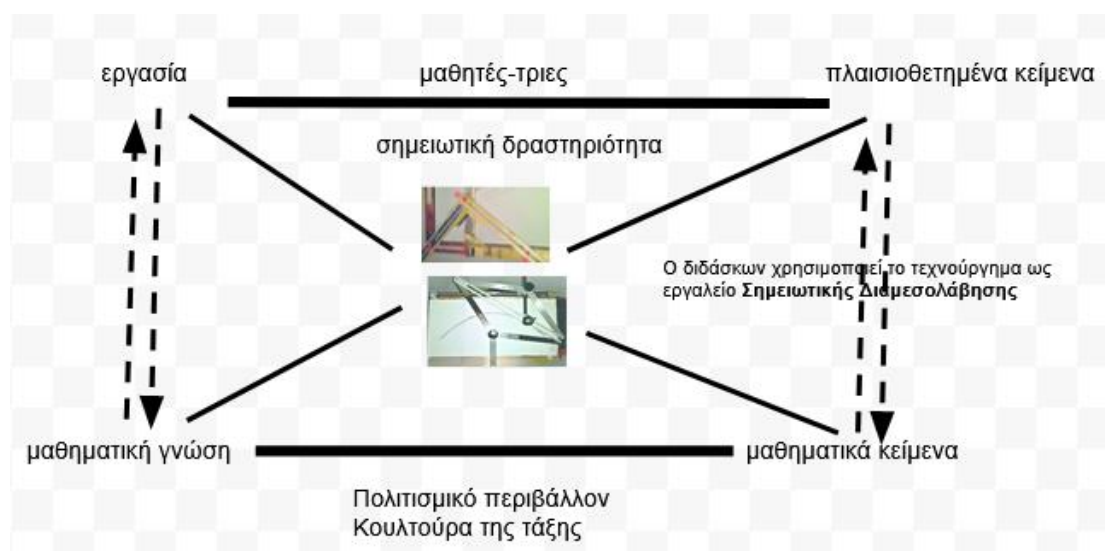
Εικόνα 37: Περιγραφή της εργαλειακής γένεσης

2.3.ε. Περιγραφή της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης

Η Θεωρία Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (Θ.Σ.Δ.) περιγράφεται από τις Bussi & Mariotti (2008) όπου διακρίνονται τρία τρίγωνα τα οποία αντιπροσωπεύουν τις τρεις γνωστικές συνιστώσες της σημειωτικής διαμεσολάβησης ενός τεχνουργήματος (εικόνα 38). Η γνωστική συνιστώσα αφορά το πάνω τρίγωνο «έργο – εργαλείο - πλαίσιοθετημένες παραγωγές των μαθητών». Αυτές οι παραγωγές των μαθητών πλαίσιοθετημένων κειμένων (situated texts) δεν είναι μόνον γραπτά κείμενα αλλά και σχήματα, διαγράμματα, σύμβολα, κινήσεις. Αναφέρεται σε ο,τιδήποτε καταγράφει ή εκφράζει με οποιονδήποτε τρόπο ο μαθητής στην προσπάθειά του να επικοινωνήσει τις σκέψεις του. Η γνωστική συνιστώσα στο άνω τρίγωνο είναι μια εξελικτική συνιστώσα, με την έννοια ότι καθώς χρησιμοποιείται το εργαλείο, η διαδικασία εσωτερικοποίησης στη «ζώνη επικείμενης ανάπτυξης», εμπλουτίζει τις γνωστικές διαδικασίες και μεταβάλλει τα προϊόντα που παράγονται. Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί το τεχνούργημα

ως εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης. Ο διαμεσολαβητικός ρόλος του εργαλείου είναι διπλός: ως τεχνικό εργαλείο χάραξης καμπύλης, αλλά και ως ψυχολογικό εργαλείο. Η δομή του δίνει την ευκαιρία να έλθουν στην επιφάνεια νοητικά προϊόντα σχετικά με ορισμούς ή ιδιότητες εννοιών. Σχετικά με αυτόν το διπλό ρόλο του εργαλείου, οι Verillon and Rabardel (1995) τονίζουν την διαφορά μεταξύ ενός εργαλείου (tool) ως υλικού αντικειμένου και ενός οργάνου (instrument) ως ψυχολογικού κατασκευάσματος, που δεν υπάρχει από μόνο του, αλλά προκύπτει όταν το υποκείμενο είναι σε κατάλληλη θέση να το ενσωματώσει στη δραστηριότητά του.

Το δεύτερο (αριστερά) τρίγωνο είναι εκείνο που σχηματίζεται από το «έργο/μαθηματική γνώση/μαθηματικά κείμενα» και αποτελεί την επιστημολογική συνιστώσα.



Εικόνα 38 : Περιγραφή της Θ.Σ.Δ. των Bartolini Bussi & Mariotti (2008).

Τα «μαθηματικά κείμενα» που έχουν άμεση σχέση με τη «μαθηματική γνώση», η οποία και καθόρισε την επιλογή του έργου και είναι ο τελικός στόχος της δραστηριότητας που σχεδιάστηκε. Τέλος, το τρίτο (δεξιά) τρίγωνο είναι εκείνο που σχηματίζεται από το «έργο/πλαισιοθετημένα κείμενα/μαθηματικά κείμενα» και αποτελεί τη διδακτική συνιστώσα της «σημειωτικής διαμεσολάβησης».

2.4. Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Η διδασκαλία των κωνικών τομών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευσή πραγματοποιείται αποσπασματικά, στα μαθήματα της Άλγεβρας, της Αναλυτικής Γεωμετρίας και του Λογισμού χωρίς ουσιαστική σύνδεση με την αρχικό γεωμετρικό τους υπόβαθρο. Επίσης η έννοια της συνάρτησης, που αναπτύχθηκε ιδιαίτερα στο τέλος του δέκατου έβδομου αιώνα, είναι αρκετά διαφορετική από την σημερινή συνολοθεωρητική θεώρηση της. Είναι επίσης διαφορετική από τις αλγεβρικές αντιλήψεις του δέκατου ένατου αιώνα. Οι μαθητές-τριες αντιμετωπίζουν

δυσκολία στην έννοια και στην διαδικασία της απόδειξης στα Μαθηματικά. Η δυσκολία πιθανόν να οφείλεται στη μη κατανόηση εκ μέρους των μαθητών της ανάγκης για απόδειξη. Στην περίπτωση της γεωμετρικής απόδειξης, πιθανόν να οφείλεται στην αδυναμία να συσχετισθούν τα γεωμετρικά αντικείμενα με τα θεωρήματα της Γεωμετρίας. Οι μαθηματικές μηχανές και τα λογισμικά Μαθηματικών θα μπορούσαν να βοηθήσουν τους συλλογισμούς τους, καθώς αποτελούν μια πλούσια πηγή δυναμικής και κινηματικής Γεωμετρίας. Το πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την Γεωμετρία, είναι στατικό και απομονωμένο από άλλα αντικείμενα εκπαίδευσης, και ιδιαίτερα από την Άλγεβρα. Οι γεωμετρικές αποδείξεις δεν παρέχουν δυναμική εμπειρία η οποία θα οδηγούσε στην κατανόηση των συναρτήσεων και του Λογισμού.

Σημαντική προϋπόθεση για την κατανόηση της φύσης του Λογισμού είναι η λογική συνέπεια μεταξύ Γεωμετρίας και Άλγεβρας, κάτι που δεν ήταν ποτέ δεδομένο (Cajori, 1929). Προκειμένου οι μαθητές να το κατανοήσουν, πρέπει πρώτα να τους επιτραπεί να βιώσουν αμφιβολίες ως προς το αν ένα γεωμετρικό αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται από ένα αριθμητικό αποτέλεσμα (Dennis, 1995). Με μηχανικές συσκευές και με κάποιο λογισμικό, μπορεί να δημιουργηθεί περιβάλλον κινηματικής Γεωμετρίας το οποίο θα βοηθήσει να επιχειρηματολογήσουν, να εικάσουν και να αποδείξουν, συνδέοντας εκ των πραγμάτων γεωμετρικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις σημαντικών μαθηματικών εννοιών.

Σήμερα, έχουν εξαφανισθεί οι μαθηματικές μηχανές από τις αίθουσες διδασκαλίας λόγω:

- της υποτιθέμενης προσομοίωσής τους μέσω λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, που μειώνουν και το σχετικό κόστος κατασκευής των μηχανισμών,
- λόγω των φυσικών δυσλειτουργιών που τυχόν παρουσιάζουν οι μηχανισμοί,
- λόγω των προγραμμάτων σπουδών που δίνουν «υπερβάλλουσα προτεραιότητα» στην αλγεβρική αναπαράσταση των γεωμετρικών αντικειμένων και εννοιών.

Οι μαθητές πλέον δεν μπορούν να δημιουργήσουν «μαθηματική γλώσσα» μέσα από φυσικές ενέργειες. Όταν ανακατασκευάζεται ένα ιστορικό εργαλείο και στη συνέχεια βιώνεται η δράση του τότε αναδημιουργείται η Ιστορία του σε αισθητηριακό και κινηματικό επίπεδο (Dennis, 1995). Για παράδειγμα, οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης χωρίς κάποια αναφορά στην Γεωμετρία ή σε κατασκευή πινάκων. Θα μπορούσαν να συνδεθούν οι λογάριθμοι με την περιοχή κάτω από την υπερβολή με εξίσωση $f(x) = 1/x$. Αυτή η προσέγγιση συνδέει τους λογάριθμους τόσο με τη Γεωμετρία όσο και με την κατασκευή αριθμητικών πινάκων (Dennis & Confrey, 1997). Η ταύτιση των λογαρίθμων ως εμβαδά υπερβολικών περιοχών είναι θεμελιώδης στις εργασίες του Newton καθώς και στις επεκτάσεις και παρεμβολές πινάκων από τον John Wallis (1616-1703) (Dennis

& Confrey, 1993). Η προσέγγιση της υπερβολικής περιοχής θα μπορούσε να δημιουργήσει ένα σύνδεσμο μεταξύ γεωμετρικών, αλγεβρικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων πριν την διδασκαλία του Λογισμού κατά την τελευταία τάξη του λυκείου. Η αναλυτική Γεωμετρία η οποία διδάσκεται στην Β' λυκείου, επίσης θα μπορούσε να αποτελεί έναν «ισόρροπο βρόγχο» του γεωμετρικού & μηχανολογικού κόσμου των καμπυλών με τον συμβολικό κόσμο της Άλγεβρας και των αριθμητικών δεδομένων.

Ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση της παραβολικής καμπύλης η οποία δεν διδάσκεται πια στο Γυμνάσιο, και στην Β' Λυκείου παρουσιάζεται ως συνάρτηση στο μάθημα της άλγεβρας χωρίς να δικαιολογείται το «όνομα» της. Εμφανίζεται και στο μάθημα της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Μαθηματικά προσανατολισμού Β' Λυκείου) χωρίς προηγούμενη γεωμετρική μελέτη των κωνικών τομών. Επανεμφανίζεται στο μάθημα του Λογισμού της Γ' Λυκείου, ως μία από τις πολλές συναρτήσεις που αναπαρίστανται αλγεβρικά και στην συνέχεια μελετώνται οι ιδιότητές της μέσω παραγώγων και χαράσσονται σημειακά ή μέσω λογισμικών. Όσον αφορά την μέτρηση περιοχών κάτω από τα παραβολικά τόξα γίνεται μέσω «τυποποιημένων ολοκληρωμάτων». Αυτή η ιδιαίτερη γεωμετρική καμπύλη με την σπάνια εκκεντρότητα $\varepsilon = 1$ (κατά τον ορισμό του Πάππου), με την σπάνια τομή κώνου από επίπεδο παράλληλο προς την γενέτειρα του (σύμφωνα με τον Μέναιχμο και τον Απολλώνιο), αξίζει να μελετηθεί πρωτίστως γεωμετρικά και να χαραχθεί από «κατάλληλο διαβήτη». Θα δημιουργηθεί στη συνέχεια ένα σημειωτικό περιβάλλον όπου η αλγεβρική αναπαράσταση της παραβολής θα απορρέει φυσιολογικά από την Γεωμετρία της και θα μπορούν να γίνουν κατανοητά τα θεμέλια του Λογισμού. Επίσης μέσω της προκύπτουσας αλγεβρικής της αναπαράστασης θα μπορούσαν να μελετηθούν κάποιες γεωμετρικές της ιδιότητες όπως η «αποκαμπύλωση» της. Στην ιδιαίτερη περίπτωση (ανα)κατασκευής του κατάλληλου διαβήτη, ανακτάται η αυθεντικότητα του μηχανισμού μελετώντας κατασκευάζοντας ταυτοχρόνως και την αντίστοιχη μαθηματική γνώση.

Ο Piaget και ο Vygotsky υποστηρίζουν μορφές «γενετικής επιστημολογίας» που παροτρύνει τους εκπαιδευτικούς να εξετάσουν την ιστορική, κοινωνική και πολιτιστική γένεση όλης της γνώσης (Confrey, 1993). Τα Μαθηματικά που κυριαρχούν στο πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, θα έπρεπε να πηγάζουν σχεδόν εξ ολοκλήρου από την εμπειρική επιστήμη του δέκατου έβδομου αιώνα (Denis 1995, σελ.20) και να «πατήσουμε πάλι στους ώμους αυτών των «γιγάντων» όπως είναι οι Descartes, Cavalieri, van Schooten, Huygens, Newton, Leibnitz.

Πρωτογενές υλικό, όπως αποσπάσματα από πρωτότυπα μαθηματικά κείμενα, παρέχουν έναν τεράστιο όγκο ενδιαφερόντων προβλημάτων. Δίνονται ευκαιρίες για έρευνες και συνομιλία με τους μαθητές-τριες σχετικά με τη δημιουργικότητα στα Μαθηματικά και εναλλακτικές

μεθόδους λύσεων σε προβλήματα (Gulikers & Blom, 2001, σελ.232). Δίπλα στις πρωτογενείς πηγές, μπορούν να εισαχθούν και τα πρωτότυπα όργανα στην τάξη των Μαθηματικών. Είναι δυνατόν να διευκρινισθούν μαθηματικές έννοιες και αποδείξεις με τη χρήση οργάνων όπως είναι οι διάφοροι κωικογράφοι (Gulikers & Blom 2001, σελ. 233).

Ορισμένοι συγγραφείς δημοσίευσαν τα πειράματά τους στα οποία μετέφρασαν τις δικές τους θεωρητικές ιδέες και ιστορικές γνώσεις σε πρακτικά μαθήματα στην τάξη. Ο Ransom (1993 & 1995) για παράδειγμα δίνει μια περιγραφή της χρήσης αρχαίων τοπογραφικών οργάνων και οργάνων πλοήγησης στην τάξη. Δίνει εκτενείς οδηγίες, από ιστορική και μαθηματική άποψη, πώς να χρησιμοποιούν εύκολα κατασκευασμένα όργανα όπως τον αστρολάβο και ηλιακά ρολόγια. Η διδασκαλία της Γεωμετρίας με αυτόν τον τρόπο εμπλέκει τους μαθητές στις πρακτικές χρήσεις της και παρέχει μια κινητήρια δύναμη τόσο για την πρακτική όσο και για τη θεωρητική Γεωμετρία. Οι Bartolini Bussi et al. (1999) αναλύουν ένα διδακτικό πείραμα με χρήση εργαλείων (π.χ. γρανάζια) στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, που αποτελούν μέρος της καθημερινής εμπειρίας των μαθητών από την πολύ πρώιμη παιδική ηλικία. Η προσφυγή σε αυτό το «πραγματικό» πλαίσιο παρακινεί τους μαθητές να μάθουν Γεωμετρία. Η Nadia Douek (1999) περιγράφει επίσης ένα πείραμα στην τάξη στο δημοτικό σχολείο στο οποίο η μοντελοποίηση σε ένα «πραγματικό» πλαίσιο αποτελεί κεντρικό στόχο. Όλα τα προηγούμενα εντάσσονται σε αυτό που ο Freudenthal (1973) ονομάζει «καθοδηγούμενη επανεφεύρεση». Αυτή η έκφραση επινοήθηκε από τον Freudenthal για να περιγράψει τη μάθηση των Μαθηματικών ως μια διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής επινοεί αυτό που οι άλλοι έχουν εφεύρει πριν από αυτόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Δείκτες κατανόησης & Ερευνητικά ερωτήματα

3.1. Επίπεδα και φάσεις «van Hiele»

Το πλαίσιο ταξινόμησης των Pierre & Dina van Hiele έχει δύο κύρια χαρακτηριστικά: (α) τις φάσεις μέσω των οποίων οι μαθητές-τριες βελτιώνονται αναδιατάσσοντας την υπάρχουσα γνώση τους (Burger & Shaughnessy, 1986) και με την κατάλληλη αμφισβήτηση από τον εκπαιδευτικό (Crowley, 1987) και (β) έναν ορισμό των επιπέδων της γνωστικής κατανόησης της Γεωμετρίας.

Σύμφωνα με τους van Hiele (Fuys, Geddes & Rosamond, 1984), η **πρώτη φάση** είναι αυτή της «διερεύνησης» του πεδίου μέσω του υλικού που του παρουσιάζεται. Αυτό το υλικό τον οδηγεί να ανακαλύψει μια συγκεκριμένη δομή. Στη **δεύτερη φάση** του «κατευθυνόμενου προσανατολισμού», διερευνάται το πεδίο μέσω του υλικού. Γίνεται γνωστή η κατεύθυνση της μελέτης και το υλικό επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε οι χαρακτηριστικές δομές να εμφανίζονται σταδιακά. Στην **τρίτη φάση** λαμβάνει χώρα η «αιτιολόγηση». Η αποκτηθείσα εμπειρία συνδέεται με ακριβή γλωσσικά σύμβολα και οι μαθητές-τριες μαθαίνουν να εκφράζουν τις απόψεις τους για τις δομές που παρατηρούνται κατά τη διάρκεια των συζητήσεων μέσα στην τάξη. Ο εκπαιδευτικός φροντίζει ώστε αυτές οι συζητήσεις να χρησιμοποιούν τους συνηθισμένους όρους και τρόπους έκφρασης. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης διαμορφώνεται εν μέρει το σύστημα των σχέσεων. Η **τέταρτη φάση** είναι αυτή του «ελεύθερου προσανατολισμού». Το πεδίο έρευνας είναι ως επί το πλείστον γνωστό, αλλά οι μαθητές-τριες πρέπει να βρουν το δρόμο τους γρήγορα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω εργασιών που μπορούν να ολοκληρωθούν με διαφορετικούς τρόπους. Η **πέμπτη φάση** είναι αυτή της «ολοκλήρωσης» όπου υπάρχει πλέον προσανατολισμός, αλλά πρέπει να αποκτηθεί μια γενική εικόνα μεθοδολογίας καθώς και συμπυκνωμένη εικόνα του αντιστοίχου τομέα που διερευνήθηκε. Ακολουθεί και περιγραφή των γνωστικών επιπέδων van Hiele (Fuys et al., 1984):

Επίπεδο 0 «Οπτικοποίηση»: Οι μαθητές-τριες ταξινομούν τα γεωμετρικά σχήματα κρίνοντας την ολιστική εμφάνισή τους και δεν επεξεργάζονται με σαφήνεια τις ιδιότητες του. Οι αναφορές για κάποιο αντικείμενο ή σχήμα έχουν σχέση με το πώς φαίνονται και ταξινομούνται σύμφωνα με τις οπτικές διαφορές τους. Η μορφή έχει μεγαλύτερη σημασία από άλλες ιδιότητες του σχήματος ή του αντικειμένου. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο του οποίου οι πλευρές σχηματίζουν γωνία 45° με κάποιον οριζόντιο άξονα, μπορεί να μην θεωρηθεί τετράγωνο σε αυτό το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

Επίπεδο 1 «Ανάλυση»: Τα αντικείμενα της σκέψης είναι περισσότερο τάξεις σχημάτων παρά ξεχωριστά σχήματα και τα προϊόντα της σκέψης είναι οι ιδιότητες των σχημάτων. Οι μαθητές-τριες αναγνωρίζουν ιδιότητες διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων, οι οποίες όμως δεν έχουν μεταξύ τους λογική διάταξη και εμποδίζεται να διαμορφωθούν κάποιοι ορισμοί με τις απαραίτητες και επαρκείς προϋποθέσεις. Τα σχήματα αναγνωρίζονται από τις ιδιότητές τους αλλά για παράδειγμα ένα τετράγωνο δεν αναγνωρίζεται απαραίτητα ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Δεν προκύπτει παραγωγικός παρά μόνο επαγωγικός συλλογισμός.

Επίπεδο 2 «Αφαίρεση»: Οι μαθητές-τριες παύουν να βασίζονται στην οπτικοποίηση (επίπεδο 0) ή σε έναν κατάλογο ιδιοτήτων (επίπεδο 1) ή σε εμπειρικές αποδείξεις (επίσης επίπεδο 1). Τα αντικείμενα της σκέψης είναι οι ιδιότητες των σχημάτων και τα προϊόντα της είναι σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες τους. Οι γεωμετρικές ιδιότητες είναι το κεντρικό γνωστικό κατασκεύασμα, είναι διατεταγμένες, παραγωγικά συνδεδεμένες και σχετίζονται. Επίσης τα σχήματα ταξινομούνται. Μπορούν να διατυπωθούν απλά επιχειρήματα και αποδείξεις και κατανοούνται οι απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες που οδηγούν στη σύνταξη συνοπτικών ορισμών. Δεν είναι κατανοητό κάποιο σύστημα αξιωμάτων και η έννοια του παραγωγικού συλλογισμού, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να αναπτύξουν τη δική τους παραγωγική απόδειξη. Ένα άτομο στο Επίπεδο 2, μπορεί να παρακολουθήσει την επιχειρηματολογία, αλλά δεν εκτιμά ιδιαίτερα την αναγκαιότητά της. Από την μεριά των μηχανών, μεγάλο τμήμα της μηχανολογίας εστιάζεται στο Επίπεδο 2, όπου οι σπουδαστές-τριες δημιουργούν, ερμηνεύουν και προβλέπουν με μονογραμμικές απεικονίσεις και διαγράμματα ελεύθερου σώματος. Η ερμηνεία αυτών των νοητικών εικόνων απαιτεί από τους μαθητές να τις συσχετίσουν λογικά με τις γεωμετρικές ιδιότητες που είχαν προηγουμένως ανακαλυφθεί (Sharp & Zachary, 2004).

Επίπεδο 3 «Παραγωγή»: Τα αντικείμενα της σκέψης είναι σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων και τα προϊόντα είναι παραγωγικά-αξιωματικά συστήματα για τη Γεωμετρία. Οι μαθητές-τριες θεωρούν την παραγωγή ως το κεντρικό γνωστικό κατασκεύασμα και μπορούν να κατασκευάσουν ανεξάρτητα τυπικές γεωμετρικές αποδείξεις. Πραγματοποιούνται παραγωγικοί συλλογισμοί, με το αντίστροφο ενός θεωρήματος, με αξιώματα, με ικανές και αναγκαίες συνθήκες. Κατανοούν το σύστημα αξιωμάτων που σχετίζεται με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά δεν μπορούν να κατανοήσουν τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ένα άτομο σε αυτό το επίπεδο μπορεί να εκτιμήσει την αναγκαιότητα αυτού του συστήματος για την κατοχύρωση της «γεωμετρικής αλήθειας», να εργάζεται με αφηρημένες προτάσεις για τις γεωμετρικές ιδιότητες, και να βγάζει συμπεράσματα βασισμένα περισσότερο στη λογική παρά στη διαίσθηση. Διακρίνει ιδιότητες, όπως ότι «οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται», αλλά δεν αρκείται στη παρατήρηση, ή τη

μη τυπική εξήγηση. Εκτιμά ότι χρειάζεται να το αποδείξει με μία σειρά λογικών επιχειρημάτων. Ένα άτομο στο Επίπεδο 3, θεωρεί αναγκαία την επιχειρηματολογία των αποδείξεων.

Επίπεδο 4 «Αυστηρότητα»: Τα αντικείμενα της σκέψης είναι παραγωγικά αξιωματικά συστήματα για την Γεωμετρία και τα προϊόντα της είναι συγκρίσεις και αντιπαραβολές ανάμεσα σε διαφορετικά αξιωματικά συστήματα της Γεωμετρίας. Οι μαθητές-τριες κατέχουν πλέον το κατάλληλο μαθηματικό επίπεδο κατανόησης της Γεωμετρίας. Το κεντρικό γνωστικό κατασκεύασμα είναι αυτό των παραγωγικών και ευέλικτων συστημάτων αξιωμάτων. Μπορούν να μελετήσουν, να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν Ευκλείδειες και μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Σε αυτό το επίπεδο το αντικείμενο της προσοχής των μαθητών-τριών είναι τα ίδια τα αξιωματικά συστήματα, και όχι η παραγωγή συμπερασμάτων μέσα σε ένα σύστημα. Εξετάζονται οι διακρίσεις και οι σχέσεις ανάμεσα στα διάφορα αξιωματικά συστήματα.

3.2. Γνώση καταχώρησης (Register or domain knowledge)

Σε όλους τους τομείς των Μαθηματικών πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ της αναπαριστώμενης έννοιας και των ιδεών της από το υπερσύνολο των ιδεών όπου ανήκουν οι αναπαριστώμενες ιδέες (Kaput, 1987a, 1987b). Ο Hiebert (1988), σε συμφωνία με τον Duval (2006), χαρακτηρίζει κάθε σύστημα αναπαραστάσεων ως Μητρώο καταχωρήσεων (Register) και ορίζει τη **Γνώση Μητρώου Καταχώρησης** ως την κατανόηση των συμβόλων και κανόνων των καταχωρήσεων-αναπαραστάσεων. Στην συνέχεια ορίζει την **Γνώση Τομέα Καταχώρησης** ως την κατανόηση του τομέα με τον οποίο συνδέονται οι καταχωρήσεις σε κάποιο μητρώο. Τα μητρώα των αναπαραστάσεων αναφέρονται σε εξωτερικό και αντιληπτό σύστημα το οποίο αποτελεί πλατφόρμα για εργασία με μαθηματικές ιδέες (μέσω δραστηριοτήτων επεξεργασίας και μετατροπών) και επιτρέπει την περιγραφή ενός τομέα αναφοράς ή μιας μαθηματικής ιδέας. Υποστηρίζει επίσης ότι για να δουλέψουν οι μαθητές επιτυχώς με τις αναπαραστάσεις, πρέπει να διαθέτουν και τα δύο κεφάλαια γνώσης. Επίσης οι Adu-Gyamfi, Bossé και Chandler (2017) ορίζουν την **Γνώση Μητρώου και Τομέα Καταχώρησης** (Domain and Register Knowledge) ως την «διασταύρωση» τους και την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ο τομέας παρέχει πληροφορίες σχετικά με την αναπαράσταση και αντιστρόφως (εικόνα 39).



Εικόνα 39: Περιγραφή του δείκτη «Γνώση Καταχώρησης»

3.3. Η ταξινόμηση «SOLO»

Σύμφωνα με τον Biggs (1999), μπορεί να υπάρχουν διάφορες ερμηνείες για το τι μπορούν να κάνουν οι μαθητές-τριες που να είναι πέρα από τον έλεγχο οποιουδήποτε εκπαιδευτικού. Υπάρχουν όμως κάποιες ελεγχόμενες πτυχές μάθησης και εξαρτώνται από την οργάνωση της διδασκαλίας. Η καλή διδασκαλία κάνει τους περισσότερους μαθητές να χρησιμοποιούν και τις διαδικασίες υψηλότερου γνωστικού επιπέδου και μειώνει το χάσμα μεταξύ των μαθητών-τριών. Είναι σημαντικό να περιγραφεί μια «τεχνολογία διδασκαλίας» που μεγιστοποιεί τις πιθανότητες εμπλοκής των μαθητών σε δραστηριότητες μάθησης. Η ταξινόμηση SOLO είναι ένα πλαίσιο ιεράρχησης της δραστηριότητας των μαθητών-τριών αντιστοιχώντας σε πέντε επίπεδα κατανόησης στα Μαθηματικά, δουλεύοντας μέσω αυξανόμενης πολυπλοκότητας (Biggs & Collis, 1982; Biggs, 1999). Ενώ χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς εκπαίδευσης, έχει υιοθετηθεί και ως μέσο διερεύνησης της κατανόησης των μαθητών-τριών στην Άλγεβρα επειδή η ταξινόμηση van Hiele χρησιμοποιείται συνήθως για την κατανόηση στην Γεωμετρία, και αποτελείται από τα παρακάτω επίπεδα (εικόνα 40):

(α) Το **Προδομικό επίπεδο** (Prestructural level) όπου οι μαθητές-τριες επιχειρούν αλλά δεν ενεργούν σωστά επειδή δεν κατανοούν επαρκώς το υλικό. Χρησιμοποιούν υπερβολικά απλοϊκές ευρετικές μεθόδους και συχνά εστιάζουν σε άσχετες πτυχές του προβλήματος. Δεν εμφανίζεται κανενός είδους κατανόηση χρησιμοποιώντας μη σχετικές πληροφορίες χάνοντας τελείως την κεντρική ιδέα του θέματος. Μπορεί να έχουν αποκτηθεί διάσπαρτα κομμάτια πληροφοριών, αλλά είναι ανοργάνωτα, αδόμητα και ουσιαστικά κενά από πραγματικό περιεχόμενο.

(β) Το **Μονοδομικό επίπεδο** (Unistructural level) όπου οι απαντήσεις των μαθητών-τριών εστιάζονται μόνο σε μία πτυχή του προβλήματος κάνοντας προφανείς συνδέσεις. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν ορολογία, να θυμηθούν κάποια θέματα, να εκτελέσουν αλγόριθμους, να παραφράσουν, να αναγνωρίσουν, να ονομάσουν, να μετρήσουν.

(γ) Το **Πολυδομικό επίπεδο** (Multistructural level) όπου οι απαντήσεις επικεντρώνονται σε πολλές πτυχές του προβλήματος, αλλά αντιμετωπίζονται ασύνδετα και προσθετικά. Είναι σε

θέση να απαριθμούν, να περιγράφουν, να ταξινομούν, να συνδυάζουν, να εφαρμόζουν μεθόδους, να κατασκευάζουν δομές, να εκτελούν διαδικασίες.

(δ) Το **Σχετικιστικό επίπεδο** (Relational level) όπου οι πτυχές του προβλήματος συντίθενται σε ένα συνεκτικό σύνολο που οδηγεί σε επαρκή κατανόηση του θέματος. Μπορούν επομένως να συγκρίνουν, να συσχετίζουν, να αναλύουν, να εφαρμόζουν τη θεωρία, να εξηγούν με όρους αιτίου και αποτελέσματος.

(ε) Το **Εκτεταμένα Αφηρημένο επίπεδο** (Extended abstract level) όπου το συνεκτικό εννοιολογικό σύνολο μπορεί να επεκταθεί σε υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης και να γενικευτεί σε ένα νέο θέμα ή περιοχή. Μπορούν να αντιληφθούν τη δομή από πολλές διαφορετικές οπτικές γωνίες και να μεταφέρουν ιδέες σε νέους τομείς. Μπορούν να γενικεύουν, να υποθέτουν, να επικρίνουν, να θεωρητικοποιούν.



Εικόνα 40 : Περιγραφή του δείκτη «ταξινόμηση SOLO»

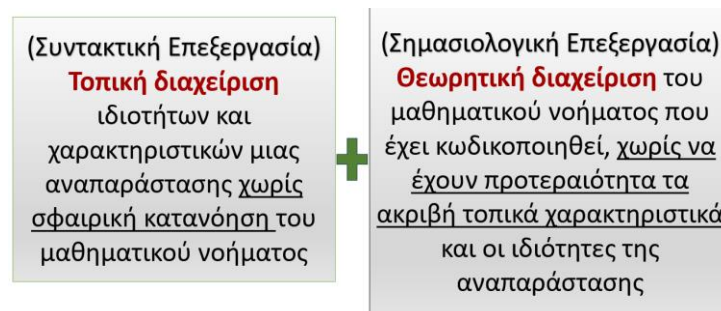
3.4. Συντακτική και Σημασιολογική Επεξεργασία (Syntactic and Semantic Elaboration)

Έχει αναγνωρισθεί η ανάγκη των μαθητών-τριών να επεξεργασθούν, να αποκωδικοποιήσουν, να κωδικοποιήσουν και να συνδυάσουν χαρακτήρες ή σημάδια (signs) αναπαραστάσεων για να ερμηνευθούν σωστά οι αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες (Bossé, Adu-Gyamfi, & Chandler, 2014; Brown, Bossé, & Chandler, 2016). Άλλοτε πραγματοποιούν συντακτική επεξεργασία και άλλοτε σημασιολογική επεξεργασία (Karut, 1987a, 1987b).

Η **Συντακτική Επεξεργασία** (Syntactic Elaboration) των αναπαραστάσεων ορίζεται ως η αλληλεπίδραση με μια αναπαράσταση με άμεσο χειρισμό των τοπικών συμβόλων της και χωρίς αναφορά στην ιδέα που αναπαρίσταται. Υποδηλώνει την τοπική εξέταση ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών μιας αναπαράστασης χωρίς σφαιρική κατανόηση του μαθηματικού νοήματος που κωδικοποιείται στην αναπαράσταση. Έχει βρεθεί ότι μαθητές-τριες μπορεί να

εργάζονται σε μια αναπαράσταση και να μην κατανοούν πραγματικά τη μαθηματική έννοια που αντιστοιχεί (Adu-Gyamfi & Bossé, 2014).

Η **Σημασιολογική Επεξεργασία** (Semantic elaboration) των αναπαραστάσεων ορίζεται ως η αλληλεπίδραση με μια αναπαράσταση η οποία βασίζεται στις γενικές ιδέες που αναπαρίστανται και όχι στα ίδια τα σύμβολα της. Μπορεί να θεωρηθεί ως σφαιρική κατανόηση των εννοιολογικών πληροφοριών που έχουν κωδικοποιηθεί στην αναπαράσταση χωρίς να έχουν προτεραιότητα τα ακριβή τοπικά χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες της αναπαράστασης αυτής.



Εικόνα 41: Περιγραφή του δείκτη γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων «Επεξεργασίες»

3.5. Ισομορφικές, Υπερβατικές και Μικτές Συνδέσεις (Isomorphic, Transcendent, and Mixed Connections).

Ορίζονται τρεις τύποι συνδέσεων, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως *ισόμορφες*, *υπερβατικές* και *μικτές συνδέσεις* (Bossé, Lynch-Davis & De Marte, 2021).

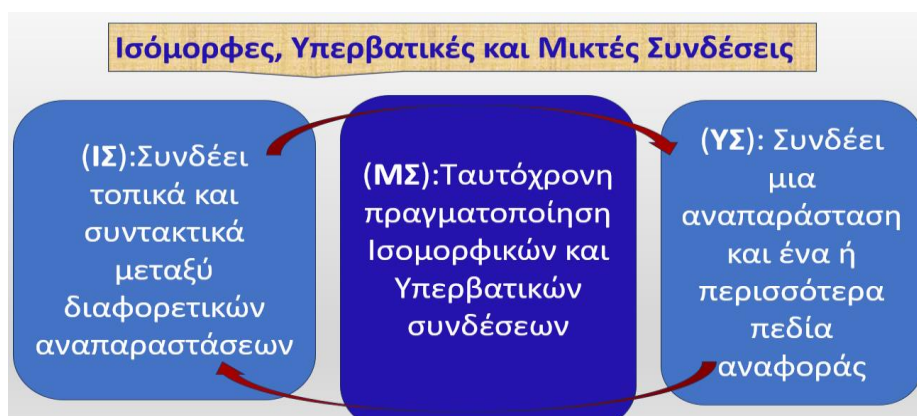
Οι **Ισομορφικές Συνδέσεις** (Isomorphic Connections) πραγματοποιούνται τοπικά και συντακτικά μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων. Αφορούν τον τρόπο αλληλεπίδρασης του πεδίου αναφοράς και των αναπαραστάσεων από διαφορετικά μητρώα (Hitt, 1998).

Οι **Υπερβατικές Συνδέσεις** (Transcendent Connections) πραγματοποιούνται μεταξύ μιας αναπαράστασης και ενός ή περισσότερων πεδίων αναφοράς. Διερευνώνται συνήθως ως προς το πώς αλληλοεπιδρούν τα πεδία αναφοράς με αναπαραστάσεις από τον ίδιο μητρώο (Karut, 1987b).

Οι **Μικτές Συνδέσεις** (Mixed Connections) υποδηλώνουν ταυτόχρονη πραγματοποίηση Ισομορφικών και Υπερβατικών συνδέσεων (Karut, 1987a; Karut, 1987b; Hiebert, 1988; Adu-Gyamfi & Bossé, 2014).

Τα πέντε προηγούμενα πλαίσια αξιολόγησης επελέγησαν διότι αλληλοσυμπληρώνονται. Το γνωστικό επίπεδο και το επίπεδο δραστηριότητας των μαθητών-τριών, είναι έννοιες διακριτές

και εξετάζονται σε διαφορετικές πτυχές τους. Στην έρευνα αυτή ελέγχεται εάν η αυξημένο γνωστικό επίπεδο οδηγεί σε πιο προηγμένες δραστηριότητες και αντιστρόφως. Τα πλαίσια ελέγχου γνωστικού επιπέδου (Van Hiele και Hiebert) το αντιμετωπίζουν διαφορετικά. Τα επίπεδα «van Hiele» επικεντρώνονται κυρίως στη δισδιάστατη και τρισδιάστατη γεωμετρική κατανόηση, το πλαίσιο «Γνώσης Καταχώρησης» (Hiebert) εξετάζει ευρύτερα και αποτυπώνει κάθε μαθηματική έννοια που αναπαρίσταται σε οποιοδήποτε μαθηματικό ή και μηχανολογικό πλαίσιο. Τα πλαίσια ελέγχου των δραστηριοτήτων («SOLO», «Επεξεργασίες», «Συνδέσεις») εξετάζουν διαφορετικές πτυχές της δραστηριότητας των μαθητών-τριών. Για παράδειγμα, η «ταξινόμηση SOLO» εξετάζει πως ενεργούν οι μαθητές-τριες όταν εργάζονται με όλο και πιο σύνθετες έννοιες. Οι «Επεξεργασίες» ελέγχουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν τις διαθέσιμες πληροφορίες, σε τοπικό ή γενικό επίπεδο, ενώ οι «Συνδέσεις» αποτυπώνουν σχέσεις που ο μαθητής δημιουργεί ή αποκωδικοποιεί μεταξύ αναπαραστάσεων και ιδεών.



Εικόνα 42: Περιγραφή του δείκτη γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων «Συνδέσεις»

3.6. Ερευνητικά ερωτήματα

Λόγω της τετραδιάστατης φύσης της εργασίας, τα ερευνητικά ερωτήματα επιμερίζονται σε δύο κατηγορίες που αποτελούνται από: (α) ένα ερώτημα που αφορά την διδακτική των Μαθηματικών και (β) τρία ερωτήματα μαθηματικού-μηχανολογικού περιεχομένου.

(Α) ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1^ο ερευνητικό ερώτημα: «Ποια είναι η ανταπόκριση των μαθητών-τριών μέσω της χρήσης των δύο ιστορικών παραβολογράφων, πάνω σε ερωτήματα που αφορούν την έννοια της παραβολής και των συναρτήσεων;»

Επιμερίζοντας, έχουμε τα ακόλουθα υποερωτήματα:

(1/α) «Ποιο είναι το γνωστικό επίπεδο των μαθητών και μαθητριών στην Γεωμετρία;»

(1/β) «Ποιο είναι το γνωστικό επίπεδο των μαθητών και μαθητριών σχετικά με τις αναπαραστάσεις γενικά των μαθηματικών εννοιών και σε σχέση με τους αναπαριστώμενους τομείς;»

(1/γ) «Ποιο είναι ο τρόπος δόμησης της γνώσης των μαθητών και μαθητριών στα Μαθηματικά, το οποίο αποτυπώνεται μέσω των σχετικών δραστηριοτήτων που πραγματοποιούν;»

(1/δ) «Ποιο είναι το επίπεδο ικανότητας των μαθητών και μαθητριών στην επεξεργασία των αναπαραστάσεων, δηλαδή στην διαχείριση και στην αποκωδικοποίηση τους;»

(1/ε) «Ποιο είναι το επίπεδο ικανότητας των μαθητών και μαθητριών στο να συνδέουν τις αναπαραστάσεις μεταξύ τους αλλά και να συνδέουν τους αναπαριστώμενους τομείς;»

(1/στ) «Σε ποιο βαθμό σχετίζονται οι γνωστικοί δείκτες με τους δείκτες που αφορούν την γνωστική δομή μέσω δραστηριοτήτων;»

(B) ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ

2° ερευνητικό ερώτημα: «Μπορεί να διατυπωθεί το αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα για την χάραξη της παραβολικής καμπύλης και για κάθε ένα από τους δύο μαθηματικούς μηχανισμούς;»

3° ερευνητικό ερώτημα: «Είναι δυνατόν η τοπική καμπυλότητα της παραβολής την οποία χαράσσει κάθε μηχανισμός να υπολογίζεται από εμφανή στοιχεία του;»

4° ερευνητικό ερώτημα: «Οι δύο μηχανισμοί είναι «μηχανολογικά ισοδύναμοι; Συγκεκριμένα,, μπορεί σταδιακά να αρθρωθεί σε κάθε μηχανισμό ο άλλος, έτσι ώστε να έχουν την «είσοδο» του πρώτου εκ των δύο και την ίδια «έξοδο» και να προκύπτει χωρίς δυσλειτουργίες και από τους δύο μηχανισμούς το ίδιο αποτέλεσμα παραβολικού τόξου;»

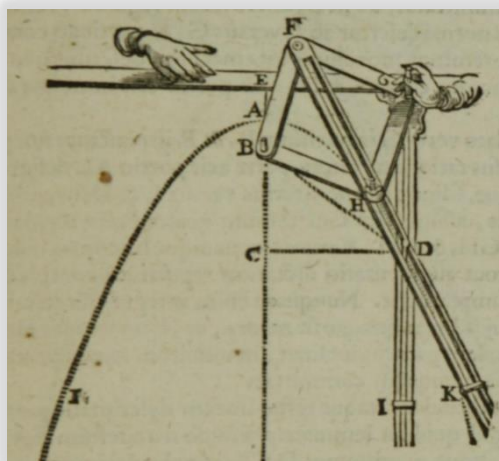
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Ανάλυση, σύνθεση και ανακατασκευή δύο ιστορικών παραβολογράφων

4.1. Παραβολογράφος του Frans van Schooten

4.1.α. Μηχανολογικό πλαίσιο αναφοράς του μηχανισμού

Ο παραβολογράφος του Frans van Schooten αποτελείται συνολικά από επτά άκαμπτες ράβδους (εικόνα 43). Τρεις ράβδοι εξ αυτών φέρουν αυλάκι ολίσθησης καθ' όλο το μήκος τους και μία εξ αυτών είναι σταθεροποιημένη σε κάποιο επίπεδο και έχει τον ρόλο ράβδου ολίσθησης ενός οδηγού (cursor). Τέσσερις ισομήκειες ράβδοι είναι αρθρωμένοι ανά δύο μεταξύ τους με περιστροφικές αρθρώσεις (revolute pair) ενός βαθμού ελευθερίας, δημιουργώντας ρόμβο (Μαυρομάτης, 1985).



Εικόνα 43 : Οπτικό διάγραμμα από την πρώτη ακαδημαϊκή εργασία του van Schooten με τίτλο «*De organica conicarum sectionum in plano descriptione*» το έτος 1646, ως Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Duytsche Mathematicque (Dopper, 2014)

Χρησιμοποιώντας τα ονόματα των σημείων του εικονιζόμενου μηχανισμού, η κορυφή B του ρόμβου είναι σταθερή όπου και αρθρώνονται περιστροφικά (revolute joints) δύο πλευρές του ρόμβου. Η απέναντι κορυφή G πέραν της περιστροφικής άρθρωσης που έχει για τις άλλες δύο πλευρές του ρόμβου, φέρει και πρισματική άρθρωση ολίσθησης κατά μήκος της οριζόντιας σταθερής ράβδου (planar prismatic pair) ενός βαθμού ελευθερίας επίσης. Στο ίδιο σημείο έχουμε και τρίτη άρθρωση του κέρσορα G και της ράβδου ολίσθησης GDI έτσι ώστε να παραμένει πάντα κάθετη με την οριζόντια σταθεροποιημένη ράβδο ολίσθησης του κέρσορα. Όσο αφορά την άρθρωση για την καθετότητα των δύο ράβδων, αυτή δεν έχει βαθμούς ελευθερίας επειδή δεν επιτρέπει καμμία κίνηση. Επομένως η κατακόρυφη ράβδος GI μπορεί να θεωρηθεί η «είσοδος» ή αλλιώς το «κινητήριο μέλος» του μηχανισμού και η οριζόντια ράβδος είναι το «σώμα» του μηχανισμού (Μαυρομάτης, 1985). Η τρίτη ράβδος ολίσθησης $FHDK$ είναι αρθρωμένη περιστροφικά στην κορυφή F του ρόμβου $FBHG$. Στο

σημείο D αυτής της ράβδου, έχουμε τριπλή άρθρωση του D έτσι ώστε να έχουμε πρισματική (ή γραμμική) άρθρωση τόσο με την κατακόρυφη ράβδο GD όσο και με την πλάγια ράβδο $FHDK$, αλλά και περιστροφική άρθρωση για την ταυτόχρονη περιστροφή της γύρω από το D . Η τέταρτη κορυφή H του ρόμβου πέραν της περιστροφικής άρθρωσης για της δύο πλευρές του ρόμβου, έχει αρθρωθεί και γραμμικά με την πλάγια ράβδο $FHDK$.

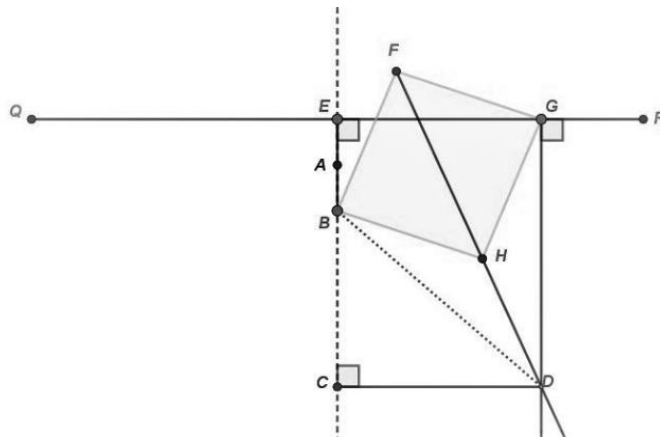
Όλες αυτές οι αρθρώσεις δείχνουν ότι είναι μεταβαλλόμενες όλες τις γωνίες του μηχανισμού που έχουν περιστροφική άρθρωση στην κορυφή. Οι ράβδοι της μηχανής βρίσκονται σε παράλληλα νοητά επίπεδα με το επίπεδο του μηχανισμού και η διάταξη έχει ως εξής:

- Πάνω στο επίπεδο βάσης έχουν τοποθετηθεί η οριζόντια ράβδος και η κατακόρυφη ράβδος GI δημιουργώντας το πρώτο παράλληλο επίπεδο.
- Ακολουθεί το δεύτερο επίπεδο που ορίζουν οι ράβδοι του ρόμβου.
- Τέλος έχουμε το επίπεδο της πλάγιας ράβδου $FHDK$ δημιουργώντας το τρίτο νοητό παράλληλο επίπεδο.

Είναι προϋπόθεση σωστής λειτουργίας του μηχανισμού, να παραμένουν παράλληλα τα νοητά τρία επίπεδα. Επίσης το επίπεδο της πλάγιας ράβδου $FHDK$ θα μπορούσε να προηγηθεί του επιπέδου των πλευρών του ρόμβου, χωρίς να έχει λειτουργικό πρόβλημα η μηχανή. Για τη χάραξη παραβολικού τόξου υπάρχει η δυνατότητα τοποθέτησης γραφίδας στην τριπλή άρθρωση D (στο κάτω μέρος της άρθρωσης ή διαμπερώς της άρθρωσης κάθετα προς την πινακίδα εργασίας. Σύμφωνα με την ταξινόμηση του Μαυρομάτη (1985), η κινηματική αλυσίδα του van Schooten αποτελεί έναν σύνθετο και κλειστό επίπεδο μηχανισμό όδευσης.

4.1.β. Γεωμετρικό πλαίσιο του μηχανισμού

Προβάλλοντας την μηχανή στο επίπεδο και σχεδιάζοντας μία μονογραμμική απεικόνιση, έτσι ώστε να αποτυπώνονται τα απαραίτητα στοιχεία της, χαράσσουμε την κάθετη ευθεία από το B προς την QR και ορίζουμε ως E το σημείο τομής των (εικόνα 44). Στη συνέχεια φέρουμε από το D την κάθετη προβολή του στην ευθεία EB και ορίζουμε ως C την προβολή του D (εικόνα 40). Τα τρίγωνα BHD και GHD είναι ίσα έχοντας κοινή την HD , ίσες τις BH και GH ως πλευρές ρόμβου, καθώς και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες ως παραπληρώματα των ίσων γωνιών που δημιουργεί η διαγώνιος (και διχοτόμος) FH του ρόμβου. Επομένως και οι απέναντι πλευρές DB και DG είναι ίσες. Από αυτήν την ισότητα και από την ταυτόχρονη καθετότητα της DG και QR , σε οποιαδήποτε θέση του D , το σημείο D ισαπέχει από την ευθεία QR και από το σημείο B και επομένως ανήκει σε παραβολή με Εστία το B και διευθετούσα την QR . Το μήκος του τμήματος BE είναι η απόσταση Εστίας και διευθετούσας η οποία συμβολίζεται με p . Εφαρμόζοντας στο τρίγωνο BCD το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει :



Εικόνα 44 : Μονογραμμική απεικόνιση του μηχανισμού van Schooten

$$\begin{aligned}
 BD^2 &= BC^2 + CD^2 \Rightarrow DG^2 = (CE - BE)^2 + CD^2 \Rightarrow DG^2 = (DG - BE)^2 + CD^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow DG^2 = DG^2 - 2DG \cdot BE + BE^2 + CD^2 \Rightarrow BE^2 + CD^2 = 2DG \cdot BE \Rightarrow \\
 &\Rightarrow CD^2 = 2DG \cdot BE - BE^2 \Rightarrow CD^2 = 2DG \cdot p - p^2 \Rightarrow \mathbf{CD^2 + p^2 = 2p \cdot DG}.
 \end{aligned}$$

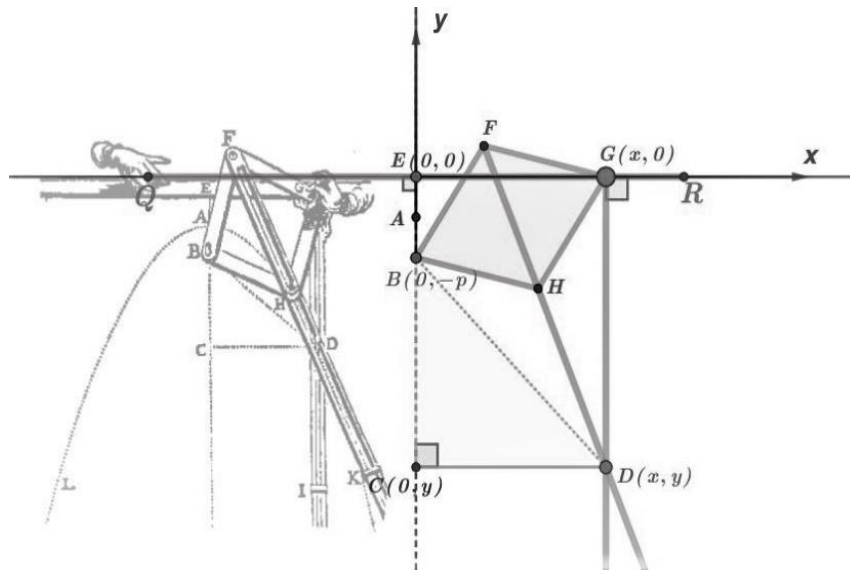
Η τελευταία εξίσωση είναι μία αποκλειστική σχέση μεταξύ των αποστάσεων που έχει το σημείο D από την οριζόντια ευθεία QR και από την κατακόρυφη BE , σε οποιαδήποτε θέση του D λόγω της κίνησης του κέρσορα G .

4.1.γ. Αλγεβρικό πλαίσιο του μηχανισμού

Έστω E η προβολή του σημείου B στην ευθεία QR , και τοποθετώντας ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο E της ευθείας QR και με οριζόντιο άξονα $x'x$ την ευθεία QR , θα γίνει προσπάθεια να περιγραφεί η μηχανή αλγεβρικά. Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο τρίγωνο BCD , προκύπτει (εικόνα 45):

$$\begin{aligned}
 BD^2 &= BC^2 + CD^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow CD^2 = 2DG \cdot BE - BE^2 \Rightarrow |x|^2 = 2(-y) \cdot p - p^2 \\
 &\Rightarrow x^2 = -2py - p^2 \Rightarrow 2py = -x^2 - p^2 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{-1}{2p}x^2 - \frac{p}{2}},
 \end{aligned}$$

και προκύπτει την αλγεβρική εξίσωση της παραβολικής καμπύλης που χάραξε η μηχανή. Επίσης από την μορφή της εξίσωσης καταδεικνύεται το συμμετρικό αποτέλεσμά της ως προς τον $y'y$ άξονα και σύμφωνα με το Καρτεσιανό σύστημα αξόνων που επελέγη. Αυτή η «αμφιμονοσήμαντη μηχανολογικά» είσοδος και έξοδος ή αυτός ο αμφιμονοσήμαντος σημειακός γεωμετρικός μετασχηματισμός των σημείων της οριζόντιας ευθείας QR στα σημεία της Παραβολής, αποτυπώνεται αλγεβρικά ως $G(x, 0) \rightarrow D\left(x, \frac{-1}{2p}x^2 - \frac{p}{2}\right)$, η οποία είναι μια αντιστρέψιμη απεικόνιση $R^2 \rightarrow R^2$ (Πνευματικός, 1974).

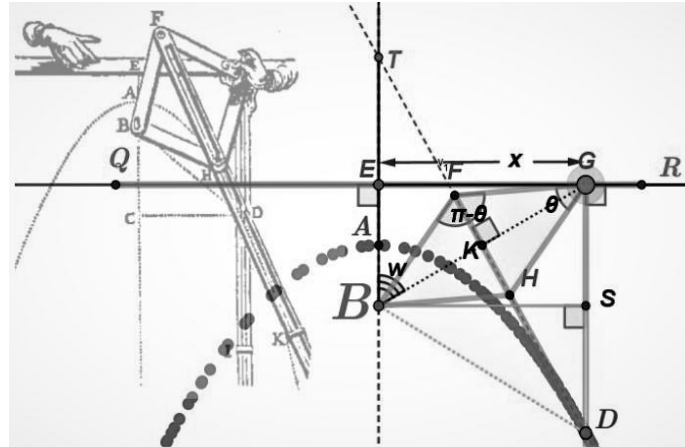


Εικόνα 45 : Αλγεβρικό πλαίσιο μελέτης του μηχανισμού van Schooten

Πρέπει να τονισθεί ότι η γεωμετρική σχέση $CD^2 + p^2 = 2p \cdot DG$ είναι αναλλοίωτη για τον μηχανισμό που αφορά, αλλά η αλγεβρική σχέση $y = \frac{-1}{2p}x^2 - \frac{p}{2}$ αφορά τον ίδιο μηχανισμό ως προς το συγκεκριμένο σύστημα αξόνων και έχει την μορφή $y = ax^2 + c$. Η παράμετρος $a = \frac{-1}{2p}$ αποτελεί την «γενική καμπυλότητα» της χαρασσόμενης παραβολής και υπολογίζεται με το p που είναι εμφανές στοιχείο του μηχανισμού. Εάν για παράδειγμα ο άξονας $y'y$ ήταν σε παράλληλη θέση από την ευθεία EBC και απείχε κ μονάδες, τότε θα προέκυπτε η αλγεβρική εξίσωση $y = \frac{-1}{2p}x^2 + \frac{\kappa}{p}x - \frac{p}{2}$. Η γενική καμπυλότητα δίνεται πάλι από την ποσότητα $a = \frac{-1}{2p}$ αλλά πλέον η χαρασσόμενη καμπύλη δεν έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Και στις δύο περιπτώσεις η ποσότητα $c = -\frac{p}{2}$ δείχνει την μετακίνηση της παραβολής παράλληλα με τον $y'y$. Σε επόμενη παράγραφο θα διερευνηθεί η τοπική καμπυλότητα της.

4.1.δ. Μεταβλητές και Κινητικότητα (Mobility) του μηχανισμού

Έστω E η προβολή του σημείου B στην ευθεία QR και χ η απόσταση του κινούμενου σημείου G από το σημείο E της μπάρας κύλισης (εικόνα 46). Επίσης ορίζονται ως ϑ και $(\pi - \vartheta)$ οι γωνίες του ρόμβου, ως δ_1 η διαγώνιος BG του Ρόμβου, ως δ_2 η διαγώνιος FH του ρόμβου και ως ω η γωνία που δημιουργεί η διαγώνιος δ_1 με το τμήμα BE (εικόνα 42). Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEG προκύπτει ότι $\varepsilon\phi\omega = \frac{\chi}{(EB)} = \frac{\chi}{p} \Rightarrow \omega = \text{Toξ}\varepsilon\phi\left(\frac{\chi}{p}\right)$. Στο ίδιο τρίγωνο μέσω Πυθαγορείου θεωρήματος προκύπτει πως $\delta_1 = \sqrt{\chi^2 + p^2}$ και επομένως οι μεταβλητές δ_1 και ω εξαρτώνται από την μεταβλητή χ .



Εικόνα 46 : Μεταβλητές του μηχανισμού Frans van Schooten

Επίσης στο τρίγωνο FKG του ρόμβου προκύπτει : $\varepsilon\varphi \frac{\theta}{2} = \frac{(FK)}{(GK)} = \frac{\frac{\delta_2}{2}}{\frac{\delta_1}{2}} = \frac{\delta_2}{\delta_1} \Rightarrow \delta_2 = \delta_1 \varepsilon\varphi \frac{\theta}{2} \Rightarrow$

$\delta_2 = \sqrt{\chi^2 + p^2} \cdot \varepsilon\varphi \frac{\theta}{2}$. Άρα και η διαγώνιος δ_2 εξαρτάται από τις μεταβλητές χ και ϑ .

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τον «νόμο των συνημιτόνων» στο τρίγωνο BFG προκύπτει:

$$(BG)^2 = (BF)^2 + (FG)^2 - 2(BF) \cdot (FG) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \vartheta) \Rightarrow \delta_1^2 = \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda^2(-\sigma\upsilon\nu\vartheta) \Rightarrow$$

$$\chi^2 + p^2 = 2\lambda^2(1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta) = 2\lambda^2 \left(1 + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\vartheta}{2} - 1\right) \Rightarrow \chi^2 + p^2 = 4\lambda^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\vartheta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi^2 = -p^2 + 4\lambda^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\vartheta}{2} \Rightarrow |\chi| = \sqrt{-p^2 + 4\lambda^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\vartheta}{2}}. \text{ Εδώ φαίνεται εκ των προτέρων}$$

(λόγω της απόλυτης τιμής) η συμμετρία του παραβολικού τόξου που θα σχεδιαστεί από τον

$$\text{μηχανισμό. Επίσης: } \chi^2 = -p^2 + 4\lambda^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\vartheta}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{\chi^2 + p^2}{4\lambda^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{\chi^2 + p^2}{4\lambda^2}} =$$

$$\sigma\upsilon\nu \left(-\frac{\vartheta}{2}\right), \text{ και φαίνεται επίσης κατά την διάρκεια της κίνησης, η συμμετρική αυξομείωση}$$

των μισών γωνιών της ϑ λόγω της αντίθετης φοράς περιστροφής των πλευρών του ρόμβου γύρω από τις περιστροφικές αρθρώσεις B, F, G, H . Τελικά και η μεταβλητή χ εξαρτάται από

την μεταβλητή ϑ . Επομένως όλες οι μεταβλητές που αναφέρθηκαν, εξαρτώνται από την μεταβλητή ϑ (γωνία του ρόμβου στο B), και ο μηχανισμός έχει ένα βαθμό ελευθερίας.

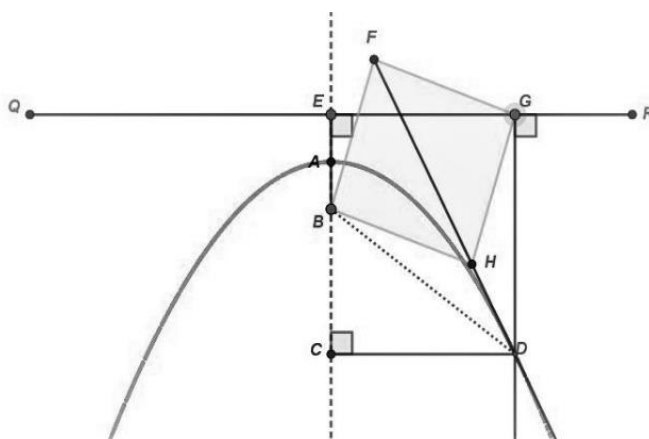
Εκ πρώτης όψεως φαίνεται πως αυτή η μηχανή έχει ένα βαθμό ελευθερίας επειδή όλα τα κινούμενα μέλη της κινούνται μόνο όταν κινείται ο κέρσορας G . Πράγματι, αυτό επιβεβαιώνεται σύμφωνα και από την εξίσωση Kutzbach-Chebyshev $W = 3(n - 1) - 2f_1 - f_2$, όπου W το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του επίπεδου μηχανισμού, n το πλήθος των μελών της μηχανής μαζί με την ράβδο ολίσθησης του κέρσορα G (σώμα), f_1 το πλήθος των αρθρώσεων με ένα βαθμό ελευθερίας και f_2 το πλήθος των αρθρώσεων με δύο βαθμούς ελευθερίας. Τα μέλη του μηχανισμού μαζί με το σώμα είναι επτά και συνδέονται με οκτώ επίπεδες αρθρώσεις με ένα βαθμό ελευθερίας (πέμπτης τάξεως) και με μία άρθρωση στον

κέρσορα με δύο βαθμούς ελευθερίας (τετάρτης τάξεως). Συγκεκριμένα έχει μία διπλή άρθρωση στο G , πρισματική και περιστροφική, δύο περιστροφικές αρθρώσεις στο F , μία περιστροφική άρθρωση στο σταθερό σημείο B , τρεις αρθρώσεις στο H (δύο περιστροφικές και μία πρισματική) και δύο αρθρώσεις στο σημείο-γραφίδα D (μία πρισματική και μία περιστροφική). Επομένως $W = 3(7 - 1) - 2 \cdot 8 - 1 = 1$ και επιβεβαιώνεται ότι η μηχανή έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Πρέπει να τονισθεί ότι υπάρχει η δυνατότητα να αλλάξει η απόσταση του σημείου B από την οριζόντια μπάρα καθώς και τα μήκη των πλευρών του ρόμβου. Όμως οι αλλαγές αυτές μπορούν να γίνουν πριν τεθεί σε λειτουργία η μηχανή.

4.1.ε. Παράμετροι του μηχανισμού

Έχει δειχθεί στο γεωμετρικό πλαίσιο αναφοράς ότι: $(CD)^2 + p^2 = 2p \cdot (DG) \Rightarrow (EG)^2 + p^2 = 2p \cdot (DG) \Rightarrow \chi^2 + p^2 = 2p \cdot (DG) \Rightarrow (DG) - \frac{p}{2} = \frac{1}{2p} \cdot \chi^2 \Rightarrow (AC) = \frac{1}{2p} \cdot \chi^2$. Αυτή η σχέση μπορεί να ερμηνευθεί ότι αυξάνοντας την θετική ποσότητα p , για το ίδιο χ μικραίνει το τμήμα AC , δηλαδή η κατακόρυφη απόσταση του σημείου D από την κορυφή A της παραβολής την οποία χαράσσει η μηχανή (εικόνα 47). Άρα η απόσταση του σταθερού σημείου B από την οριζόντια ευθεία QR , είναι μία παράμετρος «αποκαμπύλωσης» της καμπύλης που χαράσσεται. Θεωρώντας στη συνέχεια το μήκος του οριζοντίου ευθυγράμμου τμήματος QR να αυξάνεται όσο χρειάζεται, παρατηρείται ότι υπάρχουν μέγιστες αποστάσεις του δρομέα G , δεξιά και αριστερά από το σημείο E , διότι στο ορθογώνιο τρίγωνο BEG το μήκος της υποτείνουσας του BG έχει μέγιστη τιμή 2λ όπου λ το μήκος της πλευράς του ρόμβου και από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο BEG προκύπτει

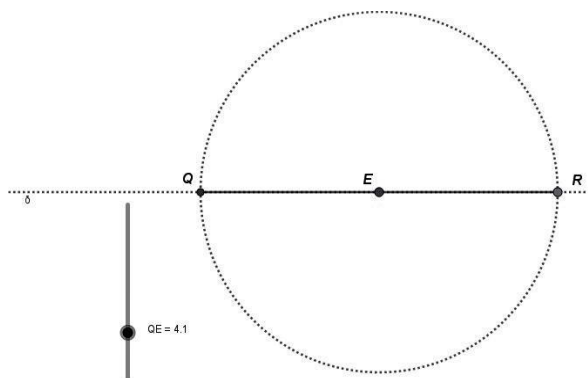
$$(EG)^2 = (BG)^2 - (BE)^2 \Rightarrow \chi^2 = (2\lambda)^2 - p^2 \Rightarrow |\chi| = \sqrt{4\lambda^2 - p^2}.$$



Εικόνα 47 : Μονογραμμική απεικόνιση μηχανισμού van Schooten

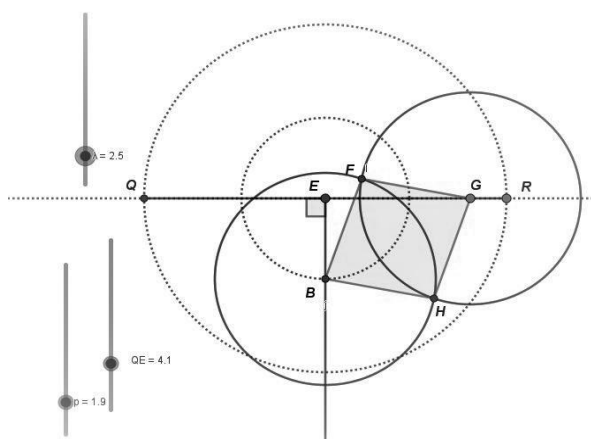
Επομένως εάν κρατηθεί σταθερή η απόσταση p , τότε αυξάνοντας το μήκος λ των πλευρών του ρόμβου αυξάνεται και η μέγιστη απομάκρυνση του δρομέα G εκατέρωθεν του σημείου E

παραβολής που εμπλέκει άμεσα την Εστία και την διευθετούσα της. Αρχικά τοποθετήθηκε στην επιφάνεια εργασίας μία σταθερή ευθεία (δ). Πάνω στην ευθεία αυτή ορίσαμε ένα σημείο E και κύκλο (E, ρ) ο οποίος τέμνει την ευθεία στα Q και R . Η ακτίνα $\rho = QE = RE$ ορίστηκε παραμετρικά (εικόνα 49).



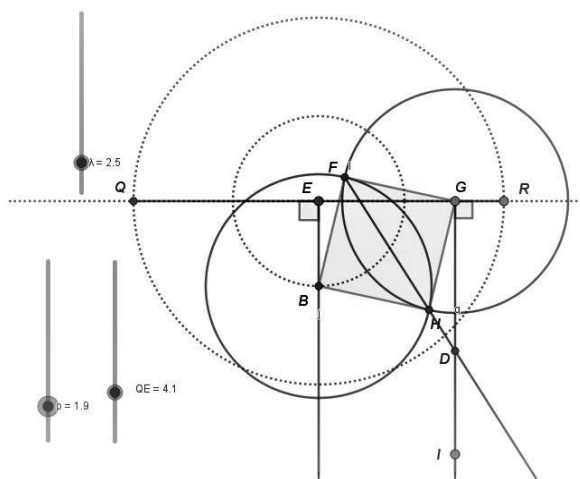
Εικόνα 49: Πρώτο βήμα προσομοίωσης μέσω του λογισμικού Geogebra (μηχανισμός van Schooten)

Πάνω στην ευθεία (δ) ορίστηκε το ευθύγραμμο τμήμα QR και πάνω στο τμήμα QR ορίστηκε σημείο G , το οποίο είναι σε θέση να μετακινηθεί πάνω στο τμήμα αυτό (εικόνα 50). Στο E ορίστηκε κάθετη ημιευθεία της (δ) και έπειτα κύκλος (E, p) όπου p =παράμετρος. Αυτός ο κύκλος τέμνει την κάθετη ημιευθεία σε σημείο B . Με κέντρα τα σημεία B και G ορίστηκαν κύκλοι με ακτίνες ίσες με τρίτη παράμετρο λ , οι οποίοι τέμνονται σε σημεία F και H . Είναι προφανές ότι το τετράπλευρο $BFGH$ είναι ρόμβος πλευράς λ ο οποίος και σχεδιάστηκε.



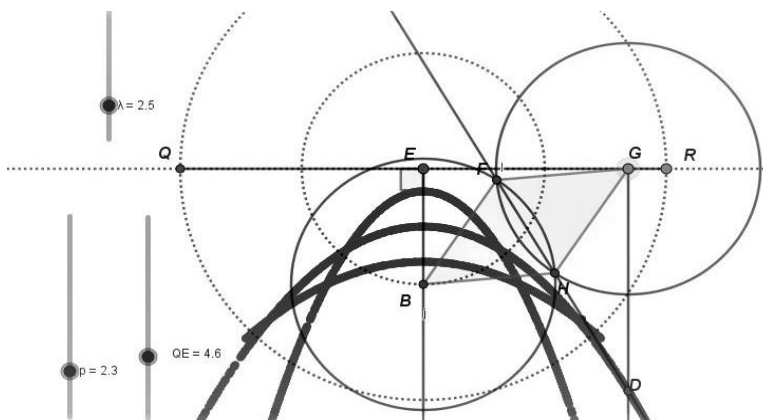
Εικόνα 50: Δεύτερο βήμα προσομοίωσης μέσω του λογισμικού Geogebra (μηχανισμός van Schooten)

Οι απέναντι κορυφές του ρόμβου συνδέθηκαν με την διαγώνιο ημιευθεία FH και από το σημείο G χαράχθηκε ημιευθεία GI κάθετη με το QR (εικόνα 51). Οι δύο αυτές ημιευθείες τέμνονται στο σημείο D και του δόθηκε η εντολή να αφήνει ίχνος.



Εικόνα 51: Τρίτο βήμα προσομοίωσης μέσω του λογισμικού Geogebra (μηχανισμός van Schooten)

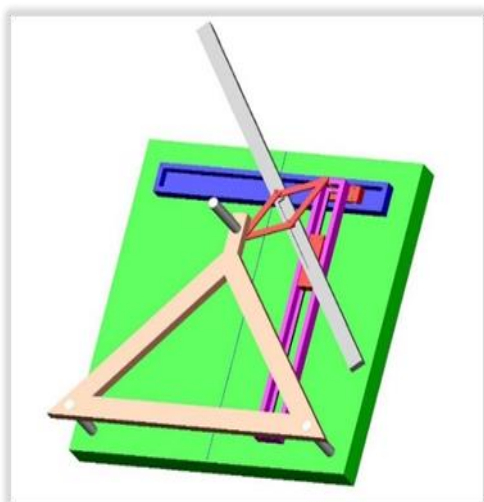
Μετακινώντας το σημείο G πάνω στο QR , το σημείο D , χαράσσεται μία συνεχής καμπύλη η οποία είναι προφανές ότι είναι παραβολή (εικόνα 52). Αλλάζοντας την τιμή της παραμέτρου λ που αφορά την πλευρά του ρόμβου, και χωρίς να εμποδίζει την κίνηση το μήκος του τμήματος QR (ρυθμίζοντας κατάλληλα την παράμετρο QE), χαράσσεται συμμετρικό παραβολικό τμήμα της ίδιας καμπυλότητας, αλλά διαφορετικού μήκους. Επίσης δίνοντας διαφορετικές τιμές στην παράμετρο p , που αφορά την απόσταση BE της Εστίας από την διευθετούσα, χαράσσονται συμμετρικά παραβολικά τόξα διαφορετικής καμπυλότητας.



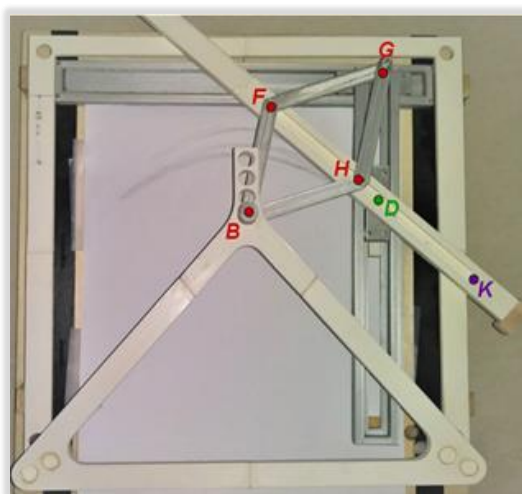
Εικόνα 52: Τέταρτο βήμα προσομοίωσης μέσω του λογισμικού Geogebra (μηχανισμός van Schooten)

Παρατηρήθηκε ότι η διαγώνιος του ρόμβου έπρεπε να είναι ευθεία και όχι ημιευθεία για να χαραχθεί συμμετρική καμπύλη και μέσα στις δυνατότητες της μηχανής. Στην αντίθετη περίπτωση πάλι χαράσσεται παραβολικό τόξο, αλλά όχι συμμετρικό ως προς τον άξονα EB (εικόνα 53).

Επίσης ο κέρσορας G μαζί με την κατακόρυφη ράβδο GD τοποθετήθηκε πάνω σε μικρά ροδάκια, που επίσης εκτυπώθηκαν, για να αποφευχθούν οι τριβές. Ένα θέμα που ανεδείχθη, και το οποίο η προσομοίωση με το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra δεν το έδειχνε άμεσα, ήταν το θέμα της Εστίας B . Η Εστία ήταν πακτωμένη στο επίπεδο εργασίας και δεν θα μπορούσε η κατακόρυφη ράβδος GI να περάσει από το εμπόδιο που δημιουργούσε, ούτε ο κέρσορας G θα μπορούσε να καλύψει όλη την διαδρομή QR . Αυτό το τεχνικό πρόβλημα δεν αναδεικνύεται ούτε στην εικόνα από το βιβλίο του van Schooten, όπως και το πρόβλημα με την διαγώνιο του ρόμβου που ανεδείχθη από την προσομοίωση με Geogebra. Το πρόβλημα λύθηκε τοποθετώντας μία τριγωνική «γέφυρα» με πακτωμένες δύο κορυφές του στο επίπεδο εργασίας και με άξονες άρθρωσης μεγαλύτερου ύψους από το ύψος του επιπέδου του ρόμβου της μηχανής καθώς και με κατάλληλες διαστάσεις έτσι ώστε να μην εμποδίζεται η λειτουργία (εικόνες 55 & 56).

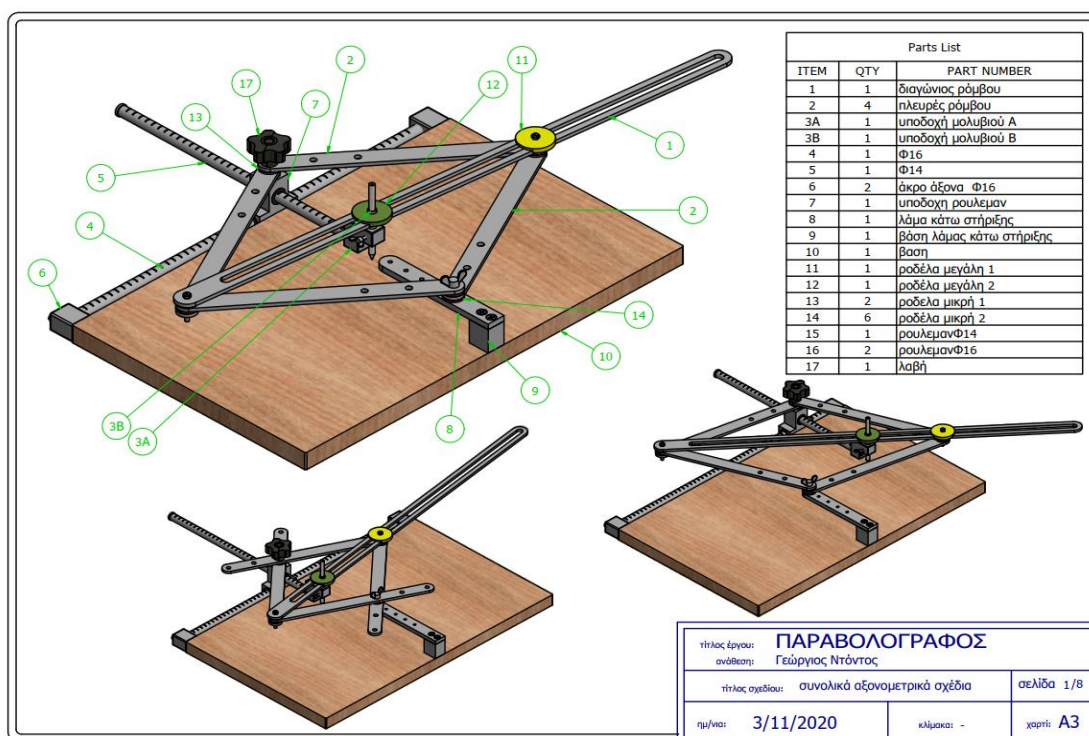


Εικόνα 55 : Σχεδιασμός πρώτου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD)



Εικόνα 56 : Ο πρώτος παραβολογράφος van Schooten μέσω τρισδιάστατης εκτύπωσης

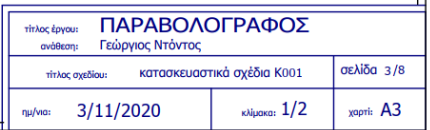
2^{ος} παραβολογράφος: Σε αυτήν την περίπτωση έγινε προσπάθεια κατασκευής αφού πρώτα σχεδιάστηκε μέσω του λογισμικού autoCAD της Autodesk και στην συνέχεια στο Inventor της Autodesk που είναι πιο εξειδικευμένο στο μηχανολογικό σχέδιο. Τα αρχεία DWG που ακολουθούν, περιλαμβάνουν τα δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχέδια του μηχανισμού. Ο παραβολογράφος κατασκευάστηκε από αλουμίνιο και ξύλο και μέσω ειδικού μηχανουργού. Οι επόμενες εικόνες (57 έως και 64) αποτελούν τα μηχανολογικά σχέδια του μηχανισμού.



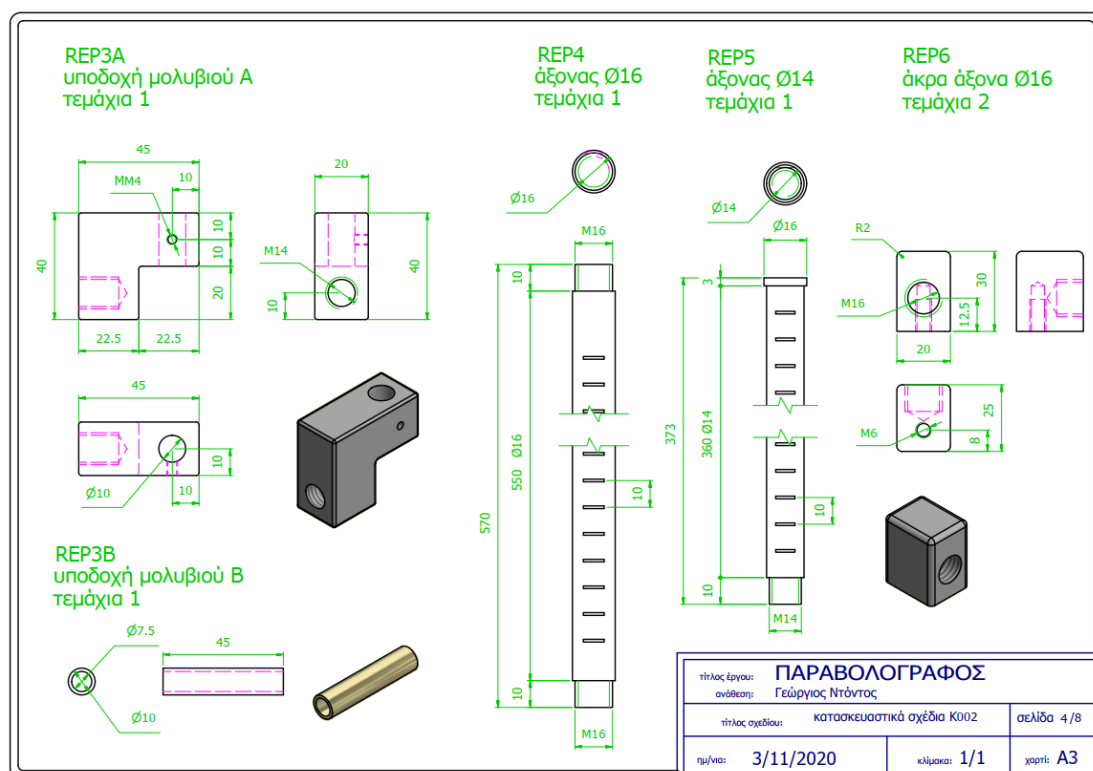
Εικόνα 57: Περιγραφή των μελών του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD)



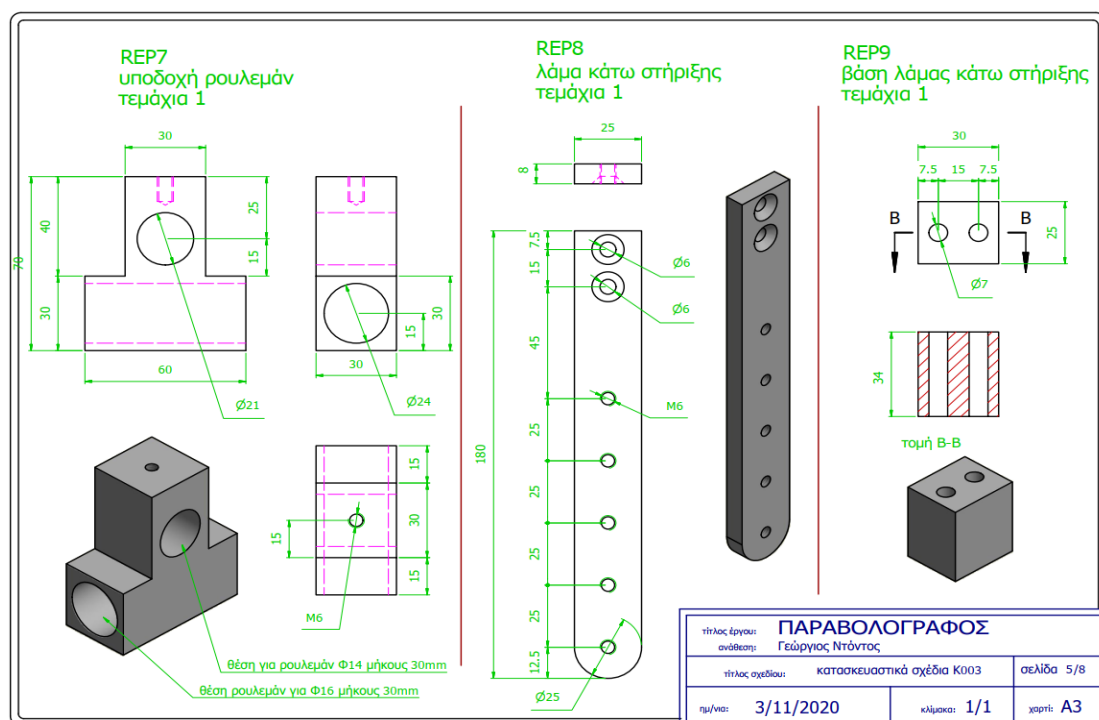
Εικόνα 58: Περιγραφή υπό γωνίες, του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD)



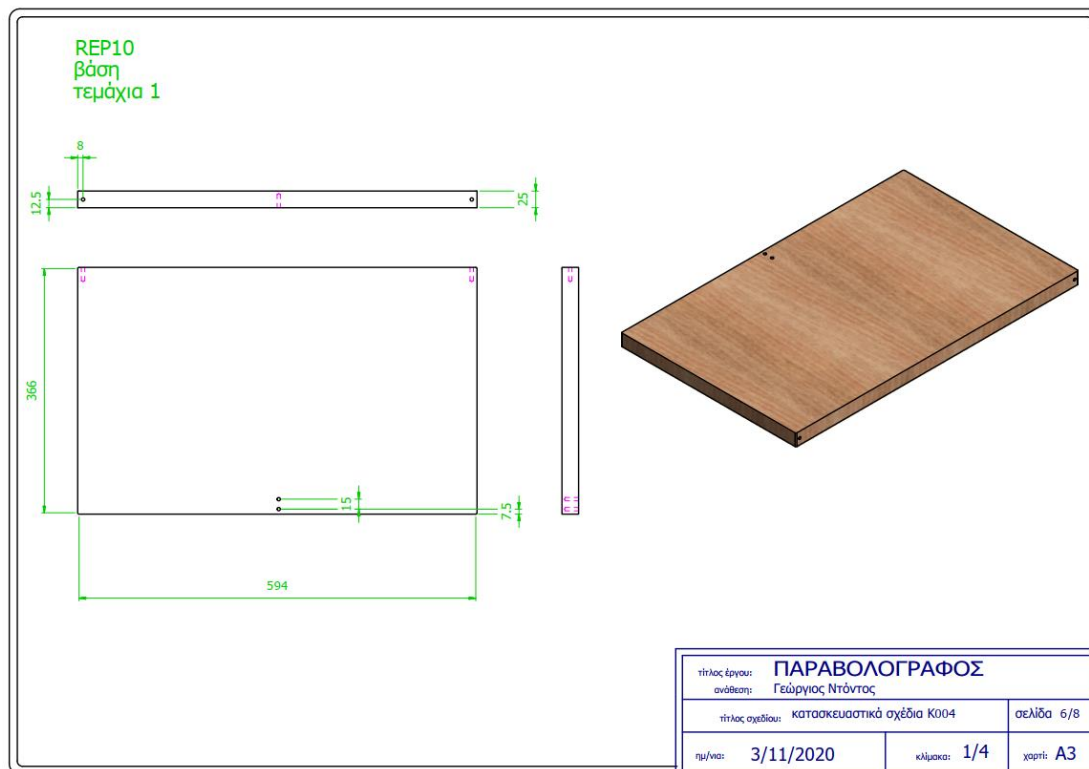
Εικόνα 59: Περιγραφή μεταλλικών ράβδων του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD)



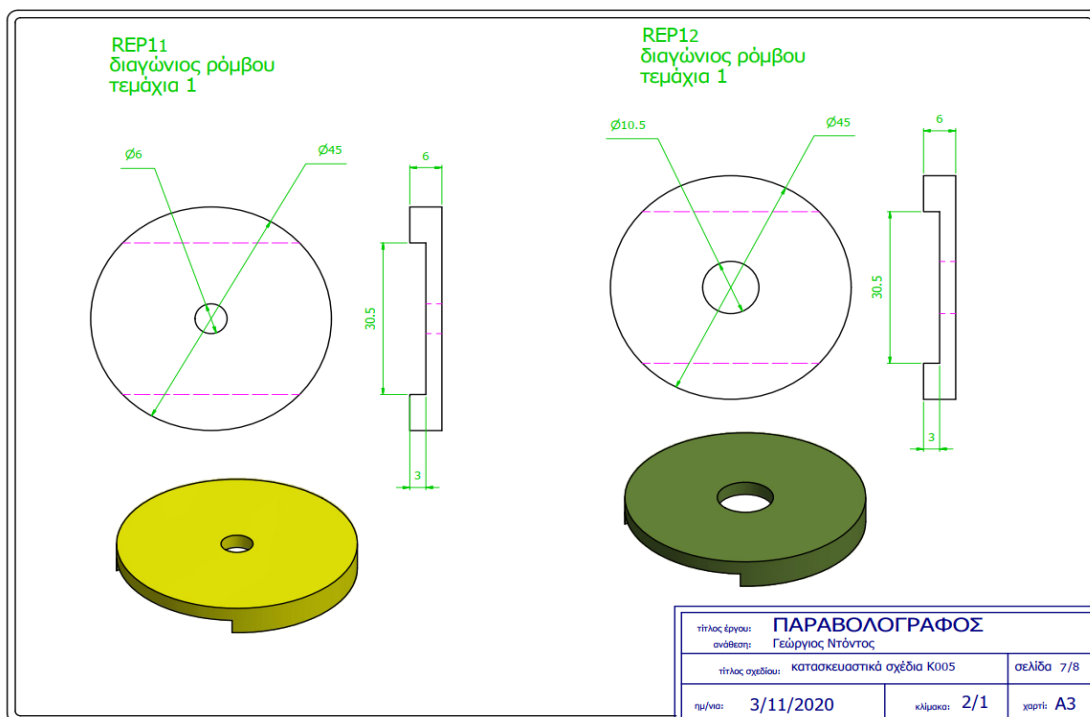
Εικόνα 60: Περιγραφή άρθρωσης κατακόρυφης και πλάγιας ράβδου του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD)



Εικόνα 61: Περιγραφή πρισματικής άρθρωσης κατακόρυφης και οριζοντίου ράβδου του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD)



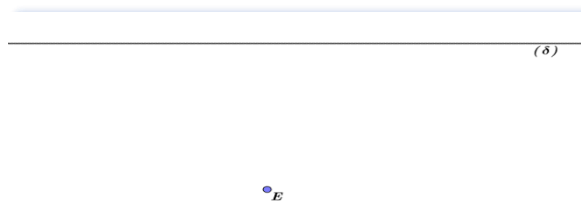
Εικόνα 62: Περιγραφή ξύλινης βάσης του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD)



Εικόνα 63: Περιγραφή πλαστικών εξαρτημάτων γραφίδας του δεύτερου παραβολογράφου van Schooten (autoCAD)

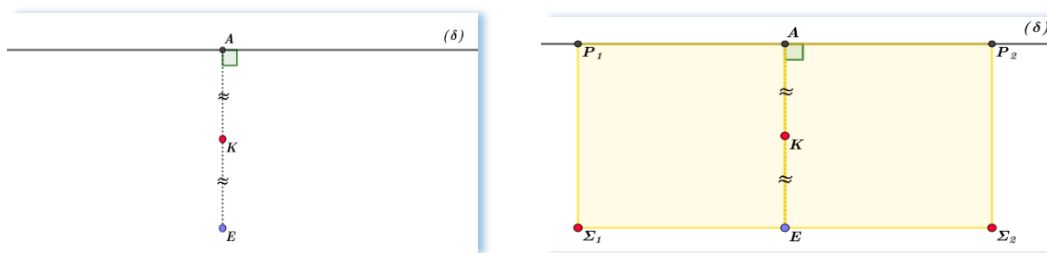
4.1.θ. Τα Μαθηματικά του μηχανισμού Frans van Schooten

Η εύρεση του επίπεδου γεωμετρικού τόπου που αφορά τα σημεία που ισαπέχουν από σημείο και ευθεία (εικόνα 66) μπορεί να τεθεί και να δοθούν απαντήσεις που συνδέονται με την χρήση «κανόνα και διαβήτη» και σύμφωνα με την απαίτηση της Ευκλείδειου Γεωμετρίας.



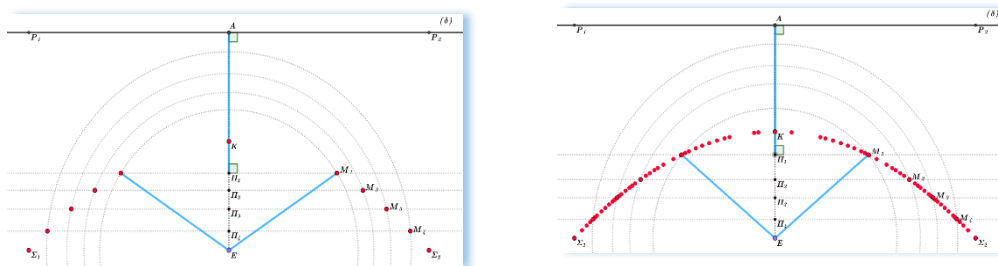
Εικόνα 66: Διάγραμμα αρχικής ερώτησης για την «ισοαποστατική ιδιότητα της παραβολής

Προσπαθώντας να βρεθούν σημεία με την συγκεκριμένη ιδιότητα, υπάρχουν σημεία που αναγνωρίζονται στην αρχή, όπως το μέσο του κάθετου τμήματος από το E στην (δ) καθώς και κάποιες κορυφές των τετραγώνων με μία πλευρά την απόσταση του E από την (δ) (εικόνα 67).



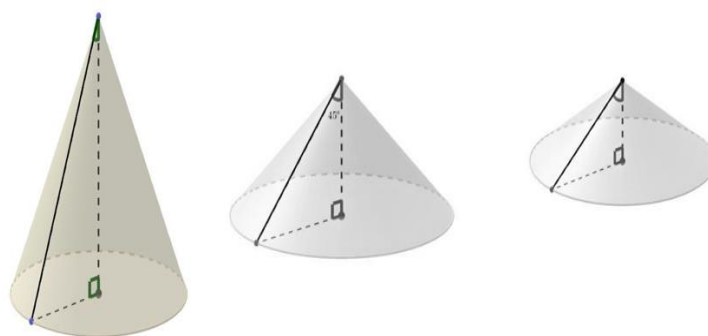
Εικόνα 67 : «το σημείο K ως μέσο της απόστασης του E από την (δ) είναι ένα σημείο με την ιδιότητα των ίσων αποστάσεων από το E και την (δ) . Επίσης τα σημεία Σ_1 και Σ_2 των τετραγώνων Σ_1EAP_1 και Σ_2P_2AE αντιστοίχως, είναι άλλα δύο σημεία με την ιδιότητα των ίσων αποστάσεων από το E και την (δ) ».

Στο βιβλίο Μαθηματικών θετικού προσανατολισμού της Β' Λυκείου δίνεται η διαδικασία κατασκευής κι άλλων τέτοιων σημείων, με την χρήση κανόνα και διαβήτη (εικόνα 68)



Εικόνα 68 : «σε σημείο Π_1 μεταξύ του E και του K (το οποίο κατασκευάστηκε προηγουμένως), χαράσσεται κάθετος στην EK και τέμνει τον κύκλο $(E, \rho = (\Pi_1A))$ σε σημείο M_1 το οποίο και έχει την ιδιότητα των ίσων αποστάσεων από το E και την (δ) . Ομοίως και για τα υπόλοιπα σημεία Π_2, Π_3, Π_4 , κτλ κατασκευάζονται τα σημεία M_2, M_3, M_4 , κτλ καθώς και τα συμμετρικά τους ως προς την EA , τα οποία και έχουν την ιδιότητα των ίσων αποστάσεων από το E και την (δ) ».

Η προηγούμενη κατασκευαστική διαδικασία μπορεί να συνεχισθεί απεριόριστα δίνοντας όμως μία κατασκευή «σημείο προς σημείο» χωρίς να υπάρχει η αίσθηση του «συνεχούς», της «συνεχόμενης καμπύλης που αντιστοιχεί στον γ.τ.». Σταδιακά αρχίζει να εμφανίζεται ένα πολυπληθές σύνολο σημείων που αποτελεί βάση εικασιών για το είδος αυτής της καμπύλης που θα αντιστοιχούσε εάν υπήρχε η «συνέχεια» στην κατασκευή. Στο XI Βιβλίο του Ευκλείδη με τους ορισμούς 18, 19, 20 έχει ορισθεί ο ορθός κώνος, ο άξονάς και η βάση του. Στη θεωρία του Μέναιχμου¹³ (4ος αι. π.Χ.) οι κώνοι είναι ορθοί, και λαμβάνονται με περιστροφή ενός ορθογώνιου τριγώνου (εικόνα 69) γύρω από την μία κάθετη πλευρά του. Στη συνέχεια τέμνονται (εικόνα 70) από επίπεδα κάθετα σε μία γενέτειρα (Heath, 2001). Εάν η κάθετη πλευρά του ορθογώνιου τριγώνου, κείμενη στην κυκλική βάση, ισούται με την άλλη κάθετη πλευρά, καλείται «ορθογώνιος κώνος», εάν είναι μικρότερη καλείται «οξυγώνιος» και αντιθέτως «αμβλυγώνιος». Η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της κωνικής τομής υποδεικνύεται με τον όρο «σύμπτωμα».



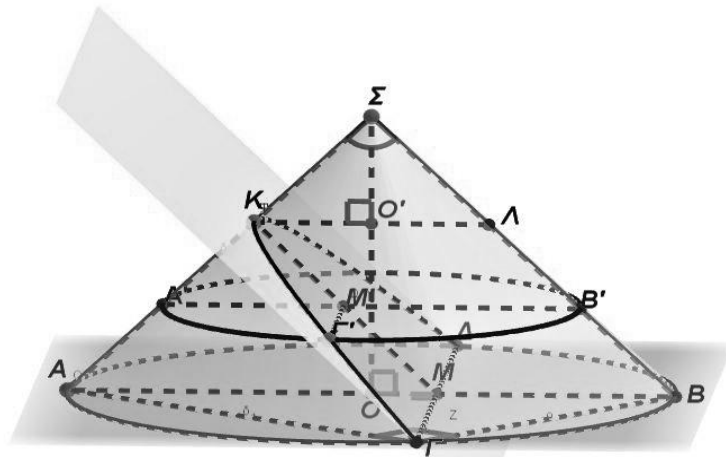
Εικόνα 69 : Τα τρία είδη ορθών κώνων σχετικά με την γωνία στην κορυφή τους

Σε ορθογώνιο κώνο, ορίζεται ως αξονικό τρίγωνο το ισοσκελές τρίγωνο που έχει ως κορυφή την κορυφή του κώνου και ως βάση τυχαία διάμετρο της κυκλικής βάσης του κώνου. Στη συνέχεια θεωρείται επίπεδο το οποίο τέμνει καθέτως μία από τις δύο ίσες πλευρές του αξονικού τριγώνου (επομένως και το επίπεδο του αξονικού τριγώνου) σε σημείο K (εικόνα 67). Ορίζεται η ευθεία $\Gamma\Delta$ που προκύπτει από την τομή του τέμνοντος επιπέδου με το επίπεδο της κυκλικής βάσης του κώνου και η χορδή $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη με την διάμετρο AB ¹⁴.

¹³ Είναι άγνωστο το πως ο Μέναιχμος συνέλαβε την ιδέα να τμήσει κώνους. Όμως αξίζει να αναφερθεί ότι, σύμφωνα με τον Ευκλείδη, η πέτρα που στερέωνε την λιθοδομή της κεντρική εισόδου των κατοικιών εκαλείτο «θυρεός» και είχε τρισδιάστατο ελλειπτικό σχήμα.

¹⁴ Επειδή η διέδρη γωνία που δημιουργείται από το τέμνον επίπεδο και από το επίπεδο της βάσης του κώνου, τέμνεται κάθετα από το αξονικό επίπεδο και προκύπτει πως η αντίστοιχη επίπεδος γωνία της διέδρης είναι η AMK και επομένως οι πλευρές της είναι κάθετες με την ακμή $\Gamma\Delta$.

και $KLB'M'$ προκύπτει $KL = MB = M'B' = p\sqrt{2}$, (γ) από το ορθογώνιο τρίγωνο $KA'M'$, όπου ορίσαμε $M'K = \psi$, προκύπτει ότι $A'M' = \psi\sqrt{2}$. Τελικά από την σχέση (4) προκύπτει ότι: $\chi^2 = \psi\sqrt{2} \cdot p\sqrt{2} \Leftrightarrow \chi^2 = 2p\psi$, (5).



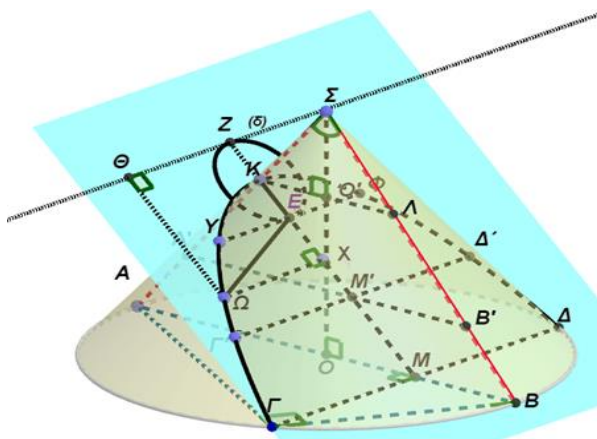
Εικόνα 72: Ορθογώνιος κώνος (ορθοτόμος) με παράλληλη τομή προς την κυκλική του βάση

Στη συνέχεια θα εξετασθεί η ειδική περίπτωση που για το τυχαίο σημείο Γ' της καμπύλης $\Gamma K \Delta$ (εικόνα 73) ισχύει $\chi = \psi \Rightarrow \chi^2 = 2p\chi \Rightarrow \chi(\chi - 2p) = 0$. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν δύο σημεία με αυτήν την ιδιότητα, το K και σημείο Γ' το οποίο έχει απόσταση: $(\Gamma'M') = 2p \Rightarrow (\Gamma'M') = (M'K) = 2p$. Στην συνέχεια διχοτομώντας (μέσω της μεσοκαθέτου της) το τμήμα $\Gamma'M'$, αυτή τέμνει την καμπύλη σε σημείο Y τέτοιο ώστε να απέχει από το KM απόσταση $YE = p$. Από την σχέση $\chi^2 = 2p\psi$, προκύπτει πως $EK = p/2$. Επιλέγοντας στη συνέχεια τυχαίο σημείο Ω επί της καμπύλης $\Gamma K \Delta$ θα υπολογισθεί η απόστασή του από το E . Στο τρίγωνο ΩEX εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει:

$$\begin{aligned} \Omega E^2 &= \Omega X^2 + XE^2 \Rightarrow \Omega E^2 = \chi^2 + (XK - EK)^2 = \chi^2 + \left(\psi - \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ \Omega E^2 &= \chi^2 + \psi^2 - p\psi + \frac{p^2}{4} = \chi^2 + \left(\frac{\chi^2}{2p}\right)^2 - p\psi + \frac{p^2}{4} = \frac{4p^2\chi^2}{4p^2} + \frac{\chi^4}{4p^2} - p \cdot \frac{\chi^2}{2p} + \frac{p^4}{4p^2} \Rightarrow \\ \Omega E^2 &= \frac{4p^2\chi^2 + \chi^4 - 2p^2\chi^2 + p^4}{4p^2} = \frac{\chi^4 + 2p^2\chi^2 + p^4}{4p^2} = \frac{(\chi^2 + p^2)^2}{(2p)^2} = \left(\frac{\chi^2 + p^2}{2p}\right)^2 \Rightarrow \\ \Omega E &= \frac{\chi^2 + p^2}{2p} = \frac{\chi^2}{2p} + \frac{p}{2} = \psi + \frac{p}{2} \Rightarrow \Omega E = \psi + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

Ερμηνεύοντας το αποτέλεσμα, προκύπτει πως για κάθε τυχαίο σημείο Ω της καμπύλης $\Gamma K \Delta$ ισχύει η σχέση: $\Omega E = \psi + \frac{p}{2} = XK + \frac{p}{2} = \Omega\theta$, δηλαδή το Ω ισαπέχει από το E και από μία «νοητή» ευθεία (δ) που βρίσκεται στο επίπεδο της καμπύλης (τέμνον επίπεδο), σε απόσταση

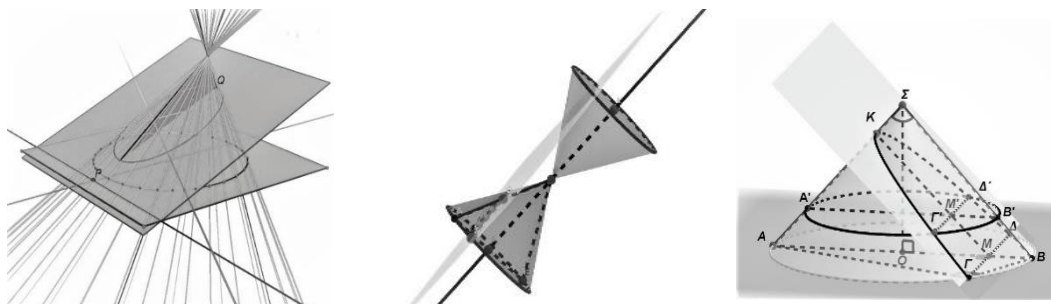
$KZ = \frac{p}{2}$ από την κορυφή K της παραβολής αυτής και είναι κάθετη στην ευθεία KM . Η ευθεία αυτή έχει ορισθεί «διευθετούσα ή διευθύνουσα ευθεία» της παραβολής που προέκυψε ως τομή ορθογωνίου κώνου από επίπεδο. Το σημείο E έχει ορισθεί ως «Εστία» της παραβολής. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Μέναιχμος δεν συμφωνούσε με την διάκριση μεταξύ «θεωρημάτων» και «προβλημάτων» (Heath, 2001). Τα θεωρούσε όλα ως γεωμετρικά προβλήματα μολοντί αναφέρονταν σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Επίσης εξέτασε το σημαντικό ερώτημα της μετατρεψιμότητας των θεωρημάτων και των αναγκαίων (για την μετατρεψιμότητα) συνθηκών.



Εικόνα 73: Ορθοτόμος και ανάδειξη Εστίας και διευθετούσας (διευθύνουσας) ευθείας

Ως συμπέρασμα έχουμε νοητή ύπαρξη της διευθετούσας ευθείας και της Εστίας σε κάθε παραβολή που προκύπτει από την τρισδιάστατη διαδικασία και μάλιστα κάθε σημείο αυτής της συνεχούς καμπύλης έχει την ισοαποστατική ιδιότητα (equidistant property). Επίσης αυτή η ιδιότητα εάν ισχύει για μία επίπεδη γεωμετρική καμπύλη, τότε η καμπύλη είναι παραβολική και αποδεικνύεται αφού αναφερθούν δύο θεωρήματα.

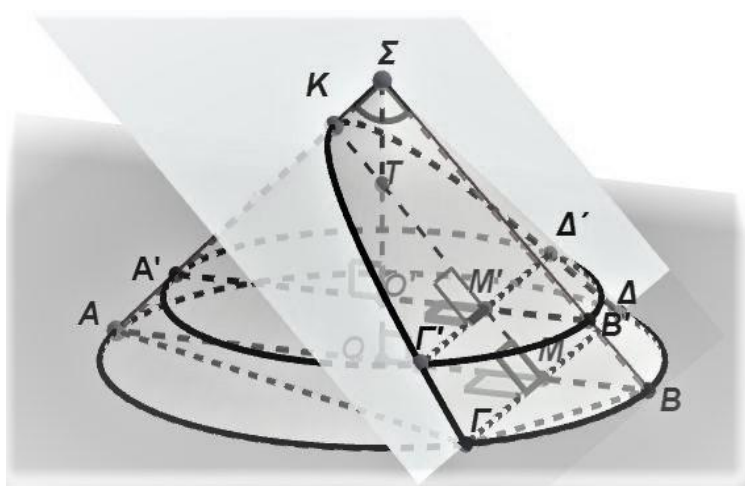
Ο Απολλώνιος (3ος αι. π.Χ.) στη συνέχεια χρησιμοποίησε έναν τυχαίο ορθό ή πλάγιο κώνο για να ορίσει όλες τις κωνικές τομές. Το τέμνον επίπεδο και το επίπεδο βάσης του κώνου τέμνονται κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής κάθετης προς τη βάση του αξονικού τριγώνου. Η κλίση του τέμνοντος επιπέδου καθορίζει τον τύπο της κωνικής τομής (Σταμάτης, 1975). Με απλά λόγια, όταν το επίπεδο τομής συναντά και τις δύο γενέτειρες που είναι και πλευρές του αξονικού τριγώνου τότε ορίζεται «έλλειψη» (εικόνα 74), και όταν το τέμνον επίπεδο τέμνει μία πλευρά του αξονικού τριγώνου παράλληλα προς τον άξονα και την προέκτασή του, τότε ορίζεται ως «υπερβολή». Η «παραβολή» ορίζεται όταν το επίπεδο τομής τέμνει την μία πλευρά του αξονικού τριγώνου παραλλήλως με την άλλη πλευρά του.



Εικόνα 74: Έλλειψη, Υπερβολή & Παραβολή μέσω καταλλήλων τομών σε κώνους

Και για τους δύο γεωμέτρους (Μέναιχμος και Απολλώνιος) παρατηρείται μια «χωρική γένεση» των τριών επίπεδων καμπυλών, όπου στην πρώτη περίπτωση η παραγωγή των τριών διαφορετικών κωνικών τομών κατασκευάζεται με τον ίδιο τρόπο τομής τριών διακεκριμένων ορθών κώνων όπου η γωνία της κορυφής των κώνων καθορίζει τον τύπο της κωνικής τομής, ενώ στην δεύτερη περίπτωση η κάθε καμπύλη παράγεται ξεκινώντας από ένα μόνο ορθό ή πλάγιο κώνο, όπου η κλίση του επιπέδου τομής καθορίζει τον τύπο της κωνικής τομής.

Συγκεκριμένα, σε τυχαίο ορθό κώνο με κορυφή Σ και βάση κύκλο (O, OA) φέρουμε την διάμετρο AB και ορίζεται το ισοσκελές τρίγωνο ΣAB . Θεωρούμε τυχαίο σημείο K πάνω στην γενέτειρα ΣA και φέρουμε από το K μία ημιευθεία παράλληλη με την πλευρά ΣB , η οποία τέμνει την βάση AB του ισοσκελούς τριγώνου ΣAB σε σημείο M (εικόνα 75). Φέρουμε στη συνέχεια χορδή $\Gamma\Delta$ κάθετη με την διάμετρο AB στο σημείο M , και ορίζεται το επίπεδο των σημείων K, Γ και Δ το οποίο είναι παράλληλο προς την γενέτειρα ΣB λόγω της παραλληλίας των KM και ΣB . Το επίπεδο αυτό τέμνει την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου και ορίζεται μία καμπύλη $\Gamma K \Delta$ η οποία ονομάζεται «παραβολή».



Εικόνα 75 : Ορθός κώνος για την διαδικασία του Απολλώνιου

Επισημαίνεται πως υπάρχει μόνο μία περίπτωση παραλλήλου επιπέδου από το K με την γενέτειρα ΣB , και όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις μη παραλλήλων επιπέδων από το K δημιουργούν ελλείψεις ή υπερβολές όταν οι γωνίες AKM είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες από

την γωνία ASB του ισοσκελούς τριγώνου SAB . Επίσης φέροντας επίπεδο παράλληλο με την κυκλική βάση του κώνου προκύπτουν :

(α) Ο κύκλος $(O', O'B')$, (β) η διάμετρος $A'B'$ η οποία βρίσκεται στο επίπεδο του αξονικού τριγώνου ASB και είναι παράλληλη με την διάμετρο AB , (γ) η χορδή $\Gamma\Delta'$ που αποτελεί την τομή του κυκλικού δίσκου $(O', O'B')$ και του επιπέδου χωρίου $\Gamma K\Delta$, και είναι παράλληλη με την χορδή $\Gamma\Delta$, (ε) το σημείο M' επί της KM το οποίο είναι μέσον την χορδής $A'B'$ λόγω του ότι είναι χορδή κάθετη με την διάμετρο $A'B'$, (στ) τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα MB και $M'B'$ από το παραλληλόγραμμο $MM'B'B$. Από «δύναμη σημείου ως προς κύκλο» στους δύο προηγούμενους παράλληλους κύκλους προκύπτουν οι σχέσεις:

$$M'\Gamma' \cdot M'\Delta' = M'\Gamma'^2 = M'A' \cdot M'B' \quad (1), \quad M\Gamma \cdot M\Delta = M\Gamma^2 = MA \cdot MB \quad (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει: $\frac{M\Gamma^2}{M'\Gamma'^2} = \frac{MA \cdot MB}{M'A' \cdot M'B'} = \frac{MA}{M'A'} \quad (3)$.

Λόγω της παραλληλίας των $A'M'$ και AM , καθώς και της παραλληλίας των KM και SB τα τρίγωνα KMA και $K'M'A'$ είναι ισοσκελή και όμοια μεταξύ τους, και προκύπτει η αναλογία:

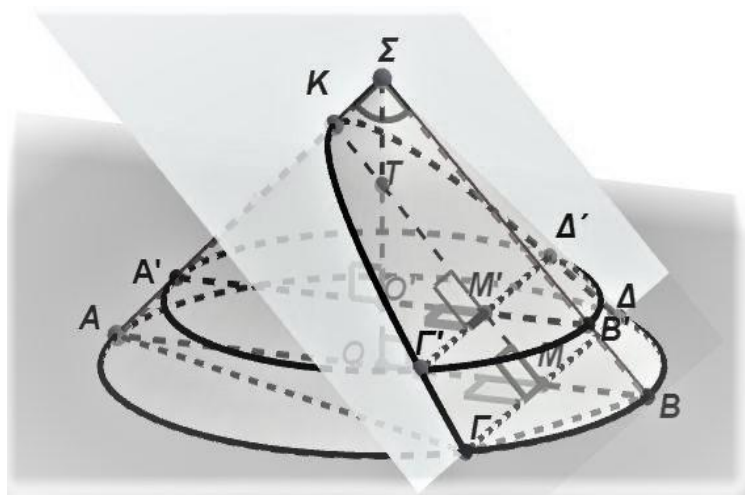
$\frac{KA}{KA'} = \frac{MA}{M'A'} = \frac{KM}{K'M'} \quad (4)$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει πως $\frac{M\Gamma^2}{M'\Gamma'^2} = \frac{KM}{K'M'}$ και μπορεί να διατυπωθεί το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 1: Εάν τμηθεί ένας ορθός κώνος από ένα επίπεδο παράλληλο προς τυχαία γενέτειρά του, τότε στην παραβολή που προκύπτει, τα τετράγωνα των αποστάσεων δύο σημείων της από τον άξονά συμμετρίας της θα είναι ανάλογα με τις αποστάσεις των ορθών προβολών τους (προς τον άξονα της καμπύλης) από την κορυφή της (Σταμάτης, 1975), σελ 263)¹⁵.

Αντιστρόφως, έστω ένας ορθός κώνος κορυφής S που τον τέμνει ένα επίπεδο σε σημείο K της γενέτειρας SA . Δημιουργείται στην παράπλευρη επιφάνεια του μία καμπύλη και υποθέτουμε πως για δύο τυχαία σημεία της Γ και Γ' , ισχύει: $\frac{M\Gamma^2}{M'\Gamma'^2} = \frac{KM}{KM'}$ όπου τα σημεία M και M' είναι οι ορθές προβολές των Γ και Γ' πάνω στην ευθεία που δημιουργείται από την τομή του επιπέδου του αξονικού τριγώνου SAB και του επιπέδου τομής $K\Gamma\Delta$ (δηλαδή η ευθεία KM). Φέροντας τώρα τα επίπεδα που διέρχονται από τα τυχαία σημεία Γ και Γ' και είναι κάθετα με τον άξονα SO του κώνου, αυτά οφείλουν να περιέχουν τις ορθές προβολές M και M' των Γ και Γ' (αντιστοίχως) επειδή τα AB και $A'B'$ είναι κάθετα στις χορδές $\Gamma\Delta$ και $\Gamma'\Delta'$ (εκ κατασκευής) καθώς επίσης TO και TO' είναι κάθετα με τις διαμέτρους AB και $A'B'$,

¹⁵ Θεώρημα 20^ο στο 1^ο βιβλίο του Απολλώνιου

οπότε από το θεώρημα των «τριών καθέτων» προκύπτει ότι $\Gamma\Delta$ και $\Gamma'\Delta'$ είναι επίσης κάθετα με TM και TM' . Επομένως τα μέσα των χορδών $\Gamma\Delta$ και $\Gamma'\Delta'$ είναι και οι προβολές των τυχαίων σημείων Γ και Γ' της καμπύλης και συνεπώς οι προβολές των Γ, Γ' στην ευθεία που προκύπτει από την τομή του αξονικού επιπέδου και του τέμνοντος επιπέδου και ανήκουν στα επίπεδα που περνούν από τα Γ και Γ' και είναι κάθετα στον άξονα του κώνου (εικόνα 76).



Εικόνα 76: Ορθός κώνος για την διαδικασία του Απολλώνιου

Από τα όμοια τρίγωνα AMK και $A'M'K'$ που προκύπτουν λόγω της παραλληλίας των AB και $A'B'$ έχουμε: $\frac{KA}{KA'} = \frac{MA}{M'A'} = \frac{KM}{KM'}$ και από την «δύναμη σημείου ως προς κύκλο» προκύπτουν οι σχέσεις: $MG \cdot MD = MG^2 = MA \cdot MB$ και $M'\Gamma' \cdot M'\Delta' = M'\Gamma'^2 = M'A' \cdot M'B'$.

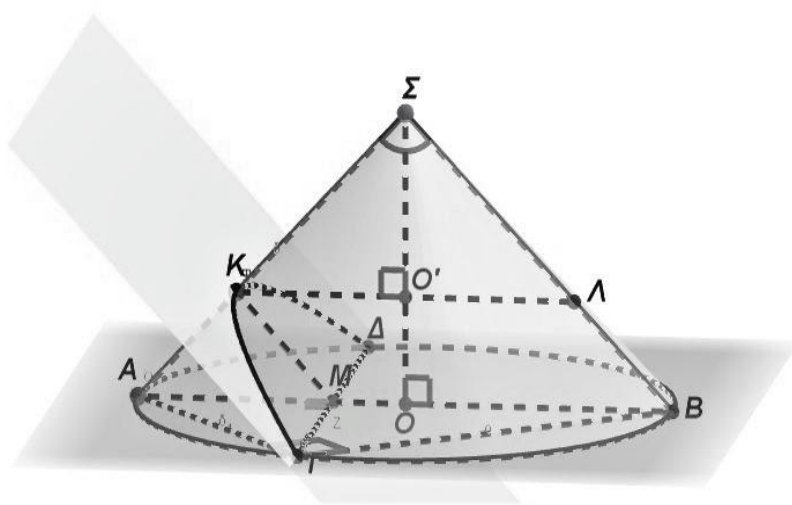
Συνδυάζοντας με την υπόθεση, έχουμε: $\frac{MA \cdot MB}{M'A' \cdot M'B'} = \frac{MG^2}{M'\Gamma'^2} = \frac{KM}{KM'} = \frac{MA}{M'A'} \Rightarrow \frac{MB}{M'B'} = 1 \Rightarrow MB = M'B'$. Επομένως τα ίσα τμήματα MB και $M'B'$ ανήκουν στα παράλληλα επίπεδα των δύο παραλλήλων κύκλων καθώς επίσης ανήκουν και στο επίπεδο του τριγώνου ΣAB και συνεπώς είναι και παράλληλα μεταξύ τους. Τελικά το τετράπλευρο $MM'B'B$ είναι παραλληλόγραμμο ($MB \parallel M'B'$) και έχουμε $MM' \parallel BB'$, δηλαδή το επίπεδο τομής είναι παράλληλο προς την γενέτειρα ΣB (και πλευρά του αξονικού τριγώνου ΣAB), και η καμπύλη που δημιουργήθηκε είναι παραβολή σύμφωνα με τον ορισμό του Απολλώνιου (Σταμάτης, 1975).

Θεώρημα 2: Αν τμήσουμε έναν κώνο με ένα επίπεδο παράλληλο προς μια γενέτειρα του, τότε στην προκύπτουσα κωνική τομή, το τετράγωνο πλευράς ίσης με την απόσταση GM ενός σημείου της Γ από τον άξονά της, θα είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τη μία του πλευρά ίση με το KM (την απόσταση της προβολής του σημείου Γ στον άξονα συμμετρίας της καμπύλης από την κορυφή της K) και την άλλη ίση με το τμήμα $x = \Sigma K \cdot \frac{AB^2}{\Sigma B^2}$ (Σταμάτης, 1975, σελ 231)¹⁶.

¹⁶ Θεώρημα 11° στο 1° βιβλίο του Απολλώνιου

Απόδειξη: Φέροντας το τμήμα $K\Lambda$ παράλληλα στο AB , τα ισοσκελή τρίγωνα ΣAB , KAM και $\Sigma K\Lambda$ είναι όμοια μεταξύ τους (εικόνα 77). Επίσης από το παραλληλόγραμμο $K\Lambda BM$, τα τμήματα $K\Lambda$ και MB ισούνται και προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma K}{K\Lambda} &= \frac{\Sigma A}{AB} = \frac{KA}{MA} \Rightarrow \frac{\Sigma K}{MB} = \frac{KA}{MA} = \frac{MK}{MA} \Rightarrow \frac{\Sigma K}{MB} = \frac{MK}{MA} \Rightarrow \frac{\Sigma K \cdot 1}{MB \cdot MA} = \frac{MK \cdot 1}{MA^2} \Rightarrow \frac{\Sigma K}{MB \cdot MA} = \frac{MK}{MA^2} \Rightarrow \frac{\Sigma K}{M\Gamma^2} = \\ \frac{MK}{MA^2} &\Rightarrow M\Gamma^2 = \Sigma K \cdot \frac{MA^2}{MK} = \Sigma K \cdot \frac{MA^2}{MK^2} \cdot MK \Rightarrow \frac{M\Gamma^2}{MK} = \Sigma K \cdot \frac{MA^2}{MK^2} \Rightarrow \frac{M\Gamma^2}{MK} = \Sigma K \cdot \frac{AB^2}{\Sigma B^2} \Rightarrow M\Gamma^2 = \\ MK \cdot \left(\Sigma K \cdot \frac{AB^2}{\Sigma B^2} \right).^{17} \end{aligned}$$



Εικόνα 77: Κωνική τομή παραβολής σύμφωνα με τον Απολλώνιο

Παρατηρήσεις:

α) Το 2^ο θεώρημα ο Απολλώνιος στα «Κωνικά» του το χρησιμοποίησε ως ορισμό της παραβολής και το τμήμα $\lambda = \Sigma K \cdot \frac{AB^2}{\Sigma B^2}$ το ονόμασε «ορθία πλευρά» ή «ορθία» ή «παράμετρο των τεταγμένων» και αργότερα αποδόθηκε με λατινικούς όρους ως «latus rectum» (Σταμάτης, 1975).

β) Εάν η γωνία Σ του αξονικού τριγώνου ΣAB είναι 90° , τότε στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΣAB έχουμε $\frac{AB}{\Sigma B} = \frac{\Sigma B \cdot \sqrt{2}}{\Sigma B} = \sqrt{2}$. Επομένως η «ορθία» ισούται με $\lambda = \Sigma K \cdot \frac{AB^2}{\Sigma B^2} = \Sigma K \cdot$

¹⁷ Θεωρώντας το τμήμα ΣK ως παράμετρο της συγκεκριμένης καμπύλης, η ποσότητα $\lambda = \Sigma K \cdot \frac{AB^2}{\Sigma B^2}$, είναι γεωμετρικώς κατασκευάσιμη ως εξής: $\lambda = \Sigma K \cdot \frac{AB^2}{\Sigma B^2} \Leftrightarrow \lambda \cdot \frac{\Sigma B^2}{\Sigma K} = AB^2$ και θέτοντας $\kappa = \frac{\Sigma B^2}{\Sigma K} \Leftrightarrow \Sigma B^2 = \kappa \cdot \Sigma K$, μπορούμε με «κανόνα και διαβήτη» να κατασκευάσουμε το τμήμα κ κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Θαλή. Στη συνέχεια, γνωρίζοντας πλέον το κ , έχουμε την σχέση $\kappa \cdot \lambda = AB^2$ μπορούμε να κατασκευάσουμε και την ποσότητα $\lambda = \Sigma K \cdot \frac{AB^2}{\Sigma B^2}$ με τον ίδιο τρόπο.

$\left(\frac{AB}{SB}\right)^2 = SK \cdot (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot SK = 2p \Rightarrow SK = p$, όπου p η απόσταση της κορυφής από το σημείο τομής της γενέτειρας και του τέμνοντος επιπέδου, και έχουμε την περίπτωση της «ορθοτόμου» σύμφωνα με την κατασκευή του Μέναιχμου, διότι επιπλέον το επίπεδο $\Gamma K \Delta$ τέμνει κάθετα την γενέτειρα SA λόγω της παραλληλίας της με την SB . Έτσι αποδεικνύεται ο γενικότερος ορισμός του Απολλώνιου.

γ) Τελικά αποδείχθηκε ότι $\frac{MG^2}{MK} = SK \cdot \frac{AB^2}{SB^2} = \lambda$ όπου η παράμετρος λ της Παραβολής είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη. Ορίζοντας $\chi = (MG)$ και $\psi = (MK)$, η προηγούμενη σχέση παίρνει την μορφή $\frac{\chi^2}{\psi} = SK \cdot \frac{AB^2}{SB^2} = \lambda \Rightarrow \chi^2 = \lambda\psi$ και προκύπτει πάλι ότι η τετραγωνική συνάρτηση είναι εγγενώς συνδεδεμένη με την παραβολή.

δ) Επίσης, έχοντας ήδη αναδειχθεί η ύπαρξη της «Εστίας» και της «διευθετούσας» μιας παραβολής στην περίπτωση της «ορθοτόμου» του Μέναιχμου, καθώς και ο τρόπος κατασκευής τους, στην περίπτωση της παραβολής με τον ορισμό του Απολλώνιου ισχύουν ακριβώς τα ίδια αρκεί πρώτα να κατασκευαστεί γεωμετρικά η «ορθία» με τον τρόπο που παρουσιάστηκε.

Θεώρημα 3: Όταν δοθεί μια σταθερή ευθεία (δ) και ένα σταθερό σημείο E , ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M που απέχουν εξ ίσου από την ευθεία και το σταθερό σημείο είναι παραβολή.

Απόδειξη: Μεταφερόμενοι στο επίπεδο μιας παραβολής, θεωρούμε τον άξονά της (ε) και την «ορθία» της $\lambda = AK$ (εικόνα 78). Από το 2^ο θεώρημα, για τυχαίο σημείο M της παραβολής, για την κορυφή της A και για την προβολή Γ του M στον άξονα αυτής, θα ισχύει $MG^2 = AG \cdot \lambda$. Έστω τα σημεία O και E επί του άξονα (ε) εκατέρωθεν της κορυφής A , έτσι ώστε να ισχύει $AE = AO = \frac{1}{4} \cdot \lambda$ και η ευθεία (δ) κάθετη στην (ε) στο σημείο O . Φέροντας την απόσταση MB του M προς την ευθεία (δ) και το τμήμα EM , από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $EM\Gamma$ προκύπτει: $EM^2 = MG^2 + E\Gamma^2 = AG \cdot \lambda + E\Gamma^2$. Η σχέση αυτή εκφραζόμενη συναρτήσει των OG και λ γίνεται: $EM^2 = \left(OG - \frac{\lambda}{4}\right) \cdot \lambda + \left(OG - \frac{\lambda}{2}\right)^2 = OG \cdot \lambda - \frac{\lambda^2}{4} + OG^2 + \frac{\lambda^2}{4} - OG \cdot \lambda = OG^2$. Ο πρώτος και τελευταίος όρος της εξασφαλίζουν ότι $EM = OG = MB$.

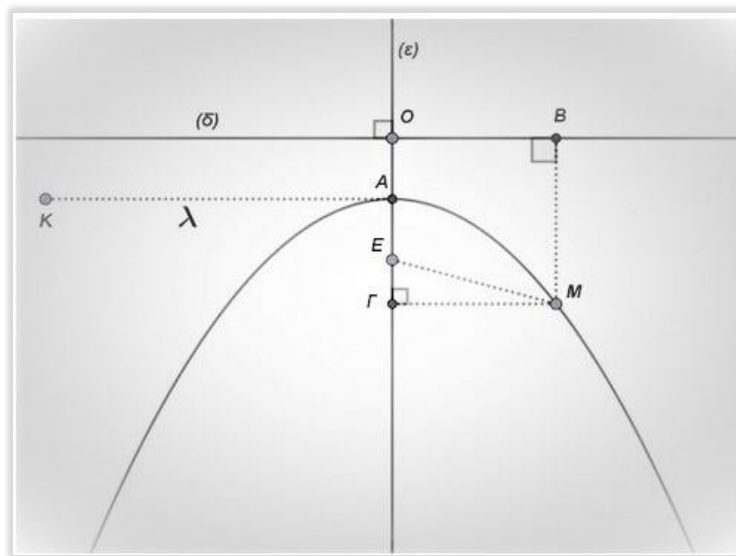
Αντιστρόφως, έχοντας μία καμπύλη με άξονα συμμετρίας (ε) και για το σημείο M του επιπέδου (εικόνα 78) ισχύει $EM = MB$ όπου MB είναι η απόσταση του M από την ευθεία (δ) και ορίζεται το μήκος του OE από την ευθεία (δ) ως $\lambda/2$. Επίσης το μέσον A της απόστασης EO είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Από το Πυθαγόρειο

θεώρημα προκύπτει: $M\Gamma^2 = ME^2 - E\Gamma^2 = MB^2 - E\Gamma^2$. Αφού $MB = O\Gamma = A\Gamma + \frac{\lambda}{4}$ και

$$E\Gamma = A\Gamma - \frac{\lambda}{4}, \quad \text{τότε:} \quad M\Gamma^2 = \left(A\Gamma + \frac{\lambda}{4}\right)^2 - \left(A\Gamma - \frac{\lambda}{4}\right)^2 = A\Gamma^2 + \frac{A\Gamma \cdot \lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{16} - A\Gamma^2 + \frac{A\Gamma \cdot \lambda}{2} -$$

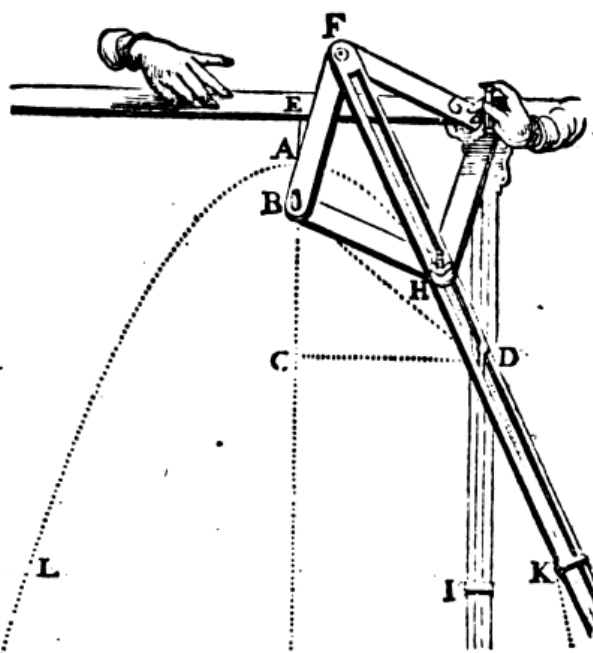
$$\frac{\lambda^2}{16} = 2 \cdot \frac{A\Gamma \cdot \lambda}{2} = A\Gamma \cdot \lambda \Rightarrow \frac{M\Gamma^2}{A\Gamma} = \lambda.$$

Η τελευταία σχέση όμως υποστηρίζει, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, ότι το σημείο M είναι σημείο της παραβολής με κορυφή το A και με την «ορθία» της ίση με λ .



Εικόνα 78: Η παραβολή στο επίπεδο

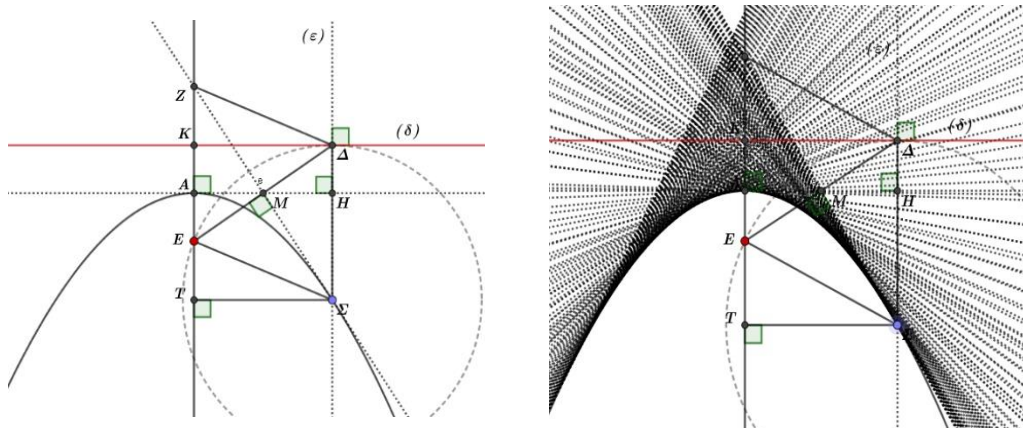
Πόρισμα: Με βάση τον ισοδύναμο ορισμό της παραβολής, ο οποίος προκύπτει από το 3^ο θεώρημα έχοντας από τον Απολλώνιο ήδη αποδεσμευτεί η παραβολή από τον τρισδιάστατο κώνο, θα γίνει προσπάθεια για την ακριβή χάραξή της. Τυχαιό σημείο Δ της διευθετούσας (δ) το συνδέουμε με την Εστία E (εικόνα 79). Χαράσσεται η μεσοκάθετος του ΔE και η κάθετη ευθεία (ε) προς την διευθετούσα στο σημείο Δ . Το σημείο τομής Σ της (ε) και της μεσοκαθέτου του $\Sigma\Delta$, είναι σημείο της παραβολής έχοντας μονίμως την ιδιότητα των ίσων αποστάσεων ή αλλιώς εκκεντρότητα $\varepsilon = 1$. Παίρνοντας αρκετά τέτοια σημεία Δ της διευθετούσας και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία έχουμε προς το παρόν, μία «σημείο προς σημείο» χάραξη της.



Εικόνα 80: Οπτικό διάγραμμα από το βιβλίο του van Schooten για τον παραβολογράφο του

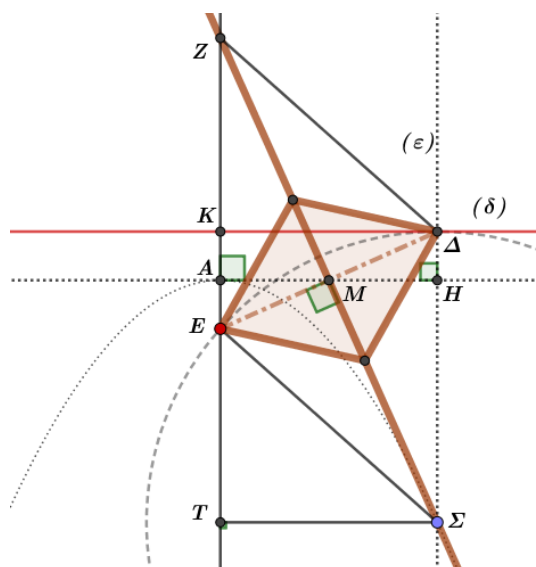
- 2) Η μεσοκάθετος και εφαπτόμενη ευθεία $FHDK$ είναι και διχοτόμος της γωνίας BDG (εικόνα 80).
- 3) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Sigma\Delta M$, ΣME , ZME και $ZM\Delta$ είναι ίσα και καθιστούν ρόμβο το τετράπλευρο $E\Sigma\Delta Z$ (εικόνα 81).
- 4) Η κορυφή A της παραβολής είναι πάντα το μέσο της εκάστοτε «υποεφαπτομένης» TZ (εικόνα 81) (Παράρτημα [12]).
- 5) Τα σημεία Σ της παραβολής αποτελούν κέντρα κύκλων που περνούν από την Εστία E και εφάπτονται της διευθετούσας στο σημείο Δ . Ισοδύναμα η παραβολή ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων με αυτή την ιδιότητα (εικόνα 81).
- 6) Το σημείο Σ της παραβολής για οποιαδήποτε θέση του σημείου Δ , αποτελεί μία από τις τέσσερις κορυφές ρόμβου $E\Sigma\Delta Z$ ¹⁸, και αποτελεί το σημείο τομής των πλευρών $E\Sigma$ και ΔZ του ρόμβου καθώς και της «διαγωνίου-εφαπτομένης» ΣZ (εικόνα 81).
- 7) Εάν για κάθε σημείο της παραβολής Σ φέρουμε, με την διαδικασία της μεσοκαθέτου του $E\Delta$, εμφανίζεται «φάκελος» που κατασκευάζει την καμπύλη (εικόνα 81) και αναδεικνύεται το αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα που μπορεί να επιλύσει ο μηχανισμός αυτός.

¹⁸ Το Z είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου ΣM με την ευθεία EK . Από την ισότητα των τριγώνων $M\Delta\Sigma$ και EMZ ($EM=M\Delta$ και από μία οξεία γωνία ίση ως εντός και εναλλάξ) προκύπτει και η ισότητα των EZ και ΔE . Εύκολα προκύπτει και η ισότητα των EZ και $Z\Delta$. Άρα η 4^η κορυφή του ρόμβου είναι πάνω στην EK , δηλαδή το Z της εικόνας 75.



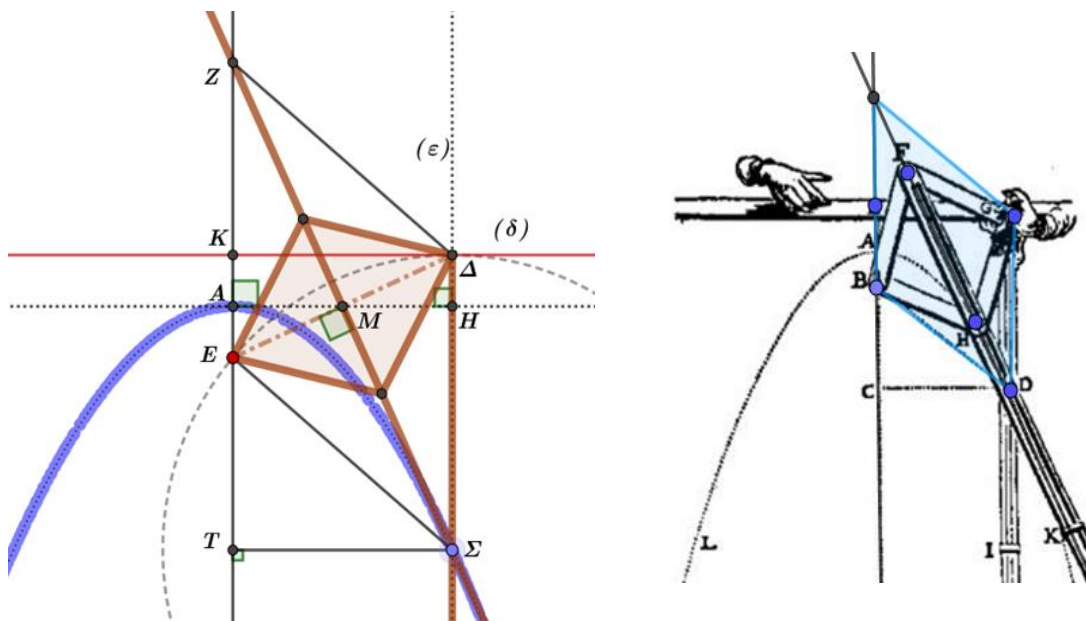
Εικόνα 81: Ο νοητός ρόμβος της «ισοαποστατικής» ιδιότητας-ορισμού της παραβολής & κατασκευή παραβολής μέσω φακέλλου των εφαπτόμενων ευθειών της

- 9) Μπορεί να ενσωματωθεί στο επίπεδο σχήμα της παραβολής, αρθρωτός ρόμβος που η μία κορυφή του είναι σταθερή πάνω στην Εστία, η απέναντί της στο τυχαίο σημείο Δ της διευθετούσας, καθώς και στις άλλες δύο κορυφές εφαρμόζεται καταλλήλως ευθύγραμμη ράβδος που ενσωματώνει την «διαγώνιο-εφαπτομένη» της παραβολής (εικόνα 82). Λόγω της «ευελιξίας» του αρθρωτού ρόμβου, σε οποιαδήποτε θέση του σημείου Δ και καθώς μπορεί να περιστραφεί γύρω από την Εστία, διατηρεί τις σχέσεις του με τον ρόμβο $ΕΣ\Delta Z$ σε οποιαδήποτε θέση του Δ .



Εικόνα 82: Άρθρωση φυσικού ρόμβου λόγω ισοαποστατικής ιδιότητας

- 10) Ενσωματώνοντας πάνω στην πλευρά $\Delta\Gamma$ του νοητού ρόμβου $ΕΣ\Delta Z$ μία (μονίμως κάθετη της διευθετούσας) ράβδο και αρθρώνοντας την καταλλήλως στα σημεία Δ και Σ (όπου τοποθετείται γραφίδα) τότε η μετακίνηση της κορυφής Δ πάνω στην ευθύγραμμη και σταθερή διαδρομή (δ) , μετακινεί ταυτόχρονα τους δύο ρόμβους και η γραφίδα στο Σ χαράσσει ένα συνεχές παραβολικό τόξο (εικόνα 83).



Εικόνα 83: Σταδιακή κατασκευή παραβολογράφου van Schooten & οπτικό διάγραμμα παραβολογράφου van Schooten από το βιβλίο του, με εμφάνιση του νοητού ρόμβου

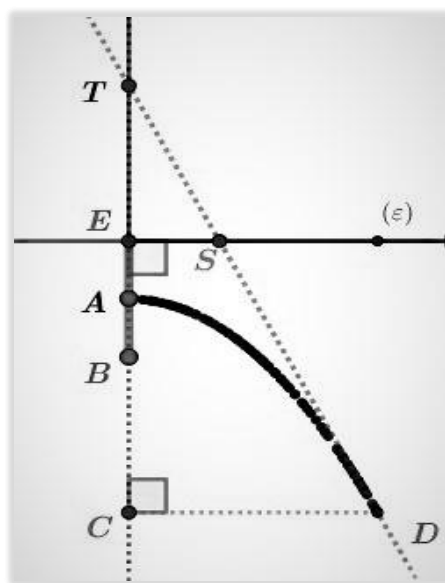
- 11) Οι δυνατότητες είναι περιορισμένες λόγω του μήκους των πλευρών του φυσικού ρόμβου, οι οποίες και καθορίζουν τα άκρα της διαδρομής του Δ πάνω στην διευθετούσα (δ) . Το μέγιστο μήκος αυτής της συμμετρικής και ευθύγραμμης διαδρομής του Δ , προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ίση με το διπλάσιο της πλευράς του ρόμβου και μία κάθετη πλευρά την απόσταση της Εστίας από την διευθετούσα (ημιορθία).

4.1.1. Διατύπωση και γεωμετρική κατασκευή αντίστροφου εφαπτομενικού προβλήματος

«Σε μία από δύο κάθετες ευθείες θεωρούμε σημείο B που απέχει σταθερή απόσταση $p = (BE)$ από την άλλη ευθεία. Να χαραχθεί η καμπύλη που ξεκινά από το μέσο A του τμήματος BE και η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο D να είναι τέτοια ώστε η απόσταση του D από την ευθεία που περιέχει το B , να είναι γεωμετρικός μέσος της απόστασης p και της αντίστοιχης υποεφαπτομένης στο σημείο D ως προς την ευθεία που περιέχει το B » (εικόνα 84).

ή ισοδύναμα,

«Σε μία από δύο κάθετες ευθείες θεωρούμε σημείο B που απέχει σταθερή απόσταση $p = (BE)$ από την άλλη ευθεία. Να χαραχθεί η καμπύλη που ξεκινά από το μέσο του τμήματος BE και η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο D να είναι τέτοια ώστε το τετράγωνο πλευράς ίσης με την απόσταση του D από την ευθεία που περιέχει το B , να είναι ισεμβαδικό του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με την απόσταση p και την αντίστοιχη υποεφαπτομένη στο D ως προς τη ευθεία που περιέχει το B » (εικόνα 84).

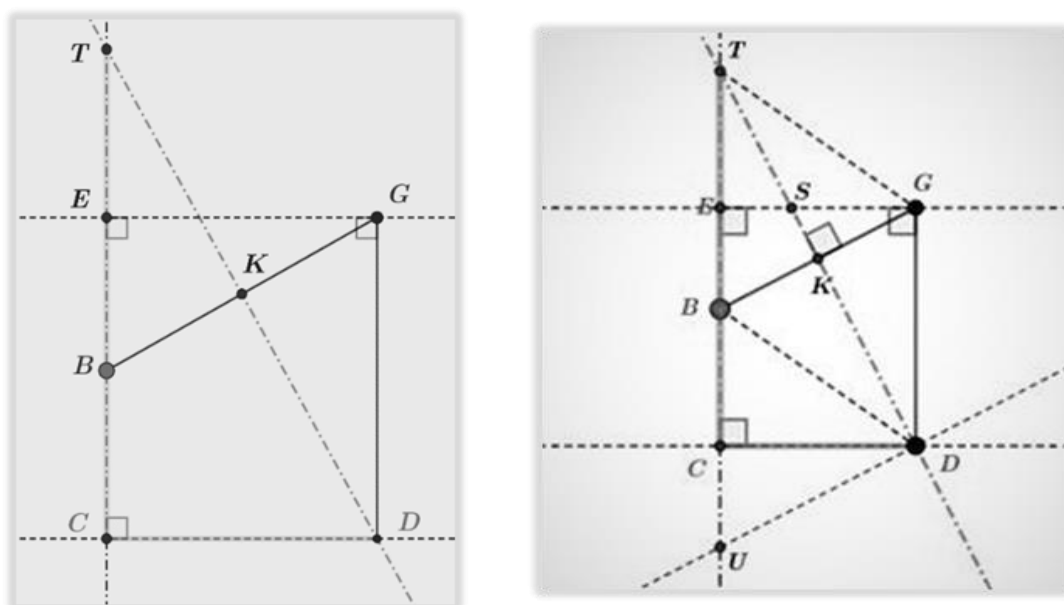


Εικόνα 84: Διατύπωση αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος παραβολικής καμπύλης μέσω του παραβολογράφου van Schooten

Γεωμετρική κατασκευή

Σε τυχαία θέση της εφαπτομένης ευθείας θεωρείται το σημείο επαφής D και σύμφωνα με την διατύπωση του προβλήματος, προκύπτει $(CD)^2 = p \cdot (CT) \Leftrightarrow \frac{(CD)}{p} = \frac{(CT)}{(CD)} = \frac{(CT)}{(EG)}$, το οποίο

είναι ισοδύναμο με την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων DTC και GEB (εικόνα 80). Προβάλλοντας καθέτως το D στο σημείο G της κάθετης με τη BE , από την ισότητα των γωνιών CDT και EBG των ομοίων τριγώνων¹⁹, και από την καθετότητα των πλευρών EB και CD προκύπτει η μόνιμη καθετότητα των ευθειών DT και BG στο K . Καθώς η εφαπτομένη και το σημείο επαφής D αλλάζουν θέση στο επίπεδο το τετράπλευρο $TGDB$ έχει μονίμως κάθετες διαγωνίους στο K (εικόνα 85). Εάνδειχθεί ότι το τετράπλευρο $TGDB$ είναι παραλληλόγραμμο τότε η καμπύλη που θα χαραχθεί από το ίχνος του D , θα είναι παραβολική διότι το $TGDB$ θα είναι ρόμβος με συνέπεια να ισχύει $(DB) = (DG)$.



Εικόνα 85: Πρώτο και δεύτερο βήμα γεωμετρικής κατασκευής αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος μέσω του παραβολογράφου van Schooten

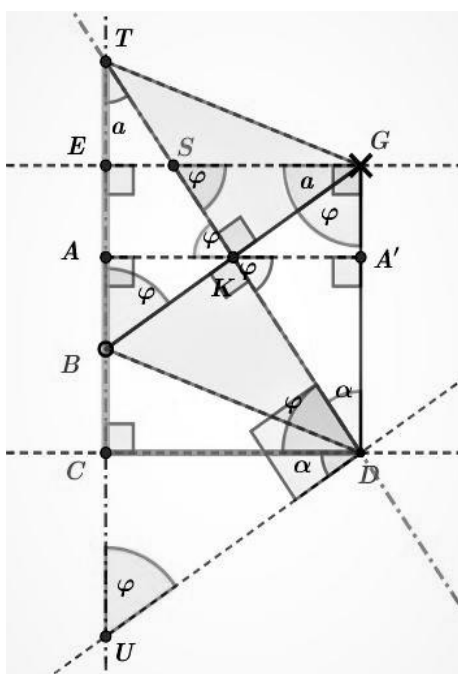
Τα τρίγωνα BTK και GKD είναι όμοια ως ορθογώνια και έχοντας ίσες τις γωνίες BTK και GDK ως εντός και εναλλάξ (εικόνα 85). Προκύπτει στη συνέχεια ότι οι αντίστοιχες πλευρές TK και KB είναι ανάλογες των πλευρών KD και KG , δηλαδή $\frac{TK}{KD} = \frac{KB}{KG} \Leftrightarrow \frac{TK}{KB} = \frac{KD}{KG}$.

Στη συνέχεια χαράσσοντας την ευθεία UD κάθετα με την διαγώνιο TD , από την ισότητα των τριγώνων BEG , UCD ²⁰, προκύπτει ότι το μεταβαλλόμενο (και ως προς την θέση) τρίγωνο UCD έχει σταθερή ως προς μήκος και φορά την πλευρά CU (ίση με την σταθερή σε μήκος και θέση EB). Εάν στη συνέχεια από το σημείο τομής K των διαγωνίων του $TGDB$ φέρουμε κάθετο τμήμα KA προς την ευθεία TC , τότε το τρίγωνο KAB είναι όμοιο με το τρίγωνο BEG και συνεπώς η πλευρά BA θα είναι σταθερού μήκους επειδή είναι ομόλογη της EB (εικόνα 81). Όμως λόγω της σταθερής θέσης της BA προκύπτει ότι «ο γεωμετρικός τόπος των

¹⁹ Είναι απέναντι γωνίες ομολόγων πλευρών

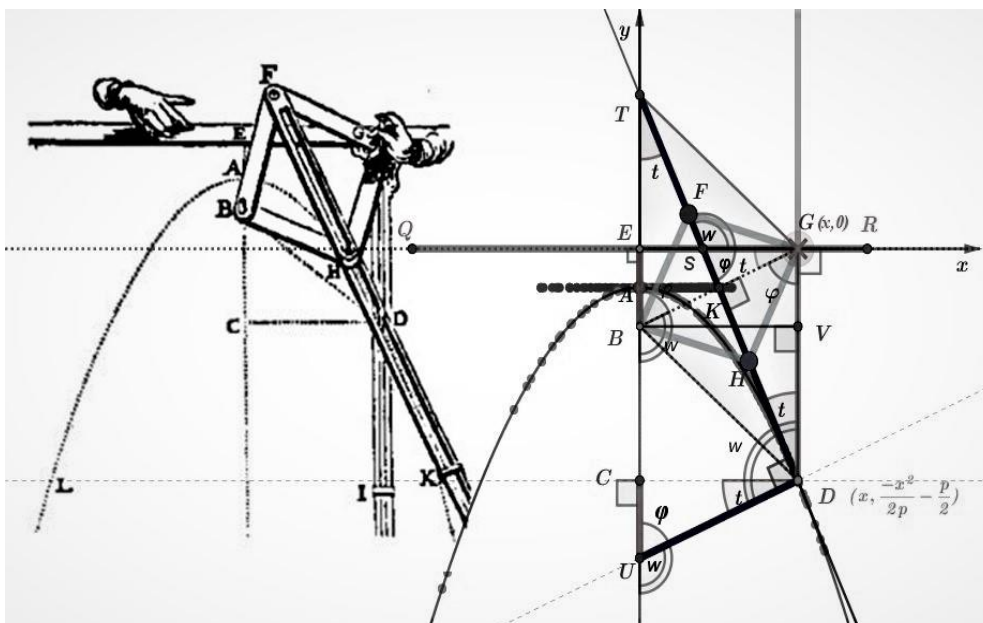
²⁰ Ορθογώνια τρίγωνα με ίσες υποτείνουσες λόγω του παραλληλογράμμου $BGDU$, και από μία κάθετη πλευρά ίση λόγω του ορθογωνίου $EGDC$.

σημείων K είναι ευθεία γραμμή κάθετη της TC » (εικόνα 86). Έχοντας υποθέσει ότι η χάραξη της καμπύλης, ξεκινά από το μέσον του EB , λόγω συνεχούς κίνησης, προκύπτει πως το A είναι το μέσον του EB (επειδή κάποια στιγμή θα ταυτισθεί με το K) και «ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των διαγωνίων αυτού του τετραπλεύρου είναι ευθεία γραμμή κάθετη στο μέσον A του EB ». Τα όμοια τρίγωνα BAK και $GA'K$ είναι ίσα λόγω ισότητας των AB και AE , και προκύπτει και η ισότητα των ομοίων τριγώνων TBK και GKD η οποία και καθιστά παραλληλόγραμμο το $TGDB$, το οποίο με τη σειρά του είναι ρόμβος λόγω της καθετότητας των διαγωνίων του. Άρα ισχύει πως $DB = DG$ για κάθε σημείο D της ζητούμενης καμπύλης. Τελικά κάθε σημείο D της καμπύλης η οποία θα χαραχθεί υπό τις αρχικές συνθήκες της εφαπτομένης της, είναι παραβολή σύμφωνα με τον ορισμό των «ίσων αποστάσεων» του Πάππου (Heath, 2001).



Εικόνα 86: Τρίτο βήμα γεωμετρικής κατασκευής αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος μέσω του παραβολογράφου van Schooten

Έχοντας χαράξει την κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο D , ορίζονται η «κανονική» DU και η «υποκανονική» CU (Dennis, 1995). Από τα ίσα τρίγωνα EBG και CUD προκύπτει ότι $(CU) = (EB)$ και πως η «υποκανονική» CU για οποιοδήποτε σημείο αυτής της καμπύλης είναι σταθερού μήκους και ισούται με την σταθερή απόσταση p του σημείου B από την ευθεία EG . Αυτό αποτελεί επιβεβαίωση ότι **η καμπύλη που έχει, σε κάθε σημείο της D , εφαπτομένη την ευθεία DT τέτοια ώστε η απόσταση του D από την ευθεία που περιέχει το B , να είναι γεωμετρικός μέσος της απόστασης p και της αντίστοιχης υποεφαπτομένης στο σημείο D ως προς την ευθεία που περιέχει το B είναι παραβολή** (εικόνα 87).



Εικόνα 87: Κατασκευή ισο-υποκανονικής καμπύλης από την μαθηματική μηχανή του van Schooten που γίνεται και «ευθυγράφος», τοποθετώντας καταλλήλως γραφίδα στο κέντρο του ρόμβου της

Επίσης, όταν υπάρχει παραβολική καμπύλη, προκύπτουν πολλές ιδιότητες και μία εξ αυτών είναι η ύπαρξη ενός αόρατου ρόμβου που για οποιοδήποτε σημείο D της καμπύλης, οι τέσσερις κορυφές του είναι η Εστία, η προβολή του σημείου D στην διευθετούσα, το σημείο D και το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα συμμετρίας της καμπύλης. Επίσης η μία διαγώνιος του αόρατου ρόμβου είναι η «εφαπτομένη» της καμπύλης κατά τον Leibnitz και έχει ως ένα άκρο της το D . Σε αυτόν τον αόρατο ρόμβο που συνοδεύει το D , μπορεί να ενσωματωθεί ο ρόμβος του van Schooten, που «υλοποιεί» με την διαγώνιο ράβδο του την «εφαπτομένη» του Leibnitz, με κέρσορα την κοινή κορυφή των δύο ρόμβων στην διευθετούσα και ράβδο κύλισης του κέρσορα την διευθετούσα, και χαράσσει παραβολή είτε με γραφίδα είτε με το «θήκη» της «εφαπτομένης» του Leibnitz.

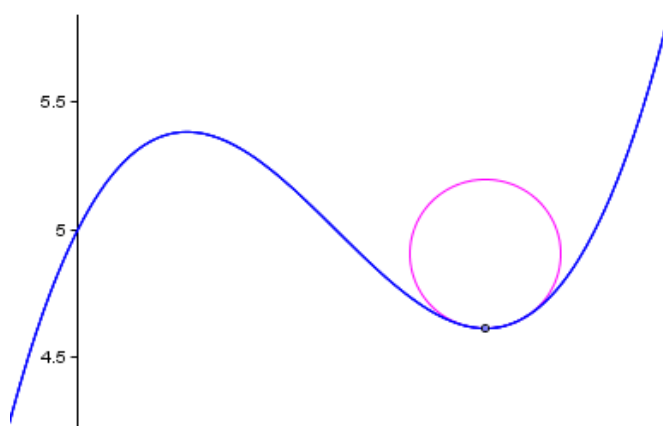
Αντιστρόφως, θεωρώντας κάποιες αρχικές συνθήκες, προκύπτει ότι η εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο της τυχαίας καμπύλης χαράσσει παραβολή και απαιτείται, σε κάθε θέση του σημείου επαφής, η εμφάνιση του νοητού και του φυσικού ρόμβου του van Schooten.

Για να χαραχθεί η παραβολή χωρίς τον μηχανισμό του van Schooten, ξεκινώντας με μία ευθύγραμμη λεπτή και άκαμπτη ράβδο και κρατώντας της από το μέσον της και τοποθετώντας την κάθετα στο BE και στο μέσο A , συνεχίζουμε την μετακίνηση της κάθετα στο BE . Κατά την μετακίνηση την περιστρέφουμε έτσι ώστε το μήκος του αντιστοίχου BT να υποδεικνύει την πλευρά TG και στη συνέχεια τις άλλες δύο πλευρές του ρόμβου και το D . Πρέπει όμως σε κάθε θέση της σταδιακά περιστρεφόμενης ράβδου η απόσταση του D από την BE να είναι μέση ανάλογος του BE και της προβολής του DT στην BE . Άρα η κατασκευή

είναι «σημείο προς σημείο» εκτός αν χρησιμοποιηθεί η μηχανή αυτή που έχει ενσωματωμένη αυτή την προϋπόθεση. Τελικά η παρουσία αυτού των δύο ρόμβων είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη χάραξης παραβολικού τόξου από την μηχανή του van Schooten.

4.1.κ. Τοπική καμπυλότητα παραβολής μέσω του παραβολογράφου van Schooten

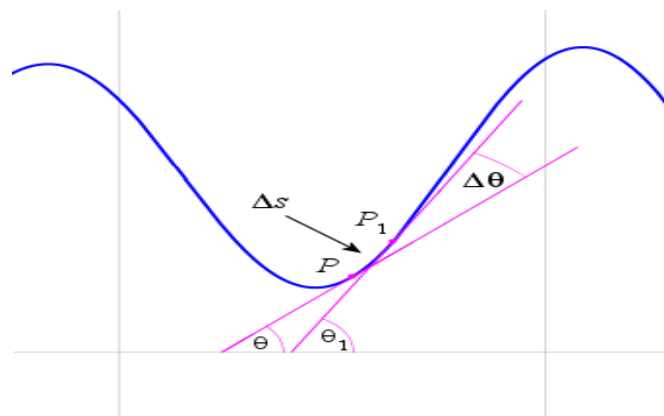
Γενικά η ακτίνα καμπυλότητας μιας καμπύλης σε ένα συγκεκριμένο σημείο ορίζεται γεωμετρικά ως η ακτίνα του κύκλου προσέγγισης (εικόνα 88). Αυτή η ακτίνα αλλάζει καθώς κινούμαστε κατά μήκος της καμπύλης. Η καμπυλότητα εξαρτάται από την ακτίνα του κύκλου προσέγγισης και όσο μικρότερη είναι η ακτίνα, τόσο μεγαλύτερη είναι η καμπυλότητα και όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του κύκλου προσέγγισης, τόσο μικρότερη είναι η καμπυλότητα.



Εικόνα 88 : Κύκλος προσέγγισης καμπύλης

Η ακτίνα καμπυλότητας R ορίζεται είναι ο αντίστροφος αριθμός της καμπυλότητας K στο συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης (εικόνα 89). Έστω P και P_1 είναι δύο πολύ κοντινά σημεία σε μια καμπύλη (εικόνα 89) και Δs είναι το μήκος του τόξου PP_1 , και $\Delta\theta$ είναι η διαφορά των δύο γωνιών των εφαπτομένων ευθειών στα σημεία P και P_1 . Η καμπυλότητα του τόξου από το P στο P_1 δίνεται από το κλάσμα $\Delta\theta / \Delta s$. Η καμπυλότητα K στο σημείο P δίνεται από την σχέση $K = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}, (1).$$



Εικόνα 89: Μεταβολή γωνίας εφαπτομένης ευθείας σε σημείο τυχαίας καμπύλης

Επειδή το ds μπορεί να θεωρηθεί υποτείνουσα απειροελάχιστου ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές dx & dy , τότε για το σημείο P η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη ευθεία σε αυτό το σημείο της καμπύλης θα είναι $\tan\theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Άρα, $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$. Τώρα πρέπει να υπολογισθεί η παράγωγος ως προς x του πρωτεύοντος κλάδου της συνάρτησης $\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$ και θέτοντας $y(x) = \arctan u(x)$, τότε $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{du(x)}{dx}}{1+u(x)^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2(y)}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (2).

Επίσης $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(ds)^2}{(dx)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(dx)^2+(dy)^2}{(dx)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ (3). Από την σχέση (1)

προκύπτει ότι $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \xrightarrow{(2) \& (3)} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2(y)}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2(y)}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$.

Η καμπυλότητα της συνάρτησης τελικά ισούται με $K = \frac{\frac{d^2(y)}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$ και η ακτίνα του κύκλου

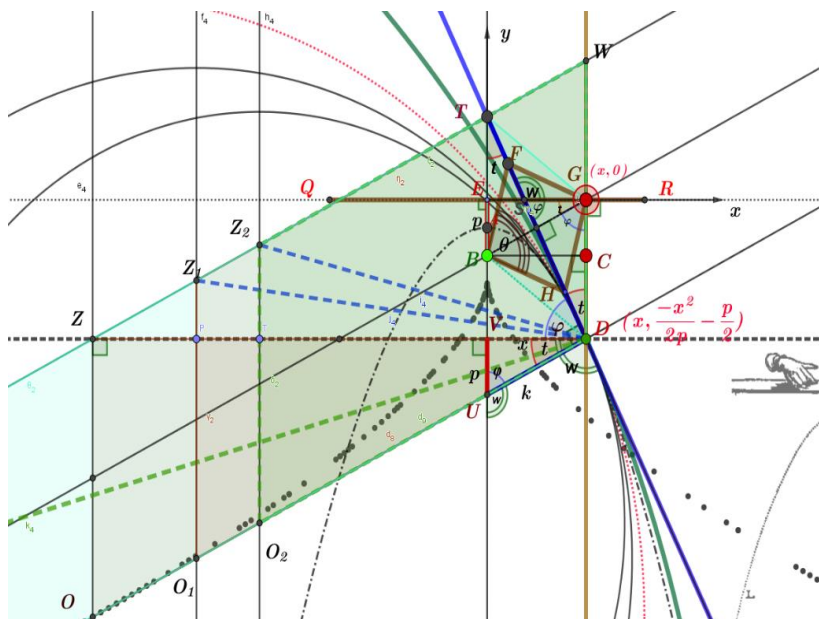
προσέγγισης σε σημείο $(x, y(x))$ της καμπύλης που αντιστοιχεί σε αυτήν τη συνάρτηση ισούται με $R = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2(y)}{dx^2}}$.

Στην καμπύλη που χαράσσει ο μηχανισμός του van Schooten (εικόνα 90), και με το συγκεκριμένο καρτεσιανό σύστημα, έχειδειχθεί ότι για τυχαίο σημείο $D(x, y)$ της παραβολικής καμπύλης που χαράσσεται ισχύει η σχέση (συνάρτηση) $y = \frac{-1}{2p}x^2 - \frac{p}{2}$ μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου αυτού και η ακτίνα του κύκλου προσέγγισης στο σημείο $(x, \frac{-1}{2p}x^2 - \frac{p}{2})$ δίνεται από την σχέση:

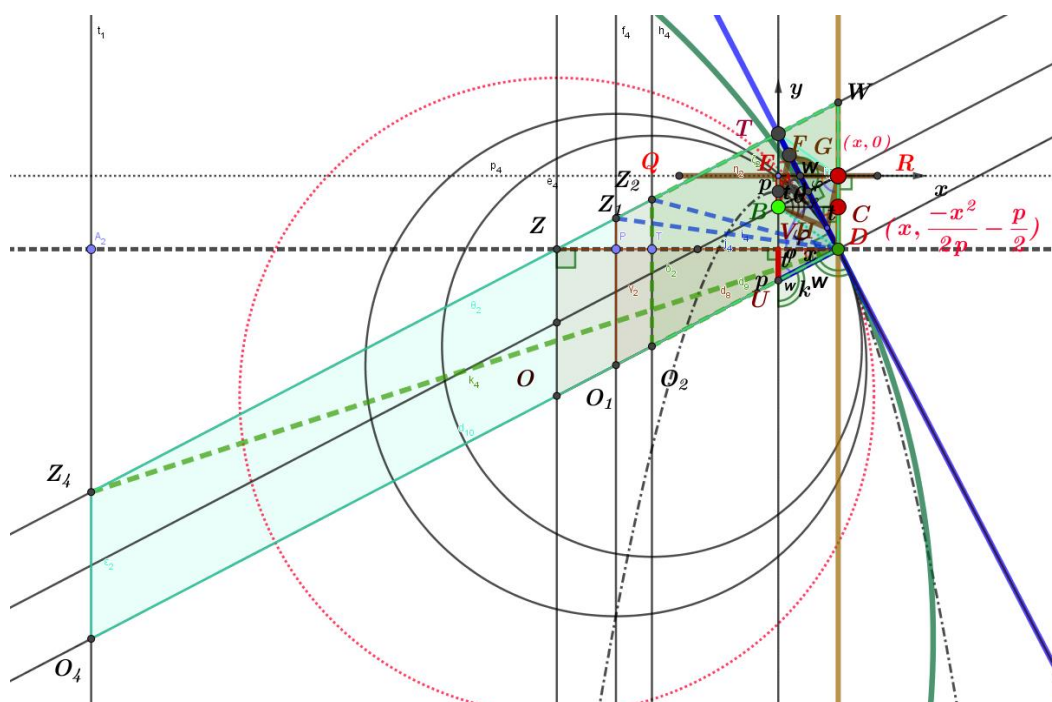
$$R = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2(y)}{dx^2}\right|} = \frac{\left(1+\left(\frac{-x}{p}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{1}{p}} = p \cdot \left(1+\left(\frac{-x}{p}\right)^2\right) \cdot \sqrt{\left(1+\left(\frac{-x}{p}\right)^2\right)} = p \cdot \left(1+\left(\frac{x}{p}\right)^2\right).$$

$$\frac{1}{p}\sqrt{p^2+x^2} = \left(1+\left(\frac{x}{p}\right)^2\right) \cdot \sqrt{p^2+x^2} \text{ (εικόνα 90).}$$

Η ακτίνα του κύκλου προσέγγισης $R = \left(1+\left(\frac{x}{p}\right)^2\right) \cdot \sqrt{p^2+x^2} = (1+(\varepsilon\varphi\varphi)^2) \cdot k \Rightarrow R = (1+(\pm\varepsilon\varphi\omega)^2) \cdot k = (1+\lambda^2)k \Rightarrow R = (1+\lambda^2) \cdot k$ όπου λ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας σε σχέση με την ράβδο κύλισης και στο αντίστοιχο σημείο της παραβολής, k το μήκος της «κανονικής» δηλαδή του καθέτου (στην εφαπτομένη) τμήματος UD .

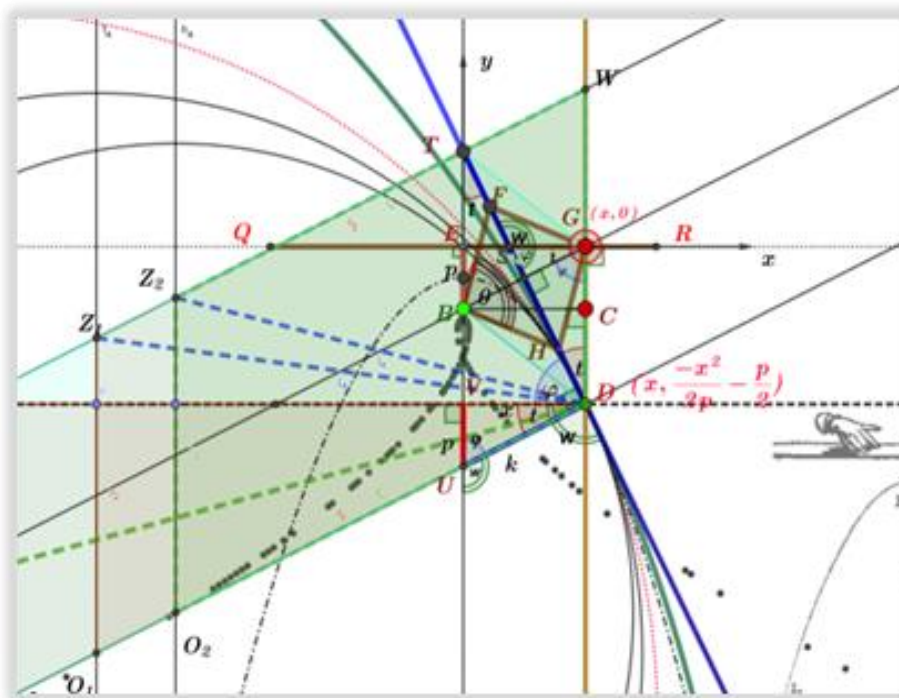


Εικόνα 93: Μονογραμμική απεικόνισή μηχανισμού van Schooten και χάραξη της «εξελιγμένης» καμπύλης ή «evolute curve» της παραβολής



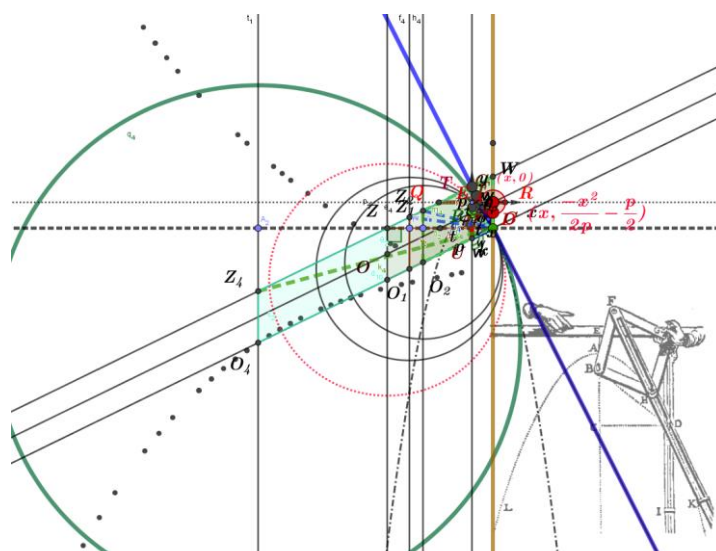
Εικόνα 94: Μονογραμμική απεικόνισή μηχανισμού van Schooten και εφαπτόμενοι κύκλοι με μεγαλύτερη ή μικρότερη ακτίνα από την ενδεδειγμένη

Στην περίπτωση των κύκλων (O_2, O_2D) ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων τους δεν είναι «εξελιγμένη» καμπύλη, της οποίας η κορυφή δεν απέχει από την Εστία όσο απέχει η κορυφή της παραβολής από την Εστία (εικόνα 95).



Εικόνα 95: Μονογραμμική απεικόνισή μηχανισμού van Schooten και διερεύνηση της «εξελιγμένης» καμπύλης όταν ο κύκλος προσέγγισης έχει μικρότερη ακτίνα από την ενδεδειγμένη

Ομοίως και στην περίπτωση των κύκλων (O_4, O_4D) ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων τους δεν είναι «εξελιγμένη» καμπύλη (εικόνα 96).

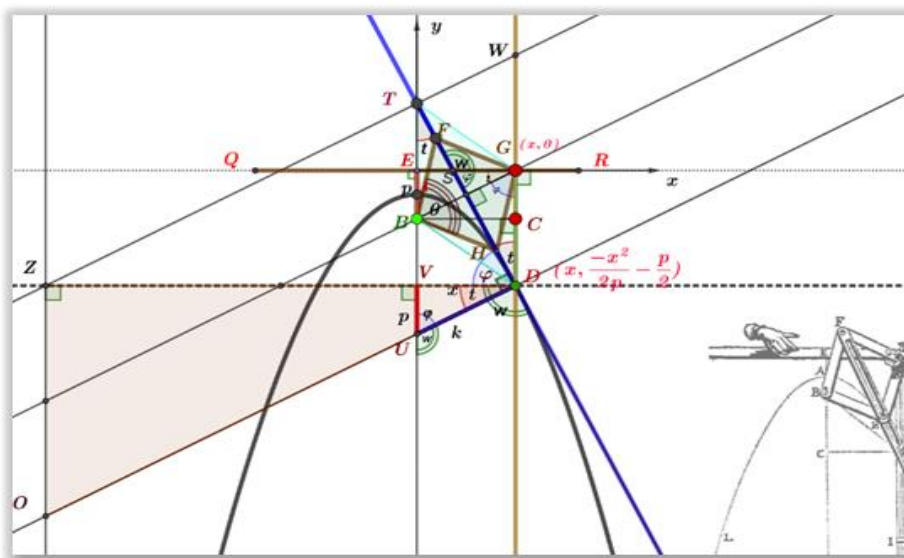


Εικόνα 96: Μονογραμμική απεικόνισή μηχανισμού van Schooten και διερεύνηση της «εξελιγμένης» καμπύλης όταν ο κύκλος προσέγγισης έχει μεγαλύτερη ακτίνα από την ενδεδειγμένη

Τελικά, χαράσσοντας από το T την παράλληλη της κανονικής UD , και προεκτείνοντας την VD , ορίζεται το σημείο Z (εικόνα 97). Η κάθετος της ευθείας VD στο Z τέμνει την προέκταση της κανονικής UD στο O . Έχει δειχθεί ήδη ότι η υποτείνουσα OD του ορθογωνίου τριγώνου

ZOD αποτελεί την ακτίνα του μέγιστου εφαπτόμενου κύκλου στο σημείο D της χαραχθέντος παραβολικού τόξου. Στο τρίγωνο TVD το $\eta\mu t = \frac{(VD)}{(TD)}$, και στο τρίγωνο ZTD το $\eta\mu t = \frac{(TD)}{(ZD)} = \frac{(TD)}{(ZV)+(VD)}$. Άρα, $\frac{(VD)}{(TD)} = \frac{(TD)}{(ZV)+(VD)} \Leftrightarrow (TD)^2 = (VD) \cdot [(ZV) + (VD)] \Leftrightarrow (ZV) + (VD) = \frac{(TD)^2}{(VD)}$ (1). Επίσης στο τρίγωνο ZDO το $\sigma\upsilon\nu t = \frac{(ZD)}{(OD)} = \frac{(ZV)+(VD)}{R}$, και στο τρίγωνο TVD το $\sigma\upsilon\nu t = \frac{(TV)}{(TD)}$. Άρα, $\frac{(TV)}{(TD)} = \frac{(ZV)+(VD)}{R} \Leftrightarrow R = \frac{(TD) \cdot [(ZV)+(VD)]}{(TV)}$ και λόγω της (1) προκύπτει ότι $R = \frac{(TD) \cdot \frac{(TD)^2}{(VD)}}{(TV)} = \frac{(TD)^3}{(VD) \cdot (TV)}$. Άρα η ακτίνα R υπολογίζεται ποσοτικά από το κλάσμα $\frac{(TD)^3}{(VD) \cdot (TV)}$, όπου το TD είναι το τμήμα της διαγωνίου ράβδου της μηχανής από την «έξοδο» D μέχρι το σημείο T όπου τέμνει τον άξονα συμμετρίας της («εφαπτομένη» κατά Leibnitz), $VD = GE$ και είναι η απόσταση του «κέρσορα» μέχρι το μέσο E της ράβδου ολίσθησης και TV είναι η προβολή του εφαπτόμενου τμήματος TD στον άξονα συμμετρίας TU («υποεφαπτομένη» κατά Leibnitz). Η καμπυλότητα κ στο τυχαίο σημείο D του χαρασσόμενου παραβολικού τόξου από τον παραβολογράφο van Schooten, υπολογίζεται μέσα από εμφανή στοιχεία του και δίνεται από την εξίσωση:

$$\kappa = \frac{(GE) \cdot (TV)}{(TD)^3}$$



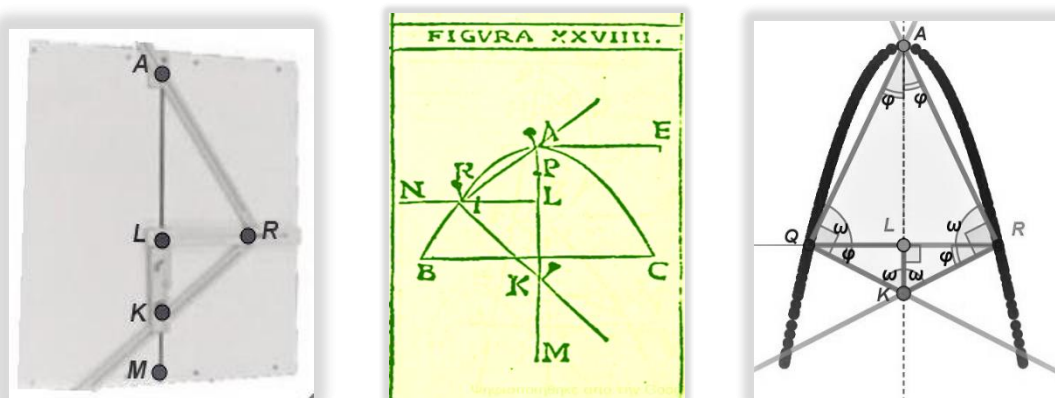
Εικόνα 97: Μονογραμμική απεικόνισή μηχανισμού van Schooten και γεωμετρική κατασκευή ακτίνας του κύκλου προσέγγισης σε τυχαίο σημείο D της χαραχθείσας παραβολής

4.2. Παραβολογράφος του Bonaventura Franciscus Cavalieri

4.2.α. Μηχανολογικό πλαίσιο αναφοράς του μηχανισμού

Ο παραβολογράφος του Cavalieri αποτελείται από δύο ορθογώνια και άκαμπτα μέλη KRA και RLK αρθρωμένα μεταξύ τους (εικόνα 94). Το μέλος RLK έχει αρθρωθεί πρισματικά (γραμμικά) σε σταθερή ράβδο ή αυλάκι AM (σώμα της μηχανής) για να ολισθαίνει. Το άλλο μέλος KRA έχει αρθρωθεί περιστροφικά και πρισματικά στο σταθερό σημείο A του αυλακιού. Το KRA έχει επίσης αρθρωθεί περιστροφικά και πρισματικά και στα σημεία R και K του ορθογώνιου μέλους RLK . Κατά την λειτουργία της μηχανής, και ολισθαίνοντας ο σταθερού μήκους οδηγός (cursor) LK , καθώς μεταβάλλεται το μήκος του AL μεταβάλλονται και τα τμήματα KR , LR , AR σε μήκος και θέση στο επίπεδο. Μεταβάλλονται επίσης σε θέση και μέτρο οι οξείες γωνίες στις αρθρώσεις K και R , και μόνο σε μέτρο η οξεία γωνία στο A , χωρίς όμως να χάνεται η ανά δύο συμπληρωματικότητα τους.

Στο σημείο R (έξοδος μηχανής) μπορεί να τοποθετηθεί γραφίδα κάθετα με το επίπεδο εργασίας έτσι ώστε να αποτυπώνονται οι διαδοχικές θέσεις του R κατά την συνεχή κίνηση της μηχανής και καθώς μετακινείται ο οδηγός LK . Με αξονική συμμετρία ως προς το αυλάκι AK θα μπορούσε η μηχανή να «επεκταθεί» κατασκευαστικά και να λειτουργεί με δύο γραφίδες στα σημεία Q και R και να σχεδιάζει μία συμμετρική καμπύλη ως προς το αυλάκι κύλισης AM (εικόνα 98).



Εικόνα 98: Ο παραβολογράφος Cavalieri από το Μουσείο στην Modena της Ιταλίας & «οπτικό διάγραμμα από το βιβλίο²² του Cavalieri το 1632» & «συμμετρική επέκταση της μηχανής»

Πρόκειται για έναν μηχανισμό όδευσης που μετατρέπει μια ευθύγραμμη κίνηση σε καμπυλόγραμμη. Η κινηματική αλυσίδα αυτού του μηχανισμού είναι απλή επειδή δεν

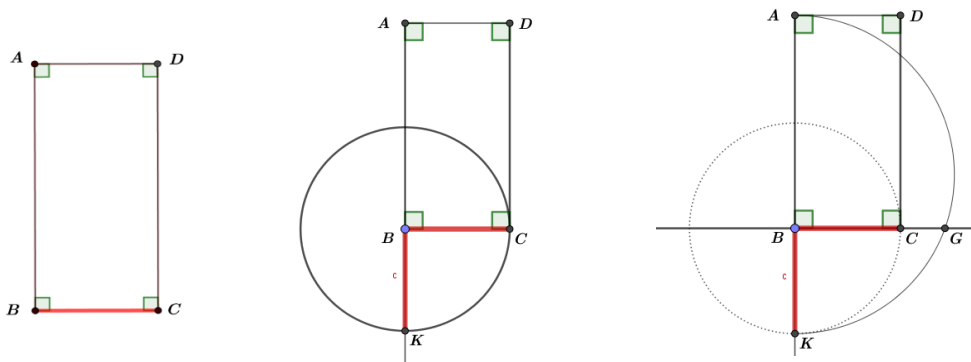
²² «Lo specchio ustorio, ovvero, Trattato delle settioni coniche, et alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora, 1632»

υπάρχουν κρίκοι της με πάνω από δύο αρθρώσεις και κλειστή διότι δεν υπάρχει κρίκος της με μία μόνο άρθρωση (Μαυρομάτης, 1985, σελ. 10).

4.2.β. Γεωμετρικό πλαίσιο αναφοράς του μηχανισμού

Η κατασκευή του μηχανισμού βασίζεται στην διαδικασία «τετραγωνισμού» επιπέδων και ευθύγραμμων σχημάτων. Ο τετραγωνισμός ενός κυρτού ν-γώνου (Πρόταση II.14 των Στοιχείων) αποδίδεται στον Ιππία τον Ηλείο (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001/α τόμος). Αυτός ο μετασχηματισμός επιπέδων χωρίων πραγματοποιείται έχοντας θεμελιωθεί ήδη το μέγεθος «εμβαδόν» (ή «περιεχόμενο» κατά τον Ευκλείδη) και κατά τον Εύδημο αποτελούν Πυθαγόρεια θεωρία. Στο βιβλίο II δεν γίνεται χρήση των γνωστών σχέσεων για τα εμβαδά κατά την απόδειξη των θεωρημάτων, χρησιμοποιείται ο «γνώμονας» και από την Πρόταση II.9 και μετά χρησιμοποιείται και το Πυθαγόρειο θεώρημα. Σύμφωνα με τον Δανό ιστορικό και γεωμέτρη του 19^{ου} αιώνα Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920), οι προτάσεις των βιβλίων II και IV του Ευκλείδη αποτελούν την θεμελίωση της Γεωμετρικής Άλγεβρας και αποτελούν Πυθαγόρεια θεωρία που θεμελιώνει τη σύγχρονη θεωρία «Μέτρου και Ολοκλήρωσης».

Ο τετραγωνισμός ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου κατασκευάζεται σύμφωνα με την Πρόταση II.14 των Στοιχείων του Ευκλείδη. Συγκεκριμένα, προεκτείνοντας την πλευρά AB κατά τμήμα BK ίσου μήκους με την πλευρά BC και χαράσσοντας κύκλο με διάμετρο AK , η προέκταση της BC τέμνει το ημικύκλιο στο G και το τμήμα BG αποτελεί την πλευρά του ισεμβαδικού τετραγώνου που εφαρμόζεται στο B και στην BC (εικόνα 99).

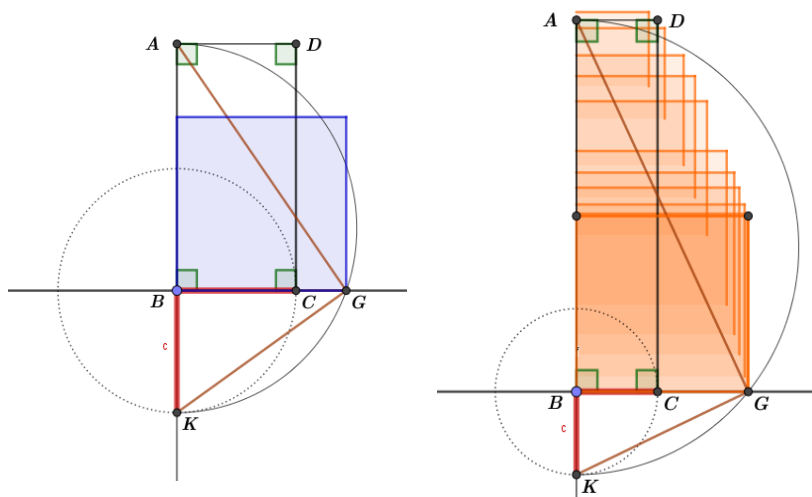


Εικόνα 99: Τετραγωνισμός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σύμφωνα με την Πρόταση II.14 των Στοιχείων (Geogebra)

Θα μπορούσαν τα προηγούμενα να αποδειχθούν και με την Πρόταση VI.8 των Στοιχείων του (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., 2001/τόμος α', σελ. 440-441) όπου περιγράφεται ότι «εάν σε ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας κάθετη προς την βάση, τότε τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται με μία πλευρά την κάθετη αυτή είναι όμοια μεταξύ τους και προς το αρχικό

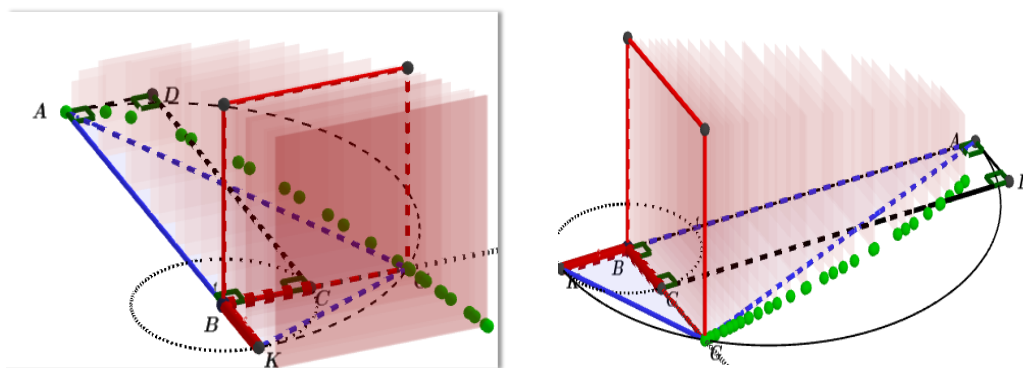
τρίγωνο». Τελικά, προκύπτει ότι το μέτρο του ύψους προς την υποτείνουσα είναι μέσο ανάλογο μέτρων των τμημάτων που δημιουργήθηκαν στην υποτείνουσα.

Το τετράγωνο τοποθετείται ομοεπίπεδα του ορθογωνίου σύμφωνα με την διαδικασία της εφαρμογής περιοχών (εικόνα 100). Εάν συνεχισθεί η διαδικασία τετραγωνισμού ορθογωνίων με σταθερή σε μήκος και διεύθυνση την πλευρά BC , και αλλάζοντας η AB ως προς το μήκος της, τότε τα παραγόμενα τετράγωνα θα αλληλεπικαλύπτονται.



Εικόνα 100: Τετραγωνισμοί ορθογωνίων μέσω του παραβολογράφου Cavalieri (Geogebra)

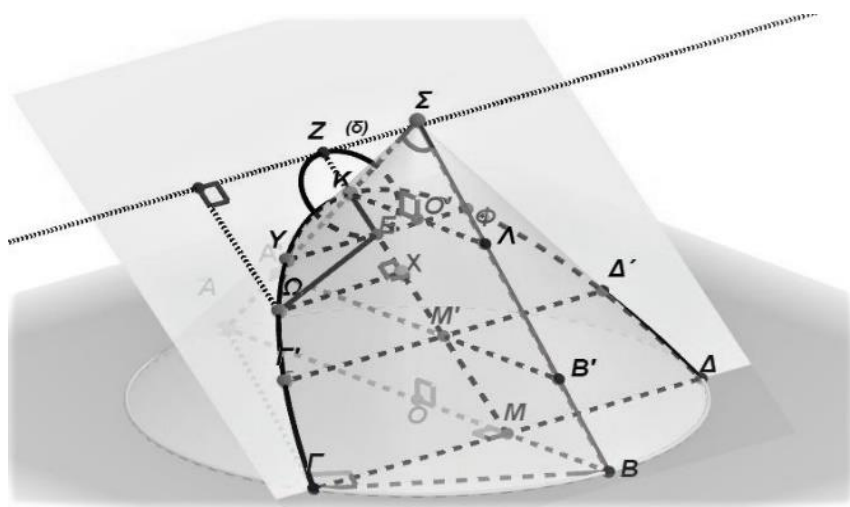
Μία διαφορετική «εφαρμογή» των εκάστοτε ισεμβαδικών τετραγώνων είναι η κάθετη με το επίπεδο τοποθέτησή τους και επί της BG . Αυτή η διαδικασία ορίζεται ως «υπέρθεση ισεμβαδικών τετραγώνων» (εικόνα 101).



Εικόνα 101: Ανόρθωση ισεμβαδικών τετραγώνων, κάθετα στο επίπεδο του μηχανισμού Cavalieri

Εάν σε κάθε περίπτωση «τετραγωνισμού» αυτών των ορθογωνίων, σημειώνεται στο επίπεδο η κορυφή G του αντίστοιχου ισεμβαδικού τετραγώνου και αρχίζει να ιχνηλατείται μία καμπύλη της οποίας τα σημεία, σύμφωνα με την πρόταση VI.8 των Στοιχείων, η απόστασή τους από την σταθερή ευθεία AK είναι μέση ανάλογος του σταθερού μήκους BK και της απόστασης της προβολής του εκάστοτε σημείου της καμπύλης από το σταθερό σημείο A ,

δηλαδή: $(GB)^2 = (BK) \cdot (BA) \Leftrightarrow \frac{(GB)^2}{(BA)} = (BK) = ct$. Αυτή τη σχέση, μπορούμε να την ξαναβρούμε στις κωνικές τομές και πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση της Παραβολής. Σύμφωνα με τον ορισμό του Απολλώνιου έχει ήδη αποδειχθεί πως εάν τυχαίος κώνος κορυφής Σ και διαμέτρου βάσης AB τμηθεί με επίπεδο κάθετο στο επίπεδο του αξονικού τριγώνου ΣAB και παράλληλα στην γενέτειρα ΣB , προκύπτει καμπύλη που ανήκει στην παράπλευρη επιφάνεια του κώνου αλλά και στο τέμνον επίπεδο (εικόνα 102). Όπως έχει αποδειχθεί κατά την περιγραφή του γεωμετρικού πλαισίου στον παραβολογράφο van Schooten (Πρόταση 2), σε τυχαίο σημείο Ω της παραβολής ισχύει η αλγεβρική σχέση: $\frac{\chi^2}{\psi} = (\Sigma K) \cdot \frac{(AB)^2}{(\Sigma B)^2} = 2p \Rightarrow \chi^2 = 2p\psi$, όπου K το σημείο τομής του τέμνοντος επιπέδου και της ΣA , όπου χ είναι η απόσταση του Ω από τον άξονα συμμετρίας της παραβολής και ψ η απόσταση της προβολής του Ω στον τον άξονα συμμετρίας από την κορυφή K της παραβολής. Αποδεικνύεται επίσης και το αντίστροφο αυτής της Πρότασης και συνεπώς τα σημεία G των «τετραγώνων της υπέρθεσης» αποτελούν σημεία παραβολικής καμπύλης όπου $(GB) = \chi$, $(BA) = \psi$ και $(BK) = 2p$.



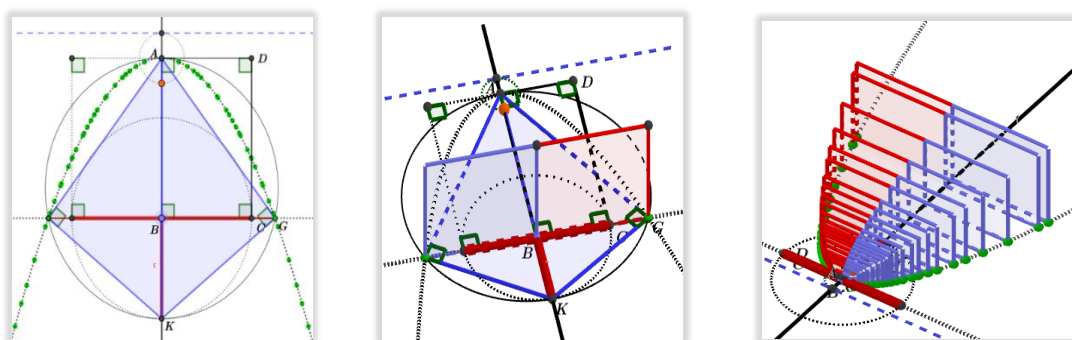
Εικόνα 102: Ορισμός παραβολής από τον Απολλώνιο και σύνδεση με τον παραβολογράφο Cavalieri

Εάν προστεθεί και το συμμετρικό τμήμα της μηχανής της καμπύλης και χαραχθεί και το συμμετρικό παραβολικό τόξο (εικόνα 103) και αποδεικνύεται²³ πως είναι «λείο» στο A . Έχει αποδειχθεί γεωμετρικά (**Παράρτημα [13]**) ότι «σε τυχαίο παραβολικό τόξο και για δύο τυχαία σημεία του, ο λόγος των τετραγώνων των πλαγίων αποστάσεών τους (παράλληλων προς την χορδή του τόξου) από την κορυφαία διάμετρο του τόξου (τεταγμένως κατηγμένες κατά τον Απολλώνιο -τεταγμένες σήμερα), είναι ίσος με τον λόγο των αντιστοίχων αποστάσεων που έχει η κορυφή του τόξου από τα ίχνη των τεταγμένων (αποτεμνόμενες κατά τον Απολλώνιο -

²³ Στην επόμενη παράγραφο για το αλγεβρικό πλαίσιο αναφοράς του παραβολογράφου Cavalieri

τετμημένες σήμερα)». Όμως κάθετες τεταγμένες στην διάμετρο του παραβολικού τόξου συναντάται μόνο στην περίπτωση που το τόξο έχει κορυφή την κορυφή της παραβολής και κορυφαίο άξονα τον άξονα συμμετρίας της παραβολής. Συνεπώς, το σταθερό και λείο σημείο A είναι η κορυφή της παραβολής και η ευθεία AK ο άξονας συμμετρίας της και τα G σημεία της παραβολικής καμπύλης. Μπορεί να τοποθετηθεί (εκ των υστέρων) η Εστία και η διευθετούσα της παραβολής.

Κάνοντας «υπέρθεση» των ισεμβαδικών τετραγώνων (και στο συμμετρικό σχήμα), εμφανίζεται σταδιακά ένα στερεό αντικείμενο το οποίο «σαρώνεται» από τα υπερτιθέμενα τετράγωνα της παραβολής (εικόνα 103).



Εικόνα 103: Ανόρθωση ισεμβαδικών τετραγώνων κάθετα στον συμμετρικό παραβολογράφο Cavalieri

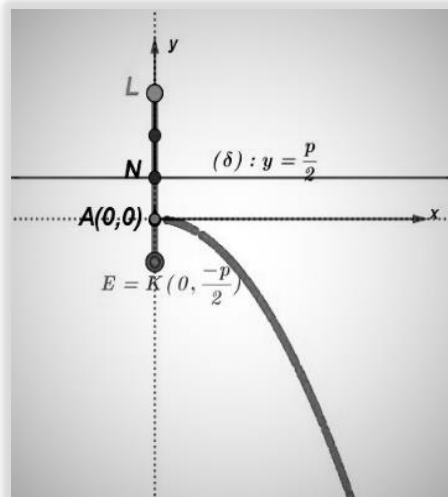
Τελικά, η εύρεση του επίπεδου γεωμετρικού τόπου των σημείων που «ισαπέχουν από σημείο και ευθεία» μπορεί να γίνει και μέσω της διαδικασίας «τετραγωνισμού ορθογωνίων με σταθερή την μία πλευρά του» και με υπέρθεση των ισεμβαδικών τετραγώνων.

4.2.γ. Αλγεβρικό πλαίσιο αναφοράς του μηχανισμού

Τοποθετώντας το κέντρο ορθοκανονικού συστήματος αξόνων στο σταθερό σημείο A του επίπεδου λειτουργίας της μηχανής, και με νοητό κατακόρυφο άξονα $y'y$ την ευθεία που περνά από το αυλάκι ολίσθησης (σώμα), θα γίνει προσπάθεια αλγεβρικής περιγραφής της λειτουργίας της (εικόνα 104). Ορίζοντας ως (x, y) τις συντεταγμένες του σημείου R και c το μήκος του τμήματος LK , η σχέση που προκύπτει από το γεωμετρικό πλαίσιο αναφοράς μετατρέπεται (για τον απλό παραβολογράφο) ως εξής:

$$\frac{(RL)^2}{(AL)} = (LK) \Rightarrow \frac{x^2}{-y} = c \Rightarrow x^2 = -cy \Rightarrow |x| = \sqrt{-cy} \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{-cy}.$$

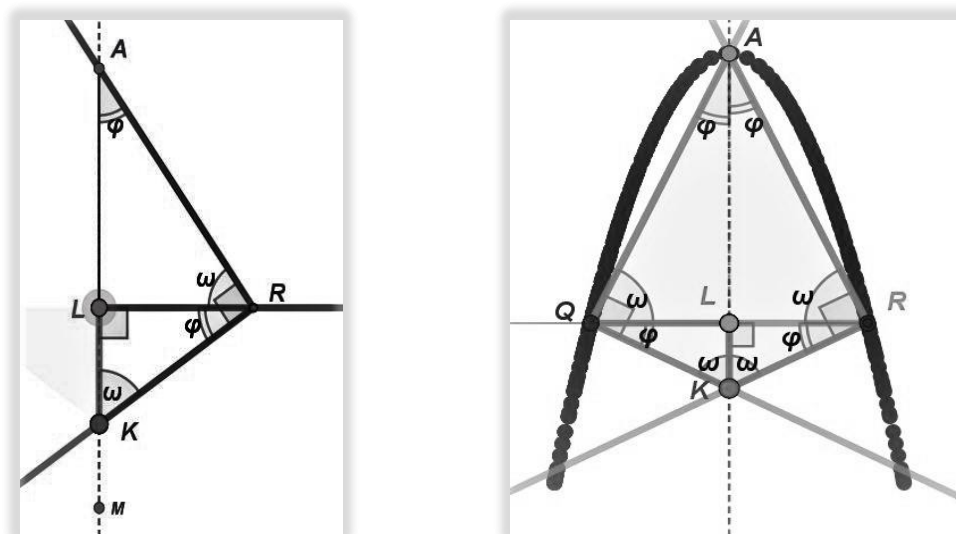
Το σημείο $R(x, y)$ της μηχανής για το συγκεκριμένο Καρτεσιανό σύστημα ισούται με $R(\sqrt{-cy}, y)$. Κατά την διάρκεια λειτουργίας της μηχανής πραγματοποιείται ο επίπεδος σημειακός γεωμετρικός μετασχηματισμός $L(0, y) \rightarrow R(\sqrt{-cy}, y)$, ο οποίος είναι και



Εικόνα 105: Εύρεση Εστίας και διευθετούσας της χαραχθείσας ημιπαραβολής μέσω του παραβολογράφου Cavalieri

4.2.δ. Μεταβλητές και Κινητικότητα (Mobility) του μηχανισμού

Κατά την λειτουργία της μηχανής μεταβάλλονται μήκη, γωνίες, θέσεις και προσανατολισμοί (εικόνα 106). Ορίζοντας ως ψ το μεταβαλλόμενο μήκος του κατακορύφου τμήματος AL , ως χ το μεταβαλλόμενο μήκος του οριζοντίου τμήματος RL , ως ϕ το μεταβαλλόμενο μέτρο της οξείας γωνίας στο σταθερό σημείο A και ως ω το μεταβαλλόμενο μέτρο της συμπληρωματικής γωνίας της ϕ θα γίνει προσπάθεια εύρεσης των βαθμών ελευθερίας του μηχανισμού. Από την σχέση $\frac{(RL)^2}{(AL)} = (LK)$ προκύπτει πως $\frac{\chi^2}{\psi} = c, c > 0$, όπου το c παραμένει σταθερό καθ' όλη την διάρκεια λειτουργίας της μηχανής. Επομένως $\chi^2 = c\psi \Leftrightarrow |\chi| = \sqrt{c\psi}$, όπου αναδεικνύεται η εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών χ και ψ καθώς και η δυνατότητα χάραξης συμμετρικής καμπύλης ως προς το αυλάκι ολίσθησης λόγω της απόλυτης τιμής. Στο τρίγωνο KLR προκύπτει: $\varepsilon\phi\omega = \frac{(LR)}{(LK)} = \pm \frac{\sqrt{c\psi}}{c}$ και για την συμπληρωματική γωνία ϕ ισχύει ότι $\varepsilon\phi\phi = \frac{1}{\varepsilon\phi\omega} = \pm \frac{c}{\sqrt{c\psi}}$. Εκτός της συμμετρίας που υπάρχει στην καμπύλη την οποία χαράσσει η «επέκταση» της μηχανής Cavalieri, αναδεικνύεται και η αντίθετη φορά μεταβολής των συμμετρικών οξειών γωνιών στις δύο περιοχές της μηχανής επειδή έχουν ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη εφαπτομένη (αντίθετες γωνίες). Οι μεταβλητές χ, ϕ , και ω εξαρτώνται μόνο από την μεταβλητή ψ η οποία δείχνει την απόσταση του L από το σταθερό σημείο A . Θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι και οι κλίσεις των πλευρών AR και KR εξαρτώνται και αυτές από την μεταβλητή χ . Επομένως η μηχανή αυτή έχει ένα βαθμό ελευθερίας και στην απλή μορφή αλλά και στην «επέκτασή» της (εικόνα 106).



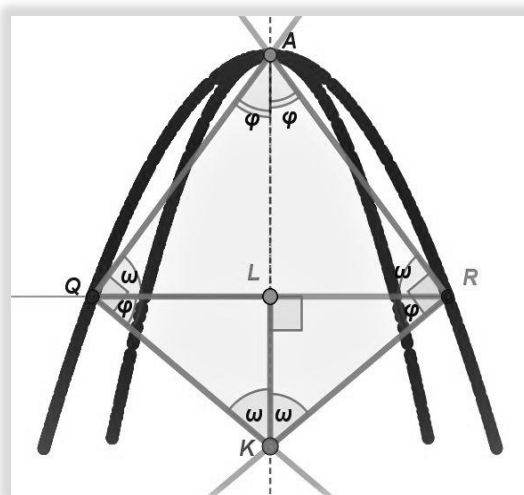
Εικόνα 106: Μεταβλητές παραβολογράφου Cavalieri

Λόγω της σχέσης $\varepsilon\phi\phi = \frac{1}{\varepsilon\phi\omega} = \pm \frac{c}{\sqrt{c\psi}}$, καθώς μετακινείται ο κέρσορας προς το σταθερό σημείο A και η απόσταση ψ μειώνεται, μειώνεται και η γωνία ω μέχρι να μηδενισθεί κατά την στιγμή που το L ταυτιστεί γεωμετρικά με το σταθερό σημείο A . Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να γίνει την ίδια χρονική στιγμή η γωνία ϕ ορθή με αποτέλεσμα η ευθεία AR να γίνει κάθετη με τον άξονα συμμετρίας AK της παραβολής. Δηλαδή σε αυτήν την οριακή στιγμή της μηχανής η ευθεία AR (QAR στην «επέκταση» του μηχανισμού) είναι εφαπτομένη στο σημείο A του παραβολικού τόξου και το σημείο A είναι «λείο». Όταν μετακινηθεί ο κέρσορας τότε όλα τα μέλη του παραβολογράφου εκτελούν μία πειθαρχημένη και συνεχή κίνηση και είναι φανερό ότι έχει έναν βαθμό ελευθερίας.

Η κινητικότητα επίπεδων μηχανών και μηχανισμών υπολογίζεται και με την εξίσωση *Kutzbach-Chebyshev* $W = 3(n - 1) - 2f_1 - f_2$, όπου W το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του επίπεδου μηχανισμού, n το πλήθος των μελών της μηχανής μαζί με την ράβδο ολίσθησης του κέρσορα G (σώμα), f_1 το πλήθος των αρθρώσεων με ένα βαθμό ελευθερίας και f_2 το πλήθος των αρθρώσεων με δύο βαθμούς ελευθερίας. Συγκεκριμένα $W = 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 1$, δηλαδή έχει ένα βαθμό ελευθερίας, διότι αποτελείται από 3 μέλη (ARK , RLK , και ο κρίκος αναφοράς ή σώμα AM), έχει μία άρθρωση με ένα βαθμό ελευθερίας η οποία είναι η πρισματική (prismatic joint) για ευθύγραμμη κίνηση του κινηματικού μέλους KL και τρεις αρθρώσεις δύο βαθμών ελευθερίας οι οποίες είναι ταυτοχρόνως περιστροφικές (revolute joints) και πρισματικές (prismatic joints) και βρίσκονται στα σημεία A, R, K . Δεν υπάρχει σύνδεση ανωτέρου βαθμού που να συνεργάζεται με κάποια καμπύλη επιφάνεια.

4.2.ε. Παράμετροι του μηχανισμού

Πριν τεθεί σε λειτουργία η μηχανή, υπάρχει η δυνατότητα να αλλάξει το μήκος του κινηματικού μέλους LK , με αποτέλεσμα να έχουμε αλλαγή της «ορθίας» c της παραβολής που χαράσσεται. Ορίζοντας ως ψ το μεταβαλλόμενο μήκος του κατακορύφου τμήματος AL , ως χ το μεταβαλλόμενο μήκος του οριζοντίου τμήματος RL , τότε από την σχέση $\frac{\chi^2}{\psi} = c, c > 0$, αυξάνοντας το μήκος c αυξάνει το κλάσμα $\frac{\chi^2}{\psi}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μικραίνει ο παρανομαστής ψ για το ίδιο χ , δηλαδή «ρηχαίνει» η καμπύλη (εικόνα 107). Επομένως το μήκος του τμήματος LK είναι μία παράμετρος για το αποτέλεσμα της καμπύλης που αποτυπώνεται στην έξοδο R (και Q) αυτού του μηχανισμού όδευσης. Θα μπορούσε να θεωρηθεί επίσης και το μήκος του «σώματος» AM (αυλάκι ολίσθησης) ως μία παράμετρος της μηχανής επειδή από αυτό το μήκος εξαρτάται και το μήκος του παραβολικού τόξου που χαράσσεται χωρίς να έχουμε κάποια γενική αποκαμπύλωση του χαρασσόμενου παραβολικού τόξου.

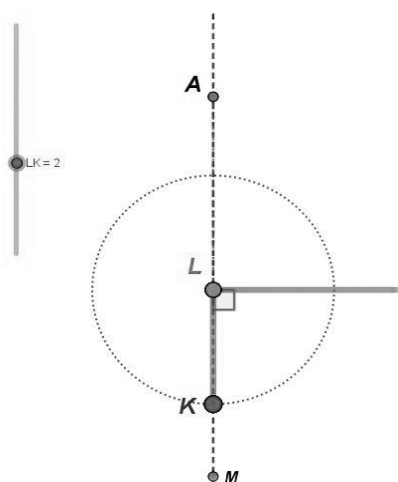


Εικόνα 107: Παράμετρος αποκαμπύλωσης στον παραβολογράφο Cavalieri

Στην περίπτωση που το μήκος του τμήματος LK θεωρηθεί ότι ισούται με μία μονάδα μήκους, τότε: $\frac{x^2}{\psi} = 1 \Rightarrow x^2 = \psi \Rightarrow x = \sqrt{\psi}$, δηλαδή η μηχανή έχει την δυνατότητα, μέσα στο πλαίσιο των διαστάσεών της, να δίνει την τετραγωνική ρίζα όποιου θετικού αριθμού αντιστοιχεί στο μήκος ψ του τμήματος AL και για την συγκεκριμένη μονάδα μήκους.

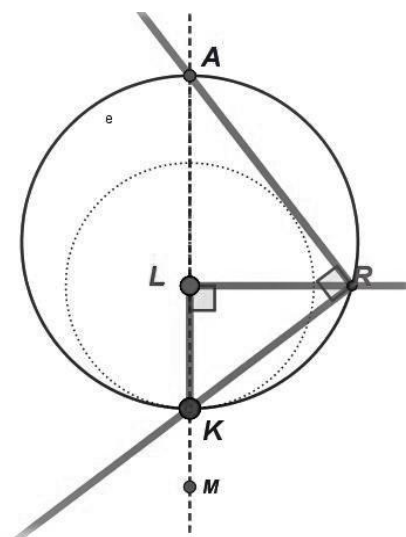
4.2.στ. Κατασκευή προσομοίωσης του μηχανισμού μέσω του λογισμικού Geogebra

Η αρχική προσομοίωση του συγκεκριμένου μηχανισμού όδευσης έγινε με λογισμικό Geogebra. Αφού χαράχθηκε και σταθεροποιήθηκε, στην επιφάνεια εργασίας του Geogebra, μία ευθεία γραμμή AM σταθεροποιώντας τα σημεία A και M , στη συνέχεια ορίστηκε και ένα τρίτο σημείο L δυνάμενο να μετακινηθεί πάνω στην AM . Στο σημείο L χαράχθηκε κάθετη ημιευθεία προς την AM η οποία μετακινώντας το L μπορούσε επίσης να κινηθεί παραλλήλως με την αρχική της θέση (εικόνα 108).



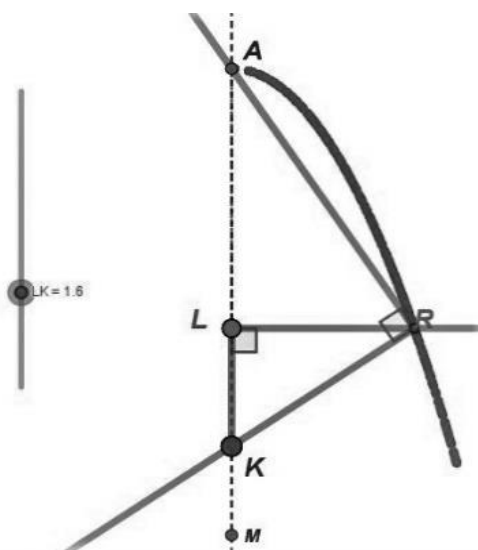
Εικόνα 108: Πρώτο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου Cavalieri μέσω του λογισμικού Geogebra

Για να κατασκευάσουμε το σταθερό μήκους τμήμα LK το οποίο ολισθαίνει πάνω στην ευθεία AM , ορίστηκε για το (LK) αριθμητική παράμετρος c , το οποίο λαμβάνει μόνο θετικές τιμές, και στη συνέχεια χαράχθηκε κύκλος (L, c) . Το κατώτερο σημείο τομής του κύκλου και της AM ορίστηκε ως K και ο κύκλος τέθηκε μη ορατός (εικόνα 109).



Εικόνα 109: Δεύτερο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου Cavalieri μέσω του λογισμικού Geogebra

Στη συνέχεια με διάμετρο το τμήμα KA σχεδιάστηκε κύκλος που τέμνει την προηγούμενη ημιευθεία στο R , και φέροντας τις ημιευθείες RA και RK εξασφαλίστηκε η μόνιμη καθετότητα τους στο R καθώς μετακινείται ο κέρσορας L (μαζί με το LK) και για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου c . Τέλος, κάνοντας μη ορατό και τον κύκλο διαμέτρου AK και ενεργοποιώντας την γραφίδα στο σημείο R (ίχνος ενεργό), η προσομοίωση του παραβολογράφου Cavalieri ολοκληρώθηκε (εικόνα 110).



Εικόνα 110: Τρίτο βήμα προσομοίωσης παραβολογράφου Cavalieri μέσω του λογισμικού Geogebra

4.2.ζ. Κατασκευή του παραβολογράφου Cavalieri

Η κατασκευή του μηχανισμού πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας υλικά από ξύλο και αλουμίνιο. Αρχικά πάνω σε ορθογώνια επίπεδη ξύλινη βάση διαστάσεων $70\text{ cm} \times 55\text{ cm}$, προστέθηκε ξύλινο καδρόνι 70 cm που φέρει στο μέσον του ευθύγραμμο αυλάκι ολίσθησης από αλουμίνιο, έχοντας τον ρόλο του σώματος AM . Το καδρόνι αυτό ενσωματώθηκε σε αντιστοίχου μήκους πλευρά της ξύλινης βάσης (εικόνα 111).



Εικόνα 111 : Ο «φυσικός» πλέον παραβολογράφος Cavalieri

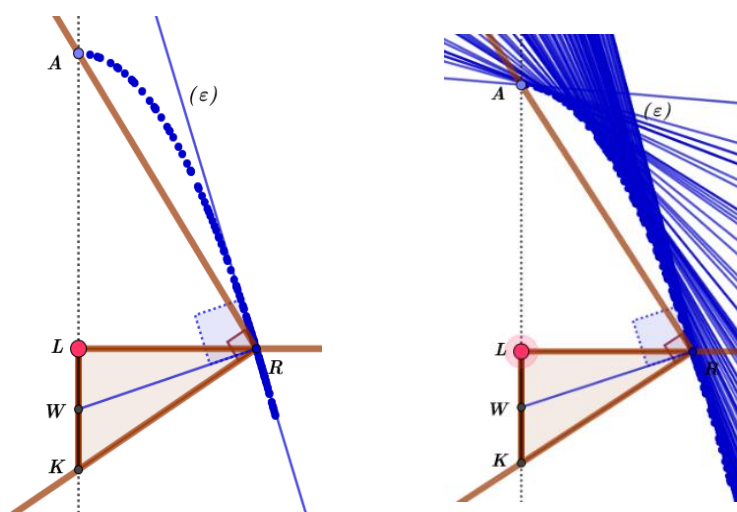
Είσοδος μηχανισμού KLR

Σε δεύτερο νοητό επίπεδο, παράλληλο με την βάση, τοποθετήθηκε το κινητήριο μέλος (είσοδος) KLR , έτσι ώστε το ξύλινο μέλος KL της ξύλινης ορθής γωνίας να μπορεί να ολισθαίνει ολόκληρο μέσα στο αυλάκι κύλισης AM με πρισματική άρθρωση. Επίσης κατά μήκος του άξονα της πλευράς KL ανοίχθηκαν οπές έτσι ώστε να μπορεί να μετακινηθεί το σημείο K πριν την έναρξη λειτουργίας της μηχανής, αλλάζοντας το μήκος της «ορθίας» (εικόνα 109). Χρησιμοποιήθηκε αντιστοίχου διαμέτρου ξύλινη κυλινδρική σφήνα, η οποία έχει και τον ρόλο περιστροφικής άρθρωσης για το K και το κινούμενο μέλος KRA . Κατά μήκος του ξύλινου τμήματος LR ανοίχτηκε διαμπερής ευθύγραμμη διαδρομή, που επενδύθηκε από λαμαρίνα αλουμινίου για να λειτουργεί κατά το δυνατόν η πρισματική άρθρωσή στο K . Για να κινείται το ορθογώνιο κινητήριο μέλος KLR παράλληλα με το επίπεδο της ξύλινης βάσης, είχε ήδη τοποθετηθεί στο περίγραμμα της ορθογώνιας βάσης, ξύλινο πλαίσιο για να πατάνε ισοϋψώς οι πλευρές της ορθής γωνίας KLR .

4.2.η. Επεκτάσεις του μηχανισμού

(α) Ήδη έχουν αναφερθεί μία πρώτη επέκταση που αφορά την δυνατότητα προσθήκης συμμετρικού μηχανισμού ως προς την ευθεία AK έτσι ώστε να χαράσσεται και το συμμετρικό παραβολικό τόξο που αντιστοιχεί στις διαστάσεις της μηχανής.

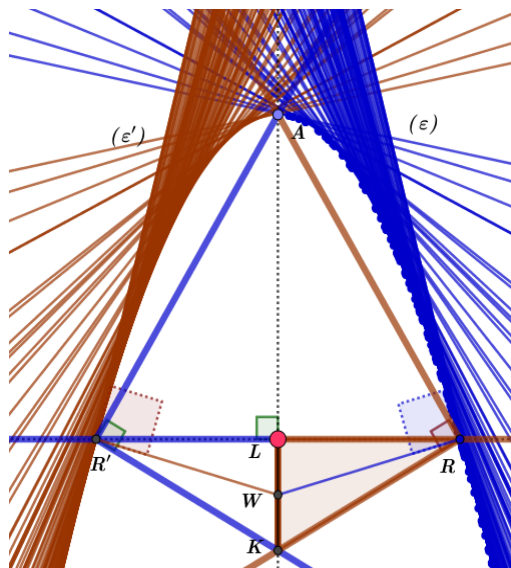
(β) Μία δεύτερη επέκταση θα ήταν η προσθήκη μίας ράβδου που θα «υλοποιεί» την εφαπτομένη της χαρασσόμενης καμπύλης, καθιστώντας την μηχανή αυτή και «εφαπτομενικογράφο». Έχει ορισθεί ή έννοια της «κανονικής» και της «υποκανονικής» ως προς κάποιον άξονα και σε σημείο της καμπύλης όπου χαράσσεται εφαπτόμενη ευθεία (Dennis & Confrey, 1995). Έχειδειχθεί ότι για κάθε σημείο ενός παραβολικού τόξου, η υποκανονική έχει μήκος ίσο με την ημιορθία της παραβολής, δηλαδή με το ήμισυ του τμήματος LK του μηχανισμού. Είναι επίσης γνωστό πως το ένα άκρο της υποκανονικής είναι η κάθετη προβολή του σημείου R του παραβολικού τόξου προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής, δηλαδή το άκρο L του τμήματος LK . Επομένως το άλλο άκρο της υποκανονικής οφείλει να είναι το μέσον W του LK , διότι το μήκος του LK είναι $2p$ και το μήκος της υποκανονικής είναι p (εικόνα 110). Συνδέοντας το W με το αντίστοιχο σημείο R προκύπτει η «κανονική» (κατά Leibnitz) του παραβολικού τόξου η οποία είναι κάθετη με την εφαπτόμενη ευθεία στο R , και μπορεί να κατασκευασθεί γεωμετρικά και να αρθρωθεί καταλλήλως στην μηχανή ή στην προσομοίωσή της (εικόνα 113). Εάν επεκταθεί ο μηχανισμός αρθρώνοντας τις δύο νέες ράβδους (ε) και WR , τότε το παραβολικό τόξο μπορεί να χαραχθεί μέσω της εφαπτομένης ευθείας της παραβολής στο τυχαίο σημείο R , δημιουργώντας μία «θήκη». Στη συνέχεια θα μπορούσε να διατυπωθεί και να λυθεί το αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα και για τον παραβολογράφο του Cavalieri όπως έγινε για τον παραβολογράφο van Schooten.



Εικόνα 113: Προσθήκη ράβδου-εφαπτόμενης στην παραβολή και λειτουργία ως εφαπτομενικογράφος

Επεκτείνοντας επιπλέον και με το συμμετρικό τμήμα της μηχανής ως προς τον άξονα AK , μέσα από την προηγούμενη ανάλυση, προκύπτει ολόκληρο το παραβολικό τόξο που μπορεί

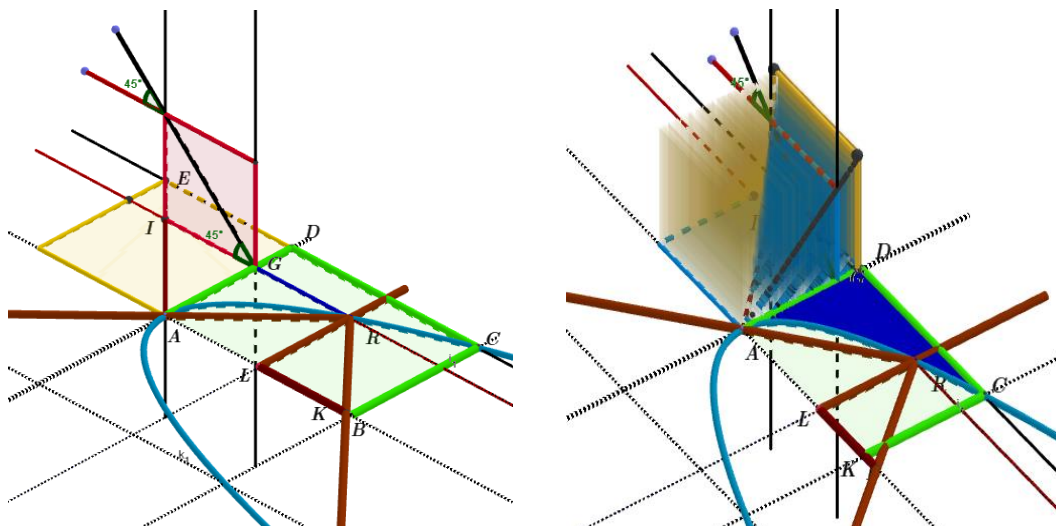
να χαράζει ο μηχανισμός του Cavalieri και μέσω των εφαπτόμενων ευθειών (ε) ή (ε') οι οποίες είναι αρθρωμένες στα συμμετρικά σημεία R και R' και κάθετα με τις αντίστοιχες υποκανονικές WR ή WR' (εικόνα 114).



Εικόνα 114: Προσθήκη δύο ράβδων-εφαπτόμενων στην παραβολή και λειτουργία ως συμμετρικός εφαπτομενικογράφος

(γ) Μία τρίτη επέκταση αφορά την εμβαδομέτρηση του καμπυλόγραμμου τριγώνου του βρίσκεται στο κυρτό μέρος της καμπύλης σύμφωνα με την θεωρία των «αδιαίρετων» του Cavalieri. Συγκεκριμένα, αρθρώνοντας καταλλήλως την ράβδο RGI στο R παράλληλα με το «σώμα» της μηχανής AB , και αρθρώνοντας καταλλήλως ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους $IG = AG$ (πάνω στην RGI και κάθετα στο επίπεδο της μηχανής), η κίνηση του κέρσορα L προκαλεί παράλληλη μεταβολή θέσης αλλά και διαστάσεων του τετραγώνου. Προκαλείται ταυτοχρόνως «σάρωση» από το GR της επιφάνειας του καμπυλόγραμμου τριγώνου ADC , όπου $ADCB$ το ορθογώνιο που πλαισιώνει το παραβολικό τόξο ARC (εικόνα 115).

Καθώς θα μετακινείται παράλληλως του «σώματος» η ευθύγραμμη ράβδος RGI θα μετακινείται μεταβάλλοντας τις διαστάσεις του και το τετράγωνο αυτό «σαρώνοντας» ταυτοχρόνως όλο το νοητό τετράεδρο που βρίσκεται πάνω από το τρίγωνο ADE και όπως απέδειξε ο Cavalieri (θεωρία «αδιαιρέτων»), αυτό έχει το $1/3$ του όγκου νοητού κύβου πλευράς AD και το καμπυλόγραμμο τρίγωνο ADC έχει το $1/3$ του εμβαδού του ορθογωνίου $ADCB$.



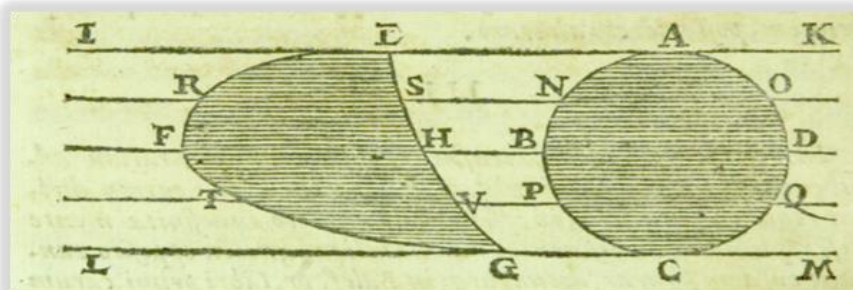
Εικόνα 115: Εμβαδομέτρηση παραβολικού χωρίου μέσω της θεωρίας των «αδιαίρετων» του Cavalieri μέσω επέκτασης του παραβολογράφου του

Το μεταβαλλόμενο και παραλλήλως μετακινούμενο υπέρθετο τετράγωνο πρέπει να φέρει από το σημείο G διαγώνια ράβδο GE που θα έχει μονίμως γωνία 45° με το επίπεδο του μηχανισμού και γωνία 45° με την ανώτερη πλευρά του τετραγώνου. Η μόνιμη τιμή αυτών των δύο γωνιών, καθώς και οι κατάλληλες πρισματικές αρθρώσεις, καθιστούν τετράγωνο το υπέρθετο ορθογώνιο που διαρκώς μεταβάλλεται σε θέση και διαστάσεις. Σε οποιαδήποτε θέση του κέρσορα LK , το μήκος του τμήματος RG όπως έχει αποδειχθεί, θα ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς GI .

4.2.θ. Τα Μαθηματικά του μηχανισμού Cavalieri

Η Θεωρία των «αδιαίρετων» του Cavalieri

Ο Cavalieri όρισε τα «αδιαίρετα» για τις γραμμές, τα επίπεδα και τα στερεά σχήματα αντιστοίχως ως άπειρο πλήθος σημείων, παραλλήλων τμημάτων και παραλλήλων τετραγώνων, τα οποία ισαπέχουν μεταξύ τους «γεμίζοντας»²⁴ τα γεωμετρικά αντικείμενα (Palmieri, 2009). Για τους Kepler, Galileo, Cavalieri, Roberval, Torricelli μία γραμμή αποτελείται από αδιαίρετα σημεία, ένα επίπεδο από αδιαίρετες γραμμές (εικόνα 116). Δεν υπήρχε αυστηρός ορισμός του «αδιαίρετου» αλλά αυτό δεν εμπόδιζε τους μαθηματικούς να εφαρμόσουν κατανοητές έννοιες για τον καθορισμό ορισμένων ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Οι μαθηματικοί του δέκατου έκτου και του δέκατου έβδομου αιώνα θεωρούνται συχνά ως ταξιδιώτες που ενέπνευσαν την ατμόσφαιρα της εξερεύνησης και της ανακάλυψης που επικράτησε στις φυσικές επιστήμες εκείνης της περιόδου. Τα μαθηματικά, για αυτούς, ήταν μια επιστήμη της ανακάλυψης μυστικών και κρυφών πολύτιμων λίθων της γνώσης (Alexander, 2012). Από σχετική έρευνα σε μαθητές-τριες παρατηρήθηκε ότι η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος είναι καλύτερα κατανοητή με την μέθοδο των «αδιαίρετων» του Cavalieri σε ποσοστό 78% παρά με την μέθοδο Riemann η οποία βασίζεται στην έννοια του εμβαδού των εγγεγραμμένων (ή περιγεγραμμένων) ορθογωνίων (Prabhu & Czarnocha, 2000).



Εικόνα 116: Τα «αδιαίρετα» από το βιβλίο του Cavalieri (1635) με τίτλο «Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota».

Για κάθε επίπεδο σχήμα F (figure), το σύνολο όλων των γραμμών (αδιαιρέτων) το συμβόλιζε²⁵ $O_F(I)$ (Cavalieri, 1635). Για τον ίδιο λόγο την μέτρηση όγκου σχημάτων, όπως ο κύλινδρος και ο κώνος, έγινε μέσω αδιαίρετων παράλληλων επιπέδων (και όχι θεωρώντας τα εκ περιστροφής στερεά σχήματα) γεμίζοντας τον χώρο από τεμνόμενα επίπεδα. Με την μεθόδó του για τρισδιάστατα σχήματα, υπολόγισε εκ νέου τον όγκο σφαίρας επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της μεθόδου του. Αναφέρει επίσης ότι η έννοια του «όλες οι γραμμές

²⁴ τα «αδιαίρετα» ήταν αποτέλεσμα δημιουργίας τομών από την παράλληλη μετατόπιση (με σταθερή ταχύτητα) ενός επιπέδου του οποίου η αρχική θέση ορίζεται ως «κανόνας» (regula) το οποίο αφήνει παράλληλα αποτυπώματα που ισαπέχουν μεταξύ τους, σε γραμμές, επίπεδα ή στερεά σχήματα.

²⁵ «Omnes Lineae»

$O_F(I)$ »²⁶ ή «όλα τα επίπεδα $O_s(P)$ »²⁷ αποτελεί επίσης ένα «**όργανο – instrument**» για την μέτρηση εμβαδού ή όγκου» (Andersen, 1985).

Στηριζόμενος στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, απέδειξε ότι τα «αδιαίρετα» είναι μέγεθος, και έχουν λόγους οι οποίοι και ισούνται με τους αντίστοιχους λόγους εμβαδών ή όγκων (**Α' θεμελιώδες θεώρημα Cavalieri, II.3**). Μετά από πολλή προσπάθεια, ξεπέρασε διακριτικά τη σκόπελο του «συνεχούς», θεωρώντας ότι ένα κινούμενο σημείο περιγράφει ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα κινούμενο ευθύγραμμο τμήμα περιγράφει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Andersen, 1985). Προσπάθησε στη συνέχεια να «μετρήσει» συγκρίνοντας τα σχήματα με ομοειδή τους γνωστού μέτρου. Εξίσωσε τους λόγους των μέτρων τους με λόγους των συνόλων των αντίστοιχων «αδιαιρέτων» τα οποία είναι διάστασης μικρότερης κατά μία μονάδα από την διάσταση του προς μέτρηση σχήματος. Διατύπωσε το **Β' θεμελιώδες θεώρημα (II.4)** της Γεωμετρίας του όπου εξισώνει τον λόγο των εμβαδών δύο επίπεδων σχημάτων με τους λόγους δύο τυχαιών ισοϋψών τμημάτων παραλλήλων προς τις ευθύγραμμες συγγραμμικές βάσεις τους (δηλαδή ως προς τον ίδιο «κανόνα» ή «regula» ή «rule») των σχημάτων που έχουν και κοινή κορυφή. Αρκεί αυτός ο λόγος των παραλλήλων τμημάτων να είναι ανεξάρτητος του ύψους τους. Με την μέθοδο του υπολόγισε λόγους μεταξύ συλλογών από γραμμές ή επίπεδα, κατασκευάζοντας με αυτόν τον τρόπο τα γεωμετρικά τους ισοδύναμα των σημερινών ολοκληρωμάτων πολωνύμων 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού.

Απέδειξε επίσης δύο θεωρήματα σχετικά με λόγους εμβαδών και όγκων ομοίων σχημάτων. Συγκεκριμένα, εάν θεωρηθεί η ανεξάρτητη μεταβλητή $t = \text{«χρόνος»}$ για όλα τα μονοδιάστατα αδιαίρετα επιπέδου σχήματος, τότε $O_F(I) = \{I(t) \text{ όπου } I(t) // AB \text{ \& } t \in [0, a]\}$ ως προς κανόνα AB . Μπορεί να υιοθετηθεί ο (τυπικά εσφαλμένος) συμβολισμός για όλες τις γραμμές $O_F(I)$, ως μία γεωμετρική αναπαράσταση του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^a I(t) dt$ ²⁸. Θεωρώντας στον ρόμβο $AFDC$ (εικόνα 117) την διαγώνιό του CF και το αδιαίρετο HE (παράλληλο προς τον «κανόνα» AF), αποδεικνύεται, λόγω των ισοσκελών όμοιων τριγώνων που παράγονται καθώς το E κινείται ομαλά πάνω στην FD , ότι το σύνολο των γραμμών του τριγώνου FCD ισούται με το σύνολο των γραμμών του CAF . Μέσω της θεμελίωσης των αδιαιρέτων ως μέγεθος, προκύπτει ότι ο λόγος όλων των γραμμών κάθε τριγώνου προς όλες τις γραμμές του ρόμβου ισούται με $1/2$, και σύμφωνα με το **Α' θεμελιώδες θεώρημα Cavalieri** προκύπτει ότι και ο λόγος των αντιστοίχων εμβαδών είναι $1/2$. Τελικά, το άθροισμα των ισαπεχουσών γραμμών του τριγώνου μήκους $FE(t) = HE(t)$

²⁶ F από «figure» και I από «lineae» αναφερόμενος σε επίπεδο σχήμα.

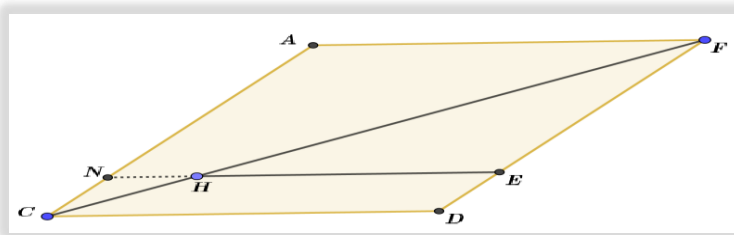
²⁷ S από «solid» και P από «plane» αναφερόμενος σε στερεό σχήμα.

²⁸ Χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\int$ ως την έννοια «Suma» ή «άθροισμα».

ισούνται με το μισό του αθροίσματος των (ίσων πλήθους) γραμμών μήκους $CD = a$, οι οποίες γεμίζουν τον ρόμβο. Αυτό το συμπέρασμα μπορεί να γραφεί ως εξής:

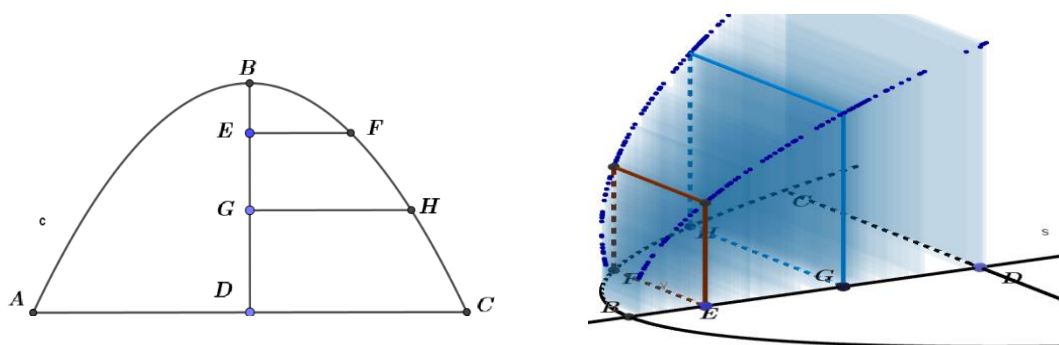
$$O_{FCD}(FE(t)) = \frac{1}{2} O_{AFCD}(CD = a) \Leftrightarrow \int_0^a FE(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^a CD(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^a a dt$$

Εάν ο ρόμβος είναι περίπτωση τετραγώνου, επειδή η ομαλή εξέλιξη της μεταβλητής χρόνος (t) αντιστοιχεί σε ομαλή επίπεδη εξέλιξη των αδιαίρετων $HE = FE$, μπορεί να θεωρηθεί πως $FE(t) = t$, και προκύπτει η ισότητα: $\int_0^a t dt = \frac{1}{2} \int_0^a a dt = \frac{1}{2} a^2$



Εικόνα 117: Ορισμένο ολοκλήρωμα πρωτοβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης μέσω των «αδιαίρετων» του Cavalieri

Το επόμενο πρόβλημα που απασχόλησε τον Cavalieri ήταν η εμβαδομέτρηση παραβολικού χωρίου (σύμφωνα με την δική του μέθοδο) θεωρώντας χορδή κάθετη στον άξονα συμμετρίας της αντίστοιχης παραβολής. Ήταν γνωστό από τον Μέναιχμο και τον Απολλώνιο ότι $\frac{(EF)^2}{(BE)} = \frac{(GH)^2}{(BG)} \Leftrightarrow \frac{(EF)^2}{(GH)^2} = \frac{(BE)}{(BG)}$, δηλαδή ο λόγος των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις αντίστοιχες «τεταγμένες» ισούται με τον λόγο των «τετμημένων» τους. Προέκυπτε και τότε, σύγκριση μεγεθών τα οποία έχουν διαφορετική διάσταση (εικόνα 118).



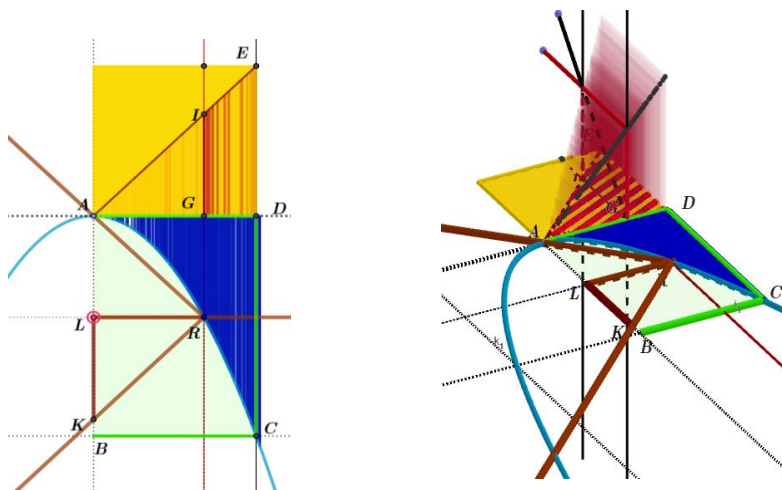
Εικόνα 118: Υπερτιθέμενα αδιαίρετα τετράγωνα σε παραβολικό χωρίο για το Β' θεμελιώδες θεώρημα (II.4) του Cavalieri

Σημαντική είναι η έννοια των «υπερτιθέμενων αδιαίρετων τετραγώνων» με τα οποία ο Cavalieri επέμεινε αυτά να κατασκευάζουν τα αδιαίρετα ευθύγραμμα τμήματα που γεμίζουν ένα επίπεδο σχήμα καθώς όλα τα τέμνουν καθέτως και ισαπέχουν μεταξύ τους. Μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει εάν ένα υπερτιθέμενο τετράγωνο που κινείται

ομαλά και παράλληλα της αρχικής του θέσης (κανόνας ή regula), μεταβάλλοντας την πλευρά του σύμφωνα με το περίγραμμα του σχήματος, σε ίσα χρονικά διαστήματα αφήνει ισαπέχοντα αποτυπώματα στο επίπεδο. Ταυτοχρόνως, αυτά τα ισαπέχοντα τετράγωνα «δομούν» ένα στερεό νοητό σχήμα που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο σχήμα. Το σύνολο αυτών των υπερτιθέμενων αδιαίρετων τετραγώνων συμβολίζεται $O_P(\square I)$, όπου $P =$ παραλληλόγραμμο ή $O_\Delta(\square I)$ όπου $\Delta =$ τρίγωνο.

Μετακινώντας στον παραβολογράφο Cavalieri, το τμήμα LK (από την αρχική του θέση όπου το L ταυτίζεται με το B) μέχρι το L να ταυτισθεί με το A (εικόνα 119) αποδεικνύεται ότι το ορθογώνιο $ABCD$ έχει τριπλάσιο εμβαδόν (περιεχόμενο) από το καμπυλόγραμμο τρίγωνο ADC . Για την εμβαδομέτρηση του καμπυλόγραμμου τριγώνου, χρειάστηκε να αποδειχθεί αρχικά, ότι για κάθε παραλληλόγραμμο P ο λόγος όλων των υπερτιθέμενων τετραγώνων του P και όλων των υπερτιθέμενων τετραγώνων του τριγώνου που ορίζει η διαγώνίός του, ως προς τον ίδιο κανόνα (regula), ισούται με τρία, δηλαδή $O_P(\square I): O_\Delta(\square I)=3$.

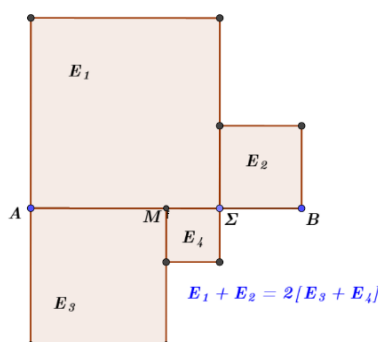
Για την απόδειξη στηρίχθηκε αρχικά στο **θεώρημα II.11** της «Γεωμετρίας» του, δηλαδή ότι ο λόγος «όλων των υπερτιθέμενων τετραγώνων» σε δύο παραλληλόγραμμο (ως προς τον ίδιο κανόνα) ισούται με τον λόγο εμβαδών των τετραγώνων στις βάσεις επί τον λόγο των αντιστοίχων υψών τους, δηλαδή $[O_{P1}(\square I): O_{P2}(\square I)]=[b_1:\square b_2]\cdot[h_1:h_2]$, όπου b_1, b_2 οι βάσεις των παραλληλογράμμων P_1 και P_2 που είναι παράλληλες με τον ίδιο κανόνα I (Andersen, 1985). Επίσης στηρίχθηκε με το **θεώρημα II.22** της «Γεωμετρίας» του, αποδεικνύοντας ότι για τα τυχαία παραλληλόγραμμο P_1 και P_2 ισχύει $[O_{P1}(\square I): O_{\Delta1}(\square I)]=[O_{P2}(\square I): O_{\Delta2}(\square I)]=ct$, όπου Δ_1 και Δ_2 τα αντίστοιχα τρίγωνα που ορίζουν οι διαγώνιοί τους (Andersen, 1985).



Εικόνα 119: Υπερτιθέμενα αδιαίρετα τετράγωνα για την εμβαδομέτρηση παραβολικού χωρίου στον παραβολογράφο Cavalieri

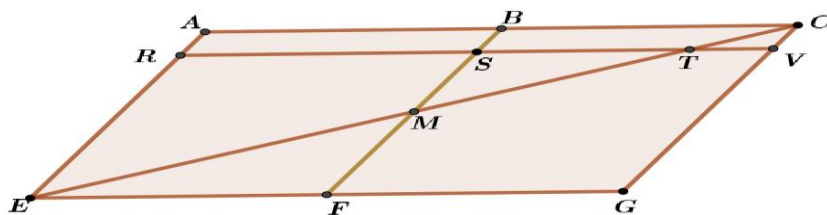
Σύμφωνα με την **Πρόταση II.9 των Στοιχείων του Ευκλείδη**, σε ευθύγραμμο τμήμα AB όπου M το μέσο του και Σ τυχαίο σημείο του (εικόνα 120) τότε τα εμβαδά των τετραγώνων

με πλευρές AS και SB έχουν άθροισμα διπλάσιο από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές το ήμισυ του AB και το MS .



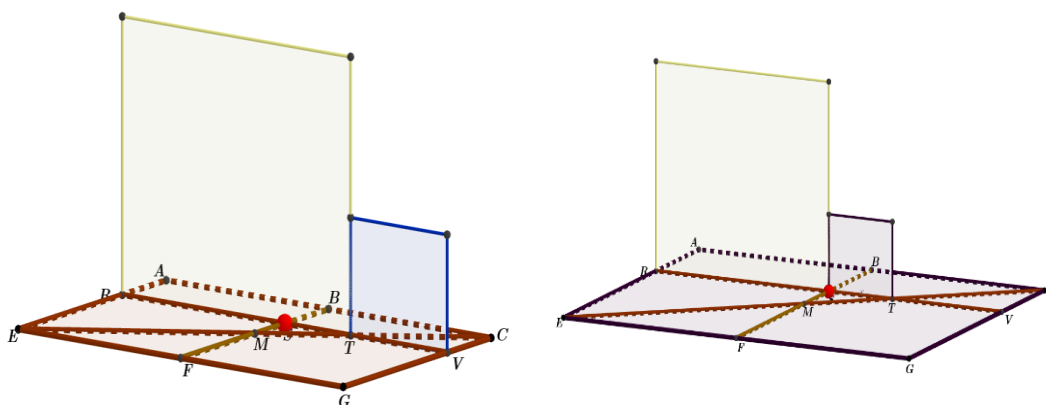
Εικόνα 120: Πρόταση II.9 των Στοιχείων του Ευκλείδη, σε ευθύγραμμο τμήμα AB όπου M το μέσο του και S τυχαίο σημείο του

Σε παραλληλόγραμμο $AEGC$, όπου B, F είναι τα μέσα των πλευρών AC, EG και λειτουργούν ως κανόνες (regula), M το κέντρο του παραλληλογράμμου και RV τυχαίο «αδιαίρετο» τμήμα (εικόνα 121), προκύπτει $\square RT + \square TV = 2(\square RS + \square ST)$.



Εικόνα 121: Εφαρμογή Πρότασης II.9 των Στοιχείων του Ευκλείδη, σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$

Τοποθετώντας τα προηγούμενα τετράγωνα καθέτως προς το επίπεδο του παραλληλογράμμου, προκύπτει μία «στιγμή» των αντιστοίχων «αδιαιρέτων» τετραγώνων (εικόνα 122).

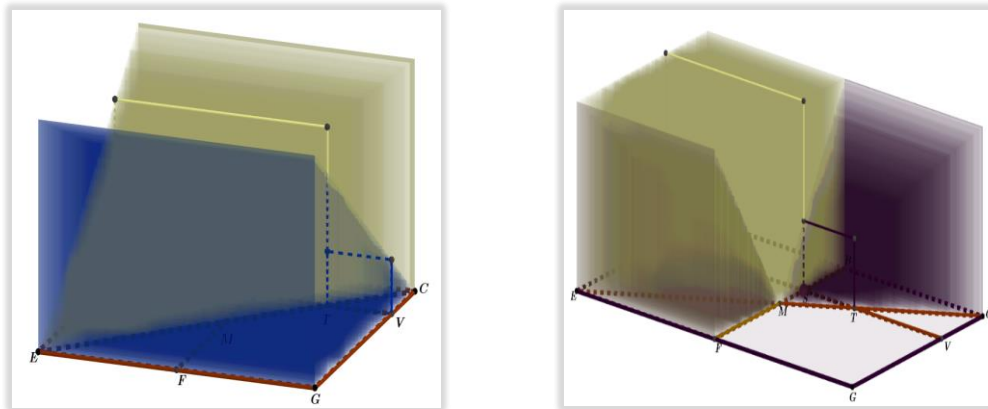


Εικόνα 122: Πρόταση II.9 των Στοιχείων του Ευκλείδη, σε ευθύγραμμο τμήμα AB όπου M το μέσο της διαγωνίου και S τυχαίο σημείο του BF

Σύμφωνα με την Πρόταση II.9 των Στοιχείων του Ευκλείδη, $\square RT + \square TV = 2(\square RS + \square ST) \Rightarrow O_{ACE}(\square I) + O_{CEG}(\square I) = 2[O_{ABFE}(\square I) + O_{BMC}(\square I) + O_{MEF}(\square I)]$. Για ευκολία στον

συμβολισμό του Cavalieri, ορίζονται τα εξής: (α) $O_{ACGE}(\square I) = \Pi$, (β) $O_{ABFE}(\square I) = \Pi_1$, (γ) $O_{ACE}(\square I) = O_{CEG}(\square I) = T$ και (δ) $O_{MEF}(\square I) = O_{BMC}(\square I) = T_1$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, $T + T = 2(\Pi_1 + 2T_1) \Rightarrow T = \Pi_1 + 2T_1$ (1). Τοποθετώντας όλα τα «αδιαίρετα» τετράγωνα, προκύπτουν τα αντίστοιχα στερεά σχήματα (εικόνα 123).



Εικόνα 123 : η υπέρθεση των αδιαίρετων τετραγώνων στο τμήμα RV του παραλληλογράμμου ACGE, καθώς το RV μετακινείται παράλληλως των πλευρών AC & EG (σχήματα μέσω του Geogebra).

Από την σχέση $T = \Pi_1 + 2T_1$ προκύπτει ότι: $\frac{T}{T_1} = \frac{\Pi_1}{T_1} + 2$ (2)

Έχοντας ο Cavalieri αποδειξεί στο **θεώρημα II.11** ότι $[O_{P1}(\square I) : O_{P2}(\square I)] = [\square b_1 : \square b_2] \cdot [h_1 : h_2]$ καθώς και στο **θεώρημα II.22** ότι $[O_{P1}(\square I) : O_{P2}(\square I)] = [O_{A1}(\square I) : O_{A2}(\square I)]$, όπου Δ_1 και Δ_2 τα αντίστοιχα τρίγωνα που ορίζουν οι διαγώνιοί των, στο συγκεκριμένο στερεό σχήμα προκύπτει:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{\square EG}{\square EF} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{(EG)^2}{(EF)^2} \cdot \frac{2h_1}{h_1} = \frac{4(EF)^2}{(EF)^2} \cdot 2 = 8 \Rightarrow \frac{T}{T_1} = 8. \quad (3)$$

Επίσης για τα παραλληλόγραμμα ACGE και ABFE προκύπτει:

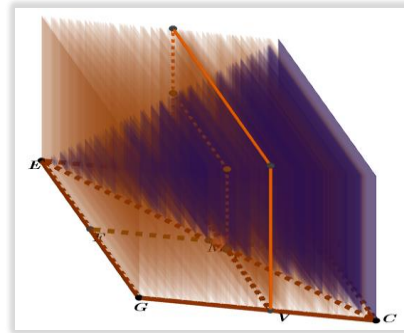
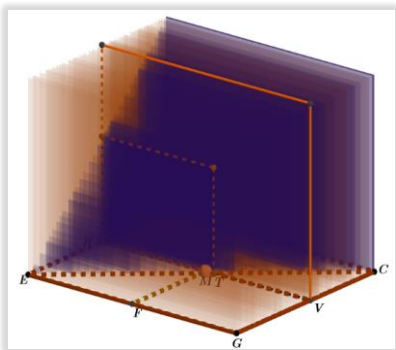
$$[O_{ACGE}(\square I) : O_{ABFE}(\square I)] = [\square AC : \square AB] \cdot [h : h] = \frac{(AC)^2}{(AB)^2} = \frac{(2AB)^2}{(AB)^2} = 4 \Rightarrow \frac{\Pi}{\Pi_1} = 4. \quad (4)$$

$$\xrightarrow{(2),(3) \& (4)} \frac{\Pi}{T} = \frac{\frac{\Pi}{T_1}}{\frac{T}{T_1}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Pi}{T_1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4 \cdot \Pi_1}{T_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi_1}{T_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{T}{T_1} - 2 \right) = \frac{1}{2} \cdot (8 - 2) = 3$$

$$\Rightarrow \Pi = 3T.$$

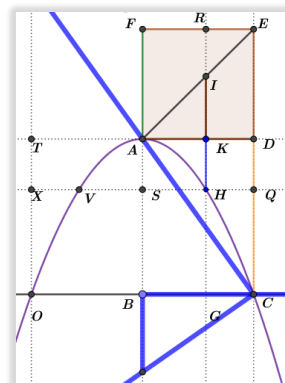
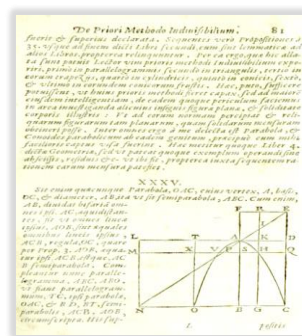
Σύμφωνα με την Γεωμετρία του Cavalieri, ο όγκος του στερεού σχήματος (παραλληλεπίπεδο) που δομούν τα αδιαίρετα τετράγωνα ενός παραλληλογράμμου, είναι τριπλάσιος του όγκου του στερεού σχήματος (τετράεδρο) που δομούν τα αδιαίρετα τετράγωνα του τριγώνου (που

ορίζει η διαγώνιος) ως προς τον ίδιο κανόνα (εικόνα 124). Αυτό το συμπέρασμα αποτελεί το **Θεώρημα II.24 της «Γεωμετρίας»** του (Cavalieri, 1635, σελ. 24).



Εικόνα 124 : το τετράεδρο μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα οποία δημιουργούνται από τα αντίστοιχα υπέρθετα αδιαίρετα τετράγωνα (σχήματα μέσω του Geogebra).

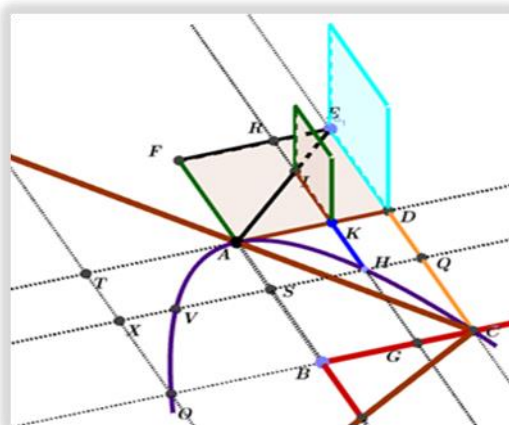
Με τον παραβολογράφο Cavalieri, χαράσσεται το τόξο OAC με κορυφή A και άξονα συμμετρίας AB της παραβολής. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $OTDC$ περιγράφει το τόξο (εικόνα 125). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρείται ότι η ορθία $2p$ ισούται με μία μονάδα. Θα εμβαδομετρηθεί το παραβολικό χωρίο BAC με την μέθοδο του *Cavalieri*. Τα συμμετρικά σημεία O και C έχουν απόσταση α από τον άξονα AB . Στην κορυφή A της παραβολής έχει ήδη χαραχθεί η εφαπτομένη TAD και στη συνέχεια τετράγωνο $ADEF$ πλευράς α . Η «τεταγμένη» HS τυχαίου σημείου H του παραβολικού τόξου ισούται με AK καθώς και με KI λόγω του τετραγώνου. Η «τετμημένη» SA ισούται με HK και ισχύει $(SA) = (HK) = \frac{1}{2p}(SH)^2 = \frac{1}{1}(SH)^2 = (SH)^2 = (KI)^2$ και τελικά $(HK) = (KI)^2$. Επομένως για κάθε σημείο H του παραβολικού τόξου, το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς KI που είναι τοποθετημένο κάθετα στο επίπεδο της παραβολής, είναι ίσο (αριθμητικά) με την τετμημένη $SA = HK$, προκύπτοντας αμφιμονοσήμαντος γεωμετρικός μετασχηματισμός μήκους και εμβαδού (εικόνα 125).



Εικόνα 125: από το βιβλίο του Cavalieri (1635) με τίτλο «*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*» και προσπάθεια εισαγωγής του παραβολογράφου Cavalieri μέσω του λογισμικού Geogebra.

Θεωρώντας τα «υπέρθετα» νοητά τετράγωνα πλευράς KI , ως «αδιαίρετα» (με κανόνα $EDQC$) πάνω στο τρίγωνο AED που ορίζει η διαγώνιος του τετραγώνου, καθώς κινείται «ομαλά» το KI (ίσο με «τεταγμένη» του τυχαίου σημείου H της παραβολής), κινείται επίσης ομαλά (τοποθετείται χωρικά με ίσες αποστάσεις) και το «υπέρθετο τετράγωνο» στο KI καθώς και το «υπέρθετο τετράγωνο» στο KR (εικόνα 126). Η «τεταγμένη» και πλευρά AK των τετραγώνων μπορεί να θεωρηθεί ως «χρόνος» επειδή εξελίσσεται ανεξάρτητα και ομαλά. Επίσης από τα ισοσκελή τρίγωνα AIK με πλευρές $AK = KI$ οφείλεται η ομαλή χωρική τοποθέτηση των αδιαίρετων τετραγώνων (σε σχέση με την μεταβολή της πλευράς τους) στο τρίγωνο AED .

Από την άλλη μεριά, η «τετμημένη» $= (AS) = (AK)^2$ («τεταγμένη»)² δεν εξελίσσεται «ομαλά» επειδή είναι ανάλογη με μία δύναμη δευτέρου βαθμού. Για αυτό τον λόγο δεν τοποθετήθηκαν από τον Cavalieri υπέρθετα αδιαίρετα τετράγωνα μέσα στο ημι-παραβολικό χωρίο BAC με «κανόνα» παράλληλο της τεταγμένης, επειδή τα υπέρθετα τετράγωνα πλευράς SH θα τοποθετούνταν χωρίς ίσες αποστάσεις μεταξύ των, λόγω της μη γραμμικής και ταυτόχρονης με την AK εξέλιξης της τετμημένης AS (Palmieri, 2008).



Εικόνα 126: Υπέρθεση αδιαίρετων τετραγώνων στο τετράγωνο και στο τρίγωνό του

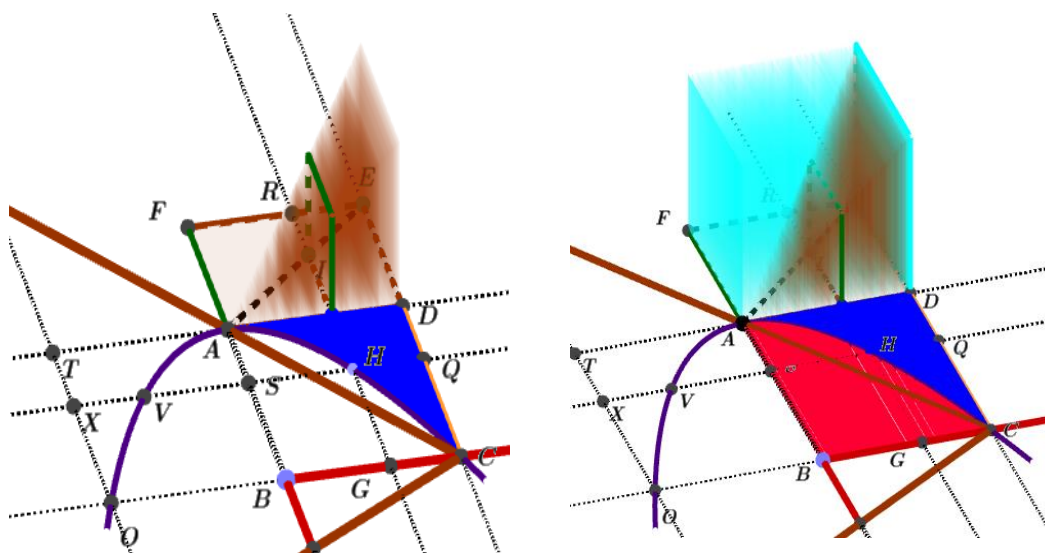
Τα δύο στερεά σχήματα που δομούνται από «όλα αυτά τα τετράγωνα» και κάθετα με το $ADEF$, σύμφωνα με το **θεώρημα II.24** του Cavalieri, έχουν λόγο $1/3$. Όμως τα τετράγωνα στο KI μετασχηματίζουν γεωμετρικά τις «τετμημένες» (abscissae) SA των σημείων H της παραβολής, οι οποίες μέσα στο καμπυλόγραμμο τρίγωνο ADC εξελίσσονται ομαλά και ταυτόχρονα με τα υπέρθετα αδιαίρετα τετράγωνα στο τρίγωνο AED , και αναπαριστούν τα «γραμμικά αδιαίρετα» του χωρίου ADC .

Για τον ίδιο ακριβώς λόγο τα αδιαίρετα υπέρθετα τετράγωνα στο $ADEF$ (με τον ίδιο κανόνα ED) αναπαριστούν γεωμετρικά τα μονοδιάστατα αδιαίρετα τμήματα του παραλληλογράμμου $ADCB$. Σύμφωνα με **Θεώρημα II.22** του Cavalieri, ο λόγος των αδιαίρετων μεταξύ τετράγωνου $ADEF$ και τριγώνου AED θα ισούται με τον λόγο των αδιαίρετων μεταξύ

παραλληλόγραμμου $ADCB$ και καμπυλόγραμμου τριγώνου ADC , και με τη σειρά του θα ισούται με τον λόγο των εμβαδών των αντιστοίχων χωρίων (εικόνα 127).

Τελικά, $\frac{(ADC)}{(ADCB)} = \frac{(ADC)}{a \cdot a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow (ADC) = \frac{1}{3}(ADCB) = \frac{1}{3}a^2 \cdot a$, και προκύπτει πως το εμβαδόν του μισού παραβολικού χωρίου BAC ισούται με $\left(a^2 \cdot a - \frac{1}{3}a^2 \cdot a\right) = \left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{2}{3}a^3$, όπου το $2a$ το μήκος της χορδής του συγκεκριμένου παραβολικού τμήματος.

Τελικά, το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου OAC ισούται με $\frac{4a^3}{3}$ όπου a η απόσταση του σταθερού σημείου C από τον άξονα συμμετρίας της αντίστοιχης παραβολής καθώς και μηχανολογικό «σώμα» του παραβολογράφου Cavalieri.



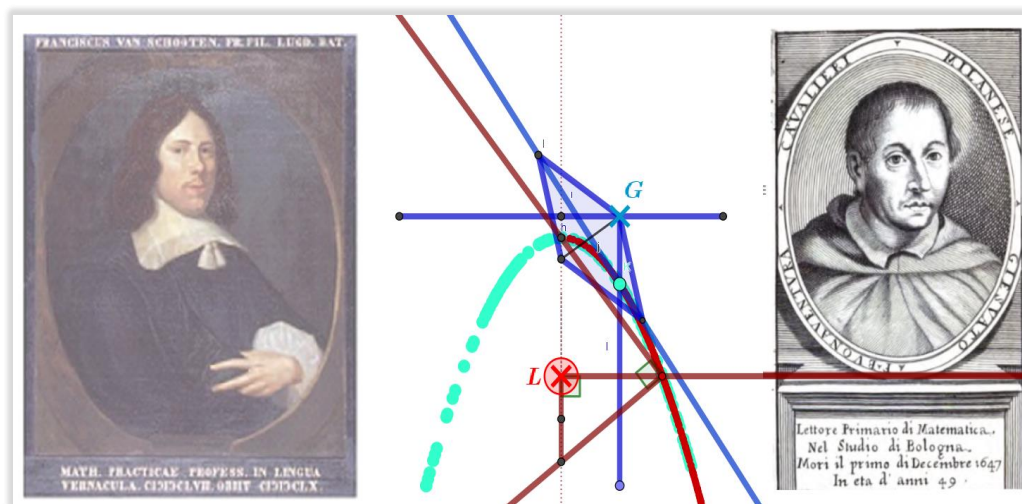
Εικόνα 127 : Από τους λόγους αδιαίρετων γραμμών χωρίων σε λόγους αδιαίρετων τετραγώνων τετραέδρων ή ορθογώνιων παραλληλεπιδόων» (σχήματα μέσω του Geogebra).

Μέσω της έννοιας των αδιαίρετων, εδείχθη ότι $O_{ADC}(I) = 1/3[O_{ADCB}(I)]$, και χρησιμοποιώντας καταχρηστικά τον σημερινό συμβολισμό των ολοκληρωμάτων, υπονοώντας ότι αθροίζονται τα αδιαίρετα τετράγωνα των δύο χωρίων ως προς τον ίδιο κανόνα, προκύπτει $\int_0^a t^2 dt = \frac{1}{3} \int_0^a a^2 dt = \frac{a^3}{3}$, επιβεβαιώνοντας πάλι την εγκυρότητα της πρόδρομης θεωρίας των «υπέρθετων αδιαιρέτων» του **Bonaventura Franciscus Cavalieri**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

Μηχανολογική επιβεβαίωση ορισμών της παραβολής

Ακολουθεί η διαδικασία επιβεβαίωσης της ισοδυναμίας των ορισμών της παραβολής, στους οποίους στηρίζεται η λειτουργία αυτών των παραβολογράφων μέσω προσομοίωσης με το λογισμικό Geogebra. Συγκεκριμένα θεωρώντας δεδομένο κάποιον εκ των δύο μηχανισμών, γίνεται προσπάθεια κατάλληλης άρθρωσης ράβδων που δεν εμποδίζουν τον πρώτο μηχανισμό στην λειτουργία του και σταδιακά αναδύεται ο δεύτερος μηχανισμός ο οποίος και λειτουργεί «πειθαρχημένα» όταν λειτουργεί ο πρώτος. Επίσης οι δύο μηχανισμοί έχουν την ίδια «έξοδο» χαράσσοντας ακριβώς την ίδια καμπύλη (εικόνα 128).



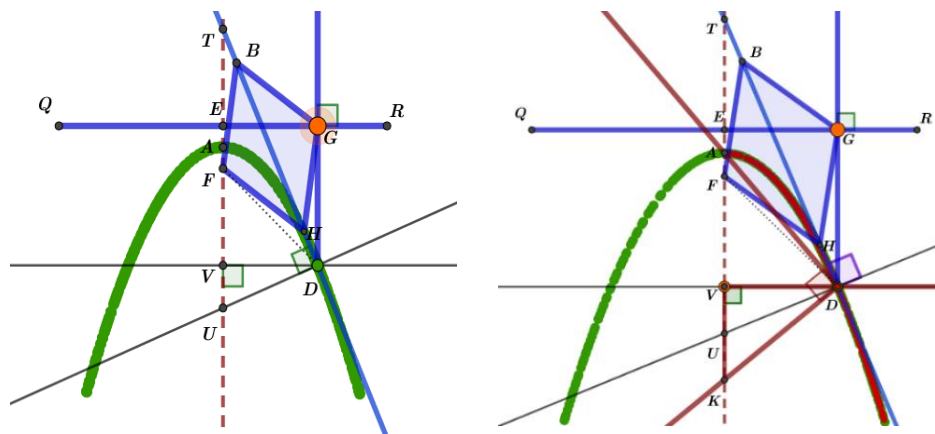
Εικόνα 128 : «Συνάντηση» Van Schooten και Cavalieri μέσα από τους παραβολογράφους τους (<https://www.geogebra.org/m/nnjcunyv>).

5.1. Από τον μηχανισμό van Schooten στον μηχανισμό Cavalieri

Ξεκινώντας από τον παραβολογράφο van Schooten, λόγω του Πυθαγορείου θεωρήματος καθώς και από τον ορισμό των «ίσων αποστάσεων» του Απολλώνιου, τον οποίο εμφανώς εμπεριέχει στην δομή του, προκύπτει (εικόνα 129):

$$\begin{aligned}
 (FV)^2 + (VD)^2 &= (DF)^2 = (DG)^2 \Leftrightarrow [(AV) - (AF)]^2 + (VD)^2 = (EV)^2 = [(AV) + (AE)]^2 \\
 &\Leftrightarrow (AV)^2 - 2(AV)(AF) + (AF)^2 + (VD)^2 = (AV)^2 + 2(AV)(AF) + (AF)^2 \\
 &\Leftrightarrow (VD)^2 = 4(AV)(AF) = (AV) \cdot 4(AF) = (AV) \cdot 2(EF) = (AV) \cdot 2(VU) \\
 &\Leftrightarrow (VD)^2 = (AV) \cdot 2(VU) \Leftrightarrow \frac{(VD)^2}{(AV)} = 2(VU),
 \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα αποτελεί, κατά τον Απολλώνιο, ισοδύναμο ορισμό της παραβολής (Σταμάτης, 1975).



Εικόνα 129: Σταδιακή άρθρωση παραβολογράφου Cavalieri πάνω στον παραβολογράφο van Schooten (<https://www.geogebra.org/m/vuabfkjr>)

Χαρακτηριστική ιδιότητα της εφαπτομένης ευθείας σε κάθε σημείο D της παραβολής είναι το να προκύπτει «υποκανονική» VU η οποία και ισούται με την «ημιορθία» της. Επομένως η «κανονική» DU ορίζει την «υποκανονική» VU η οποία ισούται με την «ημιορθία» p , δηλαδή με το τμήμα FE . Άρα: $(VD)^2 = (AV) \cdot 2p = (AV) \cdot \text{ορθία} = (TV) \cdot \text{ημιορθία}$, ή ισοδύναμα, το τετράγωνο πλευράς ίσης με την «κατηγμένως τεταγμένη» VD , είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο πλευρών ίσων με την «ημιορθία» EF και την «υποεφαπτομένη» $TV = 2AV$.

Είναι φανερός ο διαρκής τετραγωνισμός από τον παραβολογράφο van Schooten, του ορθογώνιου με τις συγκεκριμένες πλευρές και για οποιαδήποτε θέση του κέρσορα G . Αρθρώνονται πρισματικά επί της ράβδου EF και στο σημείο V του μηχανισμού van Schooten, μία ράβδος VK μήκους μίας «ορθίας». Στο K και στο A αρθρώνονται περιστροφικά και πρισματικά δύο ράβδοι οι οποίοι στη συνέχεια αρθρώνονται περιστροφικά στο D του μηχανισμού van Schooten το οποίο είναι η «έξοδος» του. Ο μηχανισμός van Schooten (μέσω της δομής του) προκαλεί μονίμως την σχέση $(VD)^2 = (AV) \cdot 2(VU)$ ή ισοδύναμα σε οποιαδήποτε θέση του κέρσορα G θα ισχύει $(VD)^2 = (AV) \cdot (VK)$.

Η συνδεσμολογία για τον μηχανισμό Cavalieri η οποία αναδύεται σταδιακά, δεν απαιτεί εκ των προτέρων την ορθογώνια άρθρωση στο D των ράβδων DA και DK διότι η καθετότητα προκύπτει μέσω της σχέσεως $(VD)^2 = (AV) \cdot (VK)$, η οποία και ορίζει ορθή γωνία στο D σύμφωνα με το 1^ο λήμμα του Πάππου το οποίο αναφέρεται στο το 7^ο Βιβλίο του Απολλώνιου (Σταμάτης, Ε. 1976, τόμος Δ, σελ. 157).

Επίσης στον μηχανισμό του van Schooten, η διαγώνιος ράβδος DT του ρόμβου, υλοποιεί την εφαπτόμενη στο D της χαρασσόμενης παραβολής και ισχύει η χαρακτηριστική ιδιότητα της «υποκανονικής» VU να ισούται με μία ημιορθία και για κάθε θέση του D . Άρα αναδύεται και για τον μηχανισμό Cavalieri ο τρόπος να προσαρτηθεί η εφαπτομένη ευθεία σε κάθε σημείο

πλευρές και για οποιαδήποτε θέση του κέρσορα V . Από την σχέση $(VD)^2 = 2(AV) \cdot 2(AF) = 4(AV)(AF)$ προσθέτοντας και στα δύο μέλη κατάλληλη ποσότητα, προκύπτει ότι:

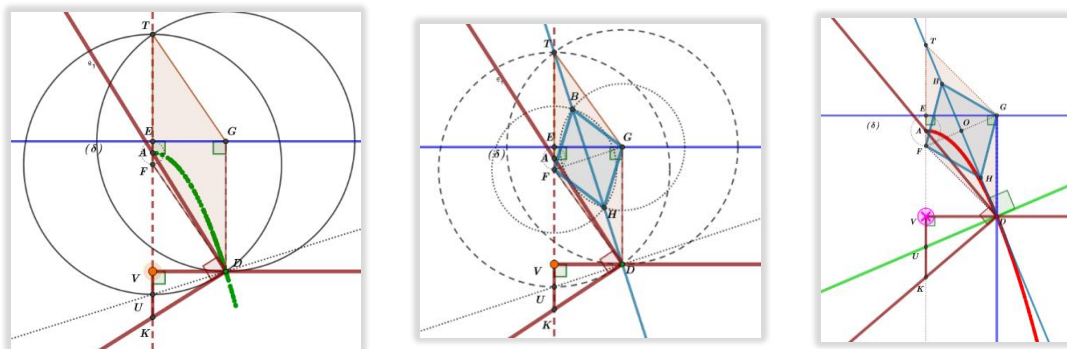
$$\begin{aligned} (AV)^2 + (AF)^2 - 2(AV)(AF) + (VD)^2 &= (AV)^2 + (AF)^2 - 2(AV)(AF) + 4(AV)(AF) \Leftrightarrow \\ [(AV) - (AF)]^2 + (VD)^2 &= (AV)^2 + (AF)^2 + 2(AV)(AF) = [(AV) + (AF)]^2 = \\ [(AV) + (AE)]^2 &= (VE)^2 \Leftrightarrow (FV)^2 + (VD)^2 = (VE)^2 = (d(V, (\delta)))^2. \end{aligned}$$

Εάν DG είναι το κάθετο τμήμα από το D προς την διευθετούσα της παραβολής που χαράσσει ο μηχανισμός Cavalieri, από το ορθογώνιο τρίγωνο FVD προκύπτει $(FV)^2 + (VD)^2 = (FD)^2$, και από τις δύο τελευταίες σχέσεις $(FD)^2 = (VE)^2 \Rightarrow (FD) = (VE) = (DG) \Rightarrow d(D, F) = d(D, (\delta))$. Άρα κάθε σημείο D της παραβολής που χαράσσει ο παραβολογράφος Cavalieri, έχει και την ιδιότητα των ίσων αποστάσεων από το σημείο F και την (δ) (εικόνα 131).

Από την χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκάθετου του τμήματος FG , στην οποία ανήκει και το D , αναδύεται σταδιακά ο μηχανισμός του van Schooten. Το σημείο G μετατοπίζεται πάνω στην (δ) και το D ανήκει στην μεσοκάθετο του αντιστοίχου τμήματος FG αλλά και στην κάθετη ευθεία της (δ) στο G (εικόνα 131).

Την ιδιότητα της μεσοκάθετου την έχουν μεταξύ τους οι διαγώνιοι οποιουδήποτε ρόμβου και ανεξαρτήτως εάν αλλάζουν οι γωνίες του. Για οποιαδήποτε θέση του σημείου D στον μηχανισμό Cavalieri υπάρχει ένας «αόρατος» ρόμβος που εδραιώνει την ιδιότητα του D να ανήκει στην μεσοκάθετο DT του FG . Επειδή όμως σε κάθε θέση του D οι πλευρές του «αόρατου» ρόμβου $FDGT$ μεταβάλλονται, εισάγοντας στον μηχανισμό Cavalieri έναν πραγματικό ρόμβο $FHGB$ με νοητή διαγώνιο το FG , ο οποίος έχει την άλλη διαγώνιο BH μεσοκάθετη στην FG και συγγραμμική της διαγωνίου DT του αόρατου ρόμβου $FDGT$. Με την ισότητα των τριγώνων FGD και FTG προκύπτει πως η τέταρτη κορυφή του «αόρατου» ρόμβου είναι το T και η διαγώνιος $DHBT$ είναι κοινή και των δύο ρόμβων (εικόνα 131).

Σύμφωνα με τον ορισμό της «κανονικής» από τον Leibnitz (Dennis & Confrey, 1995), η εφαπτομένη ευθεία στο D της παραβολής που χαράσσει ο μηχανισμός Cavalieri είναι η κάθετη της κανονικής DU στο D της παραβολής, όπου U είναι το μέσο του τμήματος VK . Η εφαπτομένη της χαρασσόμενης παραβολής αποτελεί επίσης και την διαγώνιο ευθεία DT και των δύο ρόμβων, και έχει ήδη αποδειχθεί από τον van Schooten μέσω «Οπτικής», πως αυτή η διαγώνιος είναι η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της παραβολής που χαράσσει ο «αναδυόμενος» μηχανισμός του.



Εικόνα 131 : Βήματα κατασκευής του παραβολογράφου «van Schooten» μέσω του παραβολογράφου Cavalieri

Μηχανολογικά, για να αναδυθεί ο μηχανισμός «Frans van Schooten» μέσα από τον μηχανισμό «Bonaventura Cavalieri» και να χαραχθεί η ίδια ακριβώς παραβολική καμπύλη, ακολουθούνται τα επόμενα βήματα: (α) αρθρώνεται ράβδος στο μέσο U της σταθερού μήκους ράβδου VK και στο σημείο D , πρισματικά στα σημεία αυτά καθώς και περιστροφικά, (β) επί της διευθετούσας τοποθετείται ράβδος ολίσθησης, (γ) αρθρώνεται περιστροφικά και πρισματικά στο D ράβδος DT μονίμως κάθετη με την UD , (δ) Αρθρώνεται ρόμβος περιστροφικά στην Εστία F και πρισματικά και περιστροφικά στο G επί της EG , (ε) η ράβδος DT αρθρώνεται πρισματικά με τις κορυφές B και H του ρόμβου, (στ) στα σημεία D και G αρθρώνεται πρισματικά μία ράβδος η οποία εκ των πραγμάτων είναι μονίμως κάθετη με την ράβδο που υλοποιεί την διευθετούσα.

Επομένως, από τον ορισμό της παραβολής μέσω του ισοδύναμου ορισμού του Απολλώνιου προκύπτει ο ισοαποστατικός ορισμός της. Επίσης, μέσω της διαδικασίας αυτής, ο παραβολογράφος Cavalieri αναδεικνύει την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο D του παραβολικού τόξου που χαράσσει, επεκτείνοντας τον μηχανισμό αυτό σε εφαπτομενικογράφο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

Μεθοδολογία & Μέθοδος συλλογής και ανάλυσης δεδομένων

6.1. Τα ερευνητικά εργαλεία

Βασικά ερευνητικά εργαλεία αποτελούν οι δύο ανακατασκευασμένες μαθηματικές που ήδη έχουν παρουσιασθεί συνοδευόμενες από οδηγίες χρήσης και φύλλα εργασίας τα οποία περιγράφονται στην παράγραφο 6.4. Ερευνητικό εργαλείο θεωρείται και η μέθοδος ανάλυσης των Bossé, Lynch-Davis & DeMarte (2021) όπου μέσω των απαντήσεων των μαθητών-τριών αναδεικνύονται δύο γνωστικές πτυχές και τρεις πτυχές κατανόησης μέσω δραστηριοτήτων και περιγράφονται στην παράγραφο 6.5. Επίσης, σημαντικό ερευνητικό εργαλείο αποτελεί το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας GeoGebra.

6.2. Το δείγμα

Το δείγμα αποτελείτο από μαθητές και μαθήτριες τμήματος της Β΄ Λυκείου με «θετικό προσανατολισμό». Συγκεκριμένα από εκ των εικοσιπέντε μαθητών και μαθητριών του Βθετ1 κατά το σχολικό έτος 2021-22, δήλωσαν ενδιαφέρον και συμμετείχαν έξι μαθητές και δώδεκα μαθήτριες. Οι δύο τετράωρες διδασκαλίες πραγματοποιήθηκαν κατά την διάρκεια του ωρολογίου προγράμματος και κατόπιν αδείας από τον σύλλογο διδασκόντων (εικόνα 132). Η συμμετοχή των μαθητών-τριών ήταν εθελοντική και με την έγκριση των κηδεμόνων τους (Παράρτημα [14]).



Εικόνα 132: Από την πειραματική διδασκαλία στο 9^ο ΓΕΛ Πάτρας 5 & 12 Απριλίου 2022 & <https://edugate.minedu.gov.gr/index.php/ste-a-m-projects/6132-9>

6.3. Σχολική πραγματικότητα σχετικά με το θέμα της έρευνας

Είχε ήδη διδαχθεί η προσέγγιση των κωνικών τομών μέσω της Αναλυτικής Γεωμετρίας που διδάσκεται ως μάθημα θετικού προσανατολισμού. Επίσης στο μάθημα της Ευκλείδειου Γεωμετρίας είχε ολοκληρωθεί η ενότητα των «μετρικών σχέσεων» και της «μέτρησης

επίπεδων σχημάτων». Στο μάθημα της Άλγεβρας είχαν διδαχθεί την έννοια της πραγματικής συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής. Θεωρήθηκε ότι το δείγμα ήταν πλέον σε ικανό επίπεδο να μελετήσει και να συνδυάσει τις διάφορες αναπαραστάσεις της παραβολής καθώς και των υπολοίπων κωνικών τομών. Στον Πίνακα 1 περιγράφεται η διδακτέα ύλη γενικής παιδείας και θετικού προσανατολισμού στην Β' λυκείου.

Πίνακας 1: Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών Β' Λυκείου 2021-22

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - Β' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Β' ΓΕ.Α. Τεύχος Β'» των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάκη Σ. και Σίδηρη Π. Κεφ. 7ο: Αναλογίες 7.1. Εισαγωγή, 7.4. Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα – Αναλογίες, 7.5. Μήκος ευθύγραμμου τμήματος, 7.6. Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο, 7.7. Θεώρημα του Θαλή Κεφ. 8ο: Ομοιότητα 8.1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα, 8.2. Κριτήρια ομοιότητας Κεφ. 9ο: Μετρικές σχέσεις 9.1. Ορθές προβολές, 9.2. Το Πυθαγόρειο θεώρημα, 9.3. Γεωμετρικές κατασκευές, 9.4. Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος Κεφ. 10ο: Εμβαδά 10.1. Πολυγωνικά χωρία, 10.2. Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα, 10.3. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων, 10.4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου, 10.5. Λόγος εμβαδόν όμοιων τριγώνων – πολυγώνων Κεφ. 11ο: Μέτρηση Κύκλου 11.1. Ορισμός κανονικού πολυγώνου, 11.2. Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων, 11.3. Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους, 11.4. Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα, 11.5. Μήκος τόξου, 11.6. Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα, 11.7. Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος.	ΑΛΓΕΒΡΑ - Β' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β' Γενικού Λυκείου» Κεφ. 1ο: Γραμμικά Συστήματα 1.1 Γραμμικά Συστήματα, 1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα Κεφ.2ο: Ιδιότητες Συναρτήσεων 2.1 Μονοτονία-Ακρότητα-Συμμετρίες Συνάρτησης, 2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης Κεφ. 3ο: Τριγωνομετρία 3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας, 3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες, 3.3 Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο, 3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, 3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις Κεφ. 4ο: Πολύωνμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις 4.1 Πολύωνμα, 4.2 Διαίρεση πολυωνύμων, 4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις, 4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές Κεφ. 5ο: Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση 5.1 Εκθετική συνάρτηση, 5.2 Λογάριθμοι, 5.3 Λογαριθμική συνάρτηση	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - Β' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ Από το βιβλίο «Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Β' Τάξης Γενικού Λυκείου» των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. Κεφ. 1ο: Διανύσματα 1.1. Η Έννοια του Διανύσματος 1.2. Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων, 1.3. Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα, 1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο, 1.5. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων Κεφ. 2ο: Η Ευθεία στο Επίπεδο 2.1. Εξίσωση Ευθείας, 2.2. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας, 2.3. Εμβαδόν Τριγώνου Κεφ. 3ο: Κωνικές Τομές 3.1 Ο Κύκλος (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου) 3.2 Η Παραβολή (χωρίς τις αποδείξεις του τύπου της εφαπτομένης και της ανακλαστικής ιδιότητας), 3.3 Η Έλλειψη (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης), 3.4 Η Υπερβολή (χωρίς την απόδειξη του τύπου των ασύμπτωτων), 3.5 Η Εξίσωση $Ax^2+By^2+Γx+Δy+E=0$ (χωρίς τη μεταφορά αξόνων)
--	--	--

6.4. Μεθοδολογία & Μέθοδος της έρευνας

Η έρευνα αυτή είναι μεικτή και εστιάζει στην κατανόηση της έννοιας της παραβολικής καμπύλης καθώς και της έννοιας της «συνάρτησης» με την διαμεσολάβηση των συγκεκριμένων παραβολογράφων. Επιστημολογικά άπτεται στον κοινωνικό κονστρουκτιονισμό με μεθοδολογία επαγωγικής ανάλυσης αλλά και παραγωγικής ανάλυσης

στα σημεία που υπάρχει προϋπάρχουσα κατηγοριοποίηση. Ειδικότερα αποτελεί περιγραφική έρευνα και μελετάται η περίπτωση τμήματος μαθητών-τριών της Β' Λυκείου και με θετικό προσανατολισμό (McKernan, 1996). Δεν προηγούνται παρόμοιες διδασκαλίες για να φανεί η σχετική εξέλιξη. Αποτελεί μία απλή «φωτογραφική» απεικόνιση επιμέρους πτυχών της κατανόησης των μαθητών-τριών. Οργανώθηκε μία διήμερη δράση στον χώρο του σχολείου και με σκοπό να ελεγχθεί η σύνδεση της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας καθώς και της έννοιας της συνάρτησης. Σημείο αναφοράς ήταν η παραβολική καμπύλη και τα σχετικά όργανα σχεδιάσής της (Dafermos, 2002). Αποτελεί μία μεικτή μέθοδο σχεδιασμένου πειράματος, όπου δεν εστιάζει απλά σε μία από τις πέντε μεταβλητές του παγώνοντα τις υπόλοιπες αλλά μελετάται συνολικότερα η διδασκαλία της έννοιας της παραβολής και της συνάρτησης στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Barab & Squire, 2004).

Έγινε προσπάθεια άνετης και παραγωγικής συζήτησης όπου οι μαθητές-τριες να είναι ενεργοί-ές, να αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους, να αισθάνονται άνετα και να συζητούν τα θέματα τα οποία αφορούν αυτήν την έρευνα (Morgan, 1998). Επίσης το μικρού μεγέθους δείγμα επέτρεψε την εύκολη συλλογή πολυτροπικών δεδομένων για πολλαπλή ανάλυση, τα οποία ήταν χρήσιμα για τις απαντήσεις επί των ερευνητικών ερωτημάτων που αφορούσαν:

- (α) το αμφίδρομο πέρασμα από το γεωμετρικό στο αλγεβρικό μητρώο καταγραφής,
- (β) την περιγραφή της δομής της μαθηματικής μηχανής και
- (γ) το πώς σχετίζονται τα εργαλεία και οι ενέργειές τους με τη μαθηματική γλώσσα και τα σύμβολα.

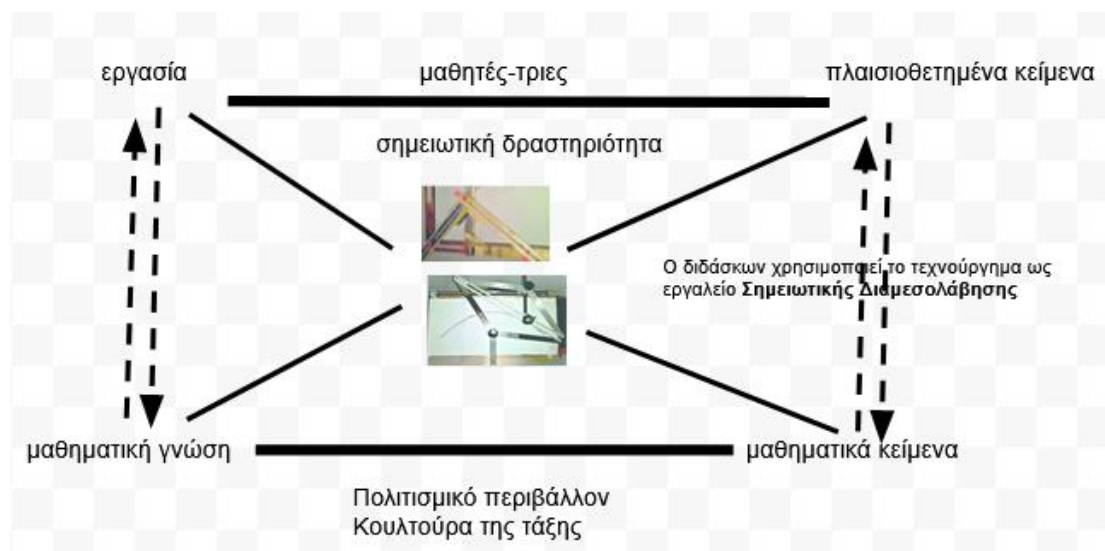
Η έρευνα αρχικά βασίστηκε στην ανάλυση και την κατασκευή δύο ιστορικών παραβολογράφων οι οποίοι συνεισφέρουν σημαντικά στην αντίληψη της μαθηματικής έννοιας που ενσωματώνουν (Slife & Williams, 1995). Στη συνέχεια έγινε προσπάθεια εισαγωγής αυτών των μαθηματικών μηχανών στην διδασκαλία της παραβολικής καμπύλης σε μαθητές-τριες Λυκείου. Χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας ανοιχτού τύπου με ιεραρχημένα ερωτήματα καθώς και προσομοιώσεις των μηχανισμών μέσω του λογισμικού Geogebra (**Παράρτημα [15]**). Θα μπορούσε να θεωρηθεί και ως συμμετοχική έρευνα δράσης σύμφωνα με τους P. M. Camic, J. E. Rhodes και L. Yardley (2003). Τα φύλλα εργασίας κατασκευάστηκαν με στόχο να διερευνηθεί κατά πόσο η συνέργεια Μαθηματικών και Μηχανών μπορεί να διευκολύνει την εισαγωγή μιας σύνθετης έννοιας όπως είναι αυτή της παραβολής καθώς και της συνάρτησης και σύμφωνα με την θεωρία της «σημειωτικής διαμεσολάβησης» (Bussi & Mariotti, 2008). Οι συγκεκριμένες μαθηματικές μηχανές «μετατροπής κίνησης» χρησιμοποιήθηκαν:

(α) για την χάραξη παραβολικών τόξων που αντιστοιχούν σε κάποιες «ιδανικές» παραβολικές καμπύλες,

(β) ως ψυχολογικά εργαλεία δίνοντας την ευκαιρία να έλθουν στην επιφάνεια μαθηματικοί ορισμοί ή ιδιότητες και αναπαραστάσεις εννοιών (εικόνα 133).

Όσο αφορά τον εκ των προτέρων σχεδιασμό των φύλλων εργασίας τα οποία διενέμοντο ανά ερώτηση και σε κάθε μαθητή-τρια, υπήρχε εμπειρία και υλικό από προηγούμενες παρόμοιες πειραματικές διδασκαλίες σε ομάδες μαθητών-τριών της Α΄ και Β΄ Λυκείου στο σχολείο μας. Επίσης παρόμοιες πειραματικές διδασκαλίες είχαν πραγματοποιηθεί και στην Εστία Επιστημών Πάτρας με την συμμετοχή σχολείων από την Ελλάδα και το εξωτερικό καθώς και ομάδων εκπαιδευτικών ή φοιτητών.

Στην αρχή υπάρχουν οι εισαγωγικές ερωτήσεις «οπτικής και απτικής γνωριμίας» με τα τεχνουργήματα, ακολουθούν οι μεταβατικές ερωτήσεις οι οποίες στοχεύουν στις επόμενες κεντρικές ερωτήσεις «κλειδιά». Ακολουθούν οι συμπερασματικές ερωτήσεις και ερωτήσεις σύνοψης μέχρι να ολοκληρωθεί η διαδικασία με την τελική ερώτηση (**Παράρτημα [15]**). Υπήρξε σχεδιασμός για περισσότερες ερωτήσεις που περιελάμβαναν το θέμα της «καμπυλότητας» της παραβολής αλλά και την σταδιακή ανάδειξη και διατύπωση του αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος για την χάραξη της. Όμως δεν αρκούσαν οι δύο τετράωρες διδασκαλίες, το οποίο και αποτελεί ερευνητικό στόχο για το μέλλον.



Εικόνα 133: σχηματική αναπαράσταση της Θεωρίας της Σημειωτικής Διαμεσολάβησης για τους δύο παραβολογράφους»

Πραγματοποιήθηκαν δύο τετράωρες πειραματικές διδασκαλίες στο Εργαστήριο Πληροφορικής του σχολείου, στις 5 και 12 Απριλίου 2022, έτσι ώστε το δείγμα να βρίσκεται στο φυσικό του περιβάλλον πέραν της διαπροσωπικής σχέσης με τον ερευνητή. Το δείγμα

χωρίστηκε σε δύο ομάδες «εστίασης» (focus groups) και προκλήθηκε οργανωμένη συζήτηση. Το μέγεθος των δύο ομάδων ήταν τέτοιο ώστε να είναι εφικτή η επικοινωνία των μελών και να δίνεται στους μαθητές-τριες η αίσθηση της ασφάλειας κατά τις περιπτώσεις διαφωνιών τους (Morgan, 1998). Κάθε ομάδα είχε έναν διαμεσολαβητή καθηγητή Μαθηματικών και παρευρίσκετο επιπλέον και συντονιστής καθηγητής Μαθηματικών, για να οριοθετείται η διαδικασία και να καταγράφονται οι διάλογοι σε αρχεία ήχου και εικόνας τηρώντας τα σχετικά ζητήματα δεοντολογίας. Ο διαμεσολαβητής όφειλε κρατά στάση «ενεργητικής ακρόασης», αποφεύγοντας να ασκεί κριτική ακόμα και όταν διαφωνούσε με τις απόψεις τους (Swartling, 2014). Επελέγη η μέθοδος των «ομάδων εστίασης» για να υπάρχει οριζόντια αλληλεπίδραση των μελών, πολυφωνία απόψεων και διάλογος, με στόχο την βαθιά κατανόηση του θέματος.

6.5. Μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων

Εφαρμόστηκε συνδυασμός ποιοτικού και ποσοτικού τύπου μεθόδων ανάλυσης των ερευνητικών αποτελεσμάτων (Τσιώλης, 2015), με στόχο την κατανόηση και ταξινόμηση των αποτελεσμάτων και όχι μόνο την αντιπροσωπευτικότητα και στατιστική γενίκευσή τους. Το ενδιαφέρον ήταν στο «πώς» και στο «γιατί» της κατανόησης των μαθητών-τριών που συμμετείχαν και με την διαμεσολάβηση των δύο μηχανισμών.

Χρησιμοποιήθηκε το πλαίσιο της «θεματικής ανάλυσης» που αποτελεί μια εύχρηστη μέθοδο η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στην ποιοτική έρευνα και παρέχει βασικές δεξιότητες που είναι χρήσιμες και για τη διεξαγωγή πιο εξειδικευμένων προσεγγίσεων ποιοτικής ανάλυσης (Clarke, Braun & Hayfield, 2015). Είναι μια μέθοδος εντοπισμού, περιγραφής, αναφοράς και «θεματοποίησης» ζητημάτων τα οποία προκύπτουν από τα ερευνητικά δεδομένα (Holloway & Tondres, 2003). Προσδιορίστηκε επιστημολογικά και θεωρητικά η ανάλυση, βάσει των ερευνητικών ερωτημάτων. Αναλύθηκαν τα θέματα (Fereday & Muir-Cochrane, 2006): (α) τα οποία προέκυψαν από το κείμενο και εδράζονταν στα δεδομένα (επαγωγική προσέγγιση), (β) βασιζόντουσαν σε «a priori» χαρακτηριστικά τα οποία ενδιαφέρουν (παραγωγική προσέγγιση) και (γ) τα οποία ήταν συνδυασμός επαγωγικής και παραγωγικής προσέγγισης.

Τα στάδια της εν λόγω θεματικής ανάλυσης των φύλλων εργασίας ήταν: (α) η εξοικείωση με τα κείμενα των μαθητών-τριών, (β) η κωδικοποίηση και η περιγραφή των φύλλων εργασίας, (γ) η αξιολόγηση των απαντήσεων σύμφωνα με συγκεκριμένους πέντε δείκτες (Van Hiele, «Γνώση Καταχώρησης», SOLO, «Επεξεργασίες», «Συνδέσεις»), (δ) η επανεξέταση του προηγούμενου βήματος για άρση αλληλοκαλύψεων, (ε) η ποσοτικοποίηση των ποιοτικών

αποτελεσμάτων και (στ) η στατιστική μελέτη και εξαγωγή αποτελεσμάτων (περιγραφικά και επαγωγικά).

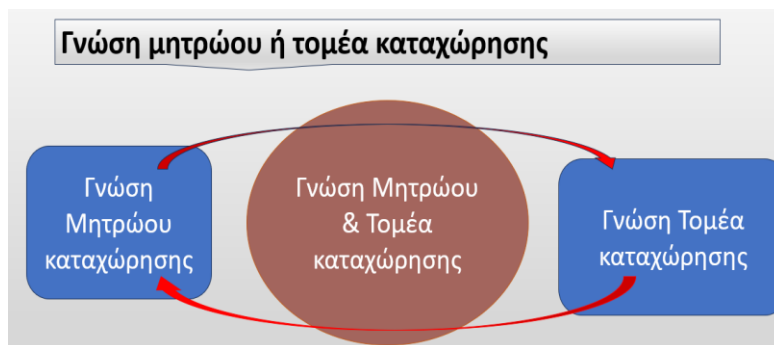
Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της έρευνας κωδικοποιήθηκαν και ταξινομήθηκαν σύμφωνα με πέντε κριτήρια-δείκτες (Bossé, Bayaga, Lynch-Davis & DeMarte, 2015). Εξετάστηκαν τα επίπεδα «Van Hiele» (Fuys, Geddes & Rosamond, 1984 ; Haviger & Vojkúnková, 2014), η «γνώση καταχώρησης μητρώου και τομέα» (Adu-Gyamfi, Bossé, & Chandler, 2017; Hiebert, 1988), η «SOLO ταξινόμηση» των πέντε επιπέδων δραστηριότητας (Biggs & Collis, 1982), οι «επεξεργασίες» των αναπαραστάσεων (Kaput, 1987a, 1987b; Kaput, 1998) και οι «συνδέσεις» των αναπαραστάσεων και των αντίστοιχων τομέων (Adu-Gyamfi, Bossé, & Lynch-Davis, 2019).

Η ταξινόμηση των van Hiele συνήθως χρησιμοποιείται για θέματα Ευκλείδειου Γεωμετρίας και ελέγχει το γνωστικό επίπεδο των μαθητών-τριών το οποίο εξελίσσεται «σειριακά» (Van Hiele, 1986; Terpo, 1991) η οποία επικεντρώνεται στα τελικά προϊόντα της κατανόησης των μαθητών, παρά στις γνωστικές διαδικασίες που οδηγούν σε αυτά τα τελικά προϊόντα (Vincent, 2002). Η ταξινόμηση SOLO ελέγχει την δομή της γνώσης και τις ενέργειες που κάνει ένας μαθητής-τρια όταν αλληλοεπιδρά με όλο και πιο εξελιγμένες πληροφορίες, και χρησιμοποιείται συνήθως για θέματα Άλγεβρας (εικόνα 134). Αυτά τα πλαίσια ελέγχου μπορούν να θεωρηθούν ως συμπληρωματικά δεδομένου ότι η Αναλυτική Γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται στη διασταύρωση της Άλγεβρας και της Ευκλείδειου Γεωμετρίας.



Εικόνα 134: Περιγραφή δείκτη γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων SOLO

Επιπλέον, η από κοινού εφαρμογή αυτών των πλαισίων μπορεί να εισάγει νέες διαστάσεις στην ανάλυση της εργασίας μαθητών-τριών η οποία συνδέεται με κάποια μηχανή και απαιτείται «χωρική αντίληψη». Θεωρήθηκε ενδιαφέρον να συνδεθούν τα επίπεδα Van Hiele με ένα πρόσθετο πλαίσιο «Γνώσης Μητρώου ή Τομέα Καταχώρησης» μέσω του οποίου θα αξιολογείται επιπλέον το γνωστικό επίπεδο των μαθητών όχι μόνο στην Ευκλείδειο γεωμετρία (εικόνα 135).



Εικόνα 135: Περιγραφή γνωστικού δείκτη Γνώσης Καταχώρησης

Επίσης και η ταξινόμηση SOLO συμπληρώθηκε από με δύο πρόσθετα πλαίσια ελέγχου δραστηριότητας μέσω των οποίων αναγνωρίζεται η ικανότητα συνδέσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων και των σχετικών τομέων καθώς και η επεξεργασία των αναπαραστάσεων, δηλαδή η κωδικοποίηση ή η αποκωδικοποίηση τους (εικόνα 136). Άλλωστε η κατανόηση είναι κάτι πιο πολύπλοκο από το γνωστικό επίπεδο και από τις ενέργειες που κάνει ο μαθητής όταν αλληλοεπιδρά με πληροφορίες.

Οι πέντε δείκτες αξιολόγησης επελέγησαν διότι αλληλοσυμπληρώνονται. Το γνωστικό επίπεδο και οι αντίστοιχες δραστηριότητες είναι διακριτές έννοιες και εξετάζονται σε διαφορετικές πτυχές τους. Στην έρευνα αυτή ελέγχεται εάν το υψηλό γνωστικό επίπεδο οδηγεί σε πιο προηγμένες δραστηριότητες και αντιστρόφως.



Εικόνα 136: Περιγραφή δεικτών γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων «Επεξεργασίες» και «Συνδέσεις».

Τα πλαίσια ελέγχου Van Hiele και Hiebert αντιμετωπίζουν διαφορετικά το γνωστικό επίπεδο. Τα επίπεδα «Van Hiele» επικεντρώνονται κυρίως στη δισδιάστατη και τρισδιάστατη γεωμετρική αντίληψη, το πλαίσιο «γνώσης μητρώου ή τομέα καταχώρησης Hiebert» εξετάζει ευρύτερα και αποτυπώνει σχετικά με κάθε μαθηματική έννοια που αναπαρίσταται σε οποιοδήποτε μαθηματικό ή μηχανολογικό πλαίσιο.

Τα πλαίσια ελέγχου των δραστηριοτήτων εξετάζουν διαφορετικές πτυχές της δραστηριότητας των μαθητών-τριών κατά την προσπάθειά τους να αποκτήσουν την γνώση. Η ταξινόμηση «SOLO» εξετάζει πως ενεργούν οι μαθητές-τριες εργαζόμενοι μέσα σε όλο και πιο περίπλοκες έννοιες. Οι «Επεξεργασίες» ελέγχουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές

χρησιμοποιούν τις διαθέσιμες πληροφορίες, σε τοπικό ή γενικό επίπεδο, ενώ οι «Συνδέσεις» αποτυπώνουν σχέσεις που ο μαθητής δημιουργεί ή αποκωδικοποιεί μεταξύ αναπαραστάσεων και ιδεών.

Στη συνέχεια οι δύο ποιοτικές μεταβλητές που αφορούν το γνωστικό επίπεδο και οι τρεις ποιοτικές μεταβλητές που αφορούν την κατανόηση μέσω δραστηριοτήτων των μαθητών-τριών, ποσοτικοποιήθηκαν διατακτικά και όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 2: Ακρωνύμια & Ποσοτικοποίηση των 5 δεικτών κατανόησης

Επίπεδα Van Hiele		Γνώση Καταχώρισης	
Επίπεδο 0 - Οπτικοποίηση (Οπτ) τιμή 1		Γνώση Μητρώου Καταχώρισης (ΓΜΚ) (κατανόηση των χαρακτήρων, τελεστών, συμβάσεων και συνόλου κανόνων της αναπαράστασης) τιμή 1	
Επίπεδο 1 - Ανάλυση (Αν) τιμή 2		Γνώση Τομέα Καταχώρισης (ΓΤΚ) (κατανόηση του τομέα με τον οποίο συνδέονται οι καταχωρήσεις) τιμή 2	
Επίπεδο 2 - Αφαίρεση (Αφ) τιμή 3		Γνώση Μητρώου και Τομέα Καταχώρισης (ΓΜΤΚ) , κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ο τομέας παρέχει πληροφορίες σχετικά με την αναπαράσταση και αντιστρόφως τιμή 3	
Επίπεδο 3 : Παραγωγή (Παρ) τιμή 4			
Επίπεδο 4 : Αυστηρότητα (Αυστ) τιμή 5			
Ταξινόμηση SOLO	Συντακτική και Σημασιολογική Επεξεργασία	Ισόμορφες, Υπερβατικές και Μεικτές Συνδέσεις	
Προ-δομική Κατανόηση (Προ) τιμή 1	Συντακτική Επεξεργασία (Συν) αλληλεπίδραση με μια αναπαράσταση με άμεσο χειρισμό των τοπικών συμβόλων στις αναπαραστάσεις χωρίς αναφορά στο νόημα της ιδέας που αναπαρίσταται τιμή 1	Ισομορφικές Συνδέσεις (ΙΣ) γίνονται τοπικά και συντακτικά μεταξύ χαρακτηριστικών διαφορετικών αναπαραστάσεων τιμή 1	
Μono-δομική Κατανόηση (Μono) τιμή 2		Υπερβατικές Συνδέσεις (ΥΣ) γίνονται μεταξύ μιας αναπαράστασης και ενός ή περισσότερων περιοχών τιμή 2	
Πολύ-δομική Κατανόηση (Πολυ) τιμή 3		Μεικτές Συνδέσεις (ΜΣ) για μάθηση μαθηματικών που περιλαμβάνει ευελιξία χρησιμοποιώντας τόσο γενικές όσο και τοπικές συνδέσεις τιμή 3	
Σχετικιστική Κατανόηση (Σχε) τιμή 4	Σημασιολογική Επεξεργασία (Σημ) αλληλεπίδραση με μια αναπαράσταση που βασίζεται στις γενικές ιδέες που αναπαρίστανται και όχι στα ίδια τα σύμβολα τιμή 2		
Εκτεταμένη Αφαίρεση (Εκτ) τιμή 5			

Οι τελικές μεταβλητές μελετήθηκαν τόσο σε παραμέτρους της «Περιγραφικής Στατιστικής» αλλά και σε παραμέτρους της «Στατιστικής Συμπερασματολογίας». Υπολογίσθηκαν τα μέτρα θέσης και διασποράς των μεταβλητών κάθε μαθητή-τριας αλλά και κάθε ομάδας. Στη συνέχεια μελετήθηκε η ανά δύο συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών των δύο ομάδων. Ειδικότερα, εισήχθησαν στο SPSS, οι μέσες τιμές κάθε ποσοτικοποιημένης διατακτικής μεταβλητής που προκύπτουν ανά μαθητή-τρια, αφού υπολογίσθηκε η συχνότητά τους (ανά μαθητή-τρια). Κατά την μετάβαση από τις ακέραιες διατακτικές σε δεκαδικούς μέσους όρους έγινε προσπάθεια προσεκτικής ερμηνείας. Ο υπολογισμός της μέσης τιμής κάθε μεταβλητής (κάθε μαθητή-τριας), έγινε σύμφωνα με την σχέση:

$$\text{Μέση τιμή δείκτη} = \frac{\text{Άθροισμα μονάδων δείκτη}}{\text{πλήθος περιπτώσεων χρήσης δείκτη}} = \text{τιμή μεταβλητής.}$$

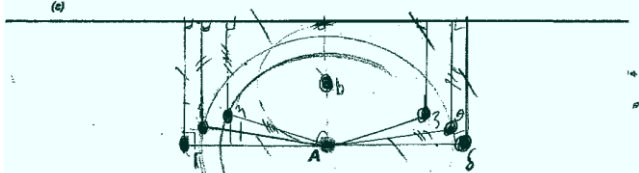
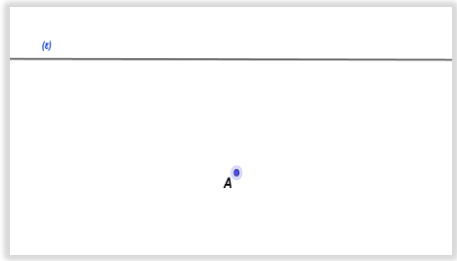
Ακολούθησε ποιοτική ερμηνεία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν για τον κάθε μαθητή-τρια και σε κάθε δείκτη. Στη συνέχεια υπολογίσθηκε η μέση τιμή των μέτρων θέσης και διασποράς κάθε ομάδας και ακολούθησε ο μη παραμετρικός έλεγχος της διαμέσου κάθε δείκτη, συγκρινόμενη με υποθετική διάμεσο. Τέλος, για κάθε ομάδα έγινε μη παραμετρικός έλεγχος συσχέτισης των γνωστικών μεταβλητών με τις μεταβλητές δραστηριοτήτων. Ακολουθούν δύο παραδείγματα της διαδικασίας μελέτης και αξιολόγησης των απαντήσεων δύο μαθητών-τριών.

6.6. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1^ο (αφορά την 1^η ερώτηση των ΦΕ του μηχανισμού van Schooten) από τον μαθητή vS1:

«Χρησιμοποιώντας χάρακα και διαβήτη, να βρείτε σημεία του επιπέδου έτσι ώστε το καθένα να ισαπέχει από το σημείο A και την ευθεία (ε)».

Πίνακας 3: Απάντηση μαθητή vS1 και ανάλυση αυτής για την 1^η ερώτηση

vS1: 1) Ένα πρώτο σημείο είναι το κέντρο κύκλου που εφάπτεται στην (ε) και περνά από το A. 2) Άλλα δύο σημεία είναι οι κορυφές τετραγώνων πλευράς ίσης με την απόσταση του A από την (ε). 3) Άλλα τέτοια σημεία βρίσκω φέρνοντας κύκλο κάποιας ακτίνας και την κάθετη από το σημείο αυτό προς την (ε) και με μήκος ίσο με την ακτίνα αυτή.	Παρατηρήσεις: 1) Υπονοείται η γνώση του ορισμού της εφαπτομένης κύκλου σε σημείο. Ο κύκλος όμως δεν κατασκευάζεται. Κατασκευάζεται μόνο η κάθετος από το A στην ε, και προσεγγιστικά σημειώνεται το μέσον της. (Αφ, ΓΜΤΚ, Σχε, Σημ) 2) Δεν γίνεται γεωμετρική κατασκευή των τετραγώνων. Γενικά, ο μαθητής (ο οποίος εξετάζεται ΠΡΟΦΟΡΙΚΑ) εντοπίζει θεωρητικά τη θέση των ζητούμενων σημείων και τα σχήματα που φτιάχνει δεν έχουν σκοπό να εντοπίσουν με ακρίβεια τα σημεία, αλλά να υποστηρίξουν οπτικά τη θεωρητική προσέγγιση. (Αφ, ΓΜΤΚ, Σχε, Σημ, ΥΣ) 3) Για τα υπόλοιπα σημεία, ξέρει ότι θα βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια ου κύκλου, αλλά τα εντοπίζει ένα-ένα με μέτρηση. Περιγράφει την κατασκευή τους αλλά ακολουθείται αντίστροφη πορεία όσον αφορά την κάθετη απόσταση προς την (ε). (Αφ, ΓΜΤΚ, Σχε, Σημ)
 Το θ είναι ελεύθερο κύκλο που εφάπτεται στην ε και περνά από το A. Το Γ και το δ είναι σημεία στην ε και η $\Gamma\delta$ είναι η απόσταση του A από την ε. Για τα $\zeta, \eta, \theta, \varepsilon$ ψάχνω κύκλους με τις ακτίνες $\Gamma\delta$ και $\delta\theta$ και την κάθετη από το Γ στην ε και με μήκος $\Gamma\delta$.	

Αφού μελετήθηκαν οι απαντήσεις σύμφωνα με τους 5 δείκτες, ακολούθησε η ποσοτικοποίηση αυτών των χαρακτηρισμών. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ο vS1 έλαβε:

Από τον δείκτη «van Hiele»: $3 A\phi = 3 \times 3 = 9$ μονάδες (στα 3 υποερωτήματα)

Από τον δείκτη «Γνώση Καταχώρησης»: $3 ΓΜΤΚ = 3 \times 3 = 9$ μονάδες (στα 3 υποερωτήματα)

Από τον δείκτη «SOLO»: $3 ΣΧε = 3 \times 4 = 12$ μονάδες (στα 3 υποερωτήματα)

Από τον δείκτη «Επεξεργασίες»: $3 Σημ = 3 \times 2 = 6$ μονάδες (στα 3 υποερωτήματα)

Από τον δείκτη «Συνδέσεις»: $1 ΥΣ = 1 \times 2 = 2$ μονάδες (στα 1 υποερωτήματα)

Η ίδια διαδικασία εφαρμόστηκε σε κάθε ΦΕ του μαθητή vS1 και στο τέλος υπολογίστηκε η μέση τιμή για κάθε μία από τις 5 μεταβλητές και προέκυψαν οι μέσες τιμές που υπάρχουν στον παρακάτω πίνακα:

$$\text{Μέση τιμή δείκτη} = \frac{\text{Άθροισμα μονάδων δείκτη}}{\text{πλήθος περιπτώσεων χρήσης δείκτη}} = \text{τιμή μεταβλητής}$$

Πίνακας 4: Μέση τιμή γνωστικών μεταβλητών μαθητή vS1 (van Schooten)

	van Hiele	n	M	Γνώση Καταχώρησης	n	M
vS1	65	24	2,7	59	26	2,3

Πίνακας 5: Μέση τιμή μεταβλητών δραστηριότητας μαθητή vS1 (van Schooten)

	SOLO	n	M	Επεξεργασίες	n	M	Συνδέσεις	n	M
vS1	91	25	3,6	44	26	1,7	37	21	1,8

Παράδειγμα 2^ο (αφορά την 15^η ερώτηση των ΦΕ του μηχανισμού CAVALIERI από τον μαθητή C6):

- a) «Επαναδιατυπώστε και σχολιάστε την γεωμετρική σχέση που προέκυψε στις προηγούμενες ερωτήσεις για την πλευρά RL χρησιμοποιώντας πλέον τις συντεταγμένες των κορυφών των τριγώνων της μηχανής για να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων αυτής της σχέσης.
- b) Η τελευταία σχέση που προκύπτει αφορά τις συντεταγμένες του σημείου R. Ποια συνάρτησή σας θυμίζει από το μάθημα της Άλγεβρας (αφού στο πρώτο μέλος της θα έχετε την τεταγμένη του σημείου R);
- c) Η εξίσωση που προέκυψε σε τι είδους καμπύλη αντιστοιχεί; Να περιγραφεί η καμπύλη με λεπτομέρεια και να την σχεδιάσετε κατά το δυνατόν πάνω στο παρακάτω σχήμα».

Πίνακας 6: Απάντηση μαθητή C6 και ανάλυση αυτής για την 15^η ερώτηση

(C6) 1) $RL = \sqrt{(y - y_o)^2 + (x - x_o)^2} \Rightarrow RL = \sqrt{(y - y)^2 + (x - 0)^2} \Rightarrow RL = \sqrt{x^2} = x$ (απόσταση) $RL^2 = x^2, AL = -y$ ($y < 0$) (απόσταση), $LK = c$ (απόσταση). 2) $x^2 = -y \cdot c \Rightarrow -y = \frac{x^2}{c}$ $-y = \frac{x^2}{c} \Rightarrow y = -\frac{1}{c} \cdot x^2$. 3) παραβολή. $\begin{cases} x^2 = -y \cdot c \\ x^2 = -2p \cdot y \end{cases}$. Άρα $c = 2p \Rightarrow p = \frac{c}{2}$. $E\left(0, \frac{p}{2}\right) = E\left(0, \frac{\frac{c}{2}}{2}\right) = E\left(0, \frac{-c}{4}\right)$	1) Διακρίνει την διαφορά μεταξύ μήκους και αρνητικής τεταγμένης που αντιστοιχεί. (Αφ, ΓΜΤΚ, Σχε, Συν, ΜΣ) 2) Αναγνώριση σχετικής συνάρτησης από την Άλγεβρα. (ΓΜΤΚ, Σχε, Σημ, ΥΣ) 3) Αναγνώριση εξίσωσης παραβολικής καμπύλης, δίνοντας λανθασμένα (ΙΣΩΣ) τις συντεταγμένες της Εστίας της. Όμως δεν δίνεται η εξίσωση της διευθετούσας και δεν σχεδιάζει τελικά την κωνική τομή. (Αν, ΓΜΤΚ, Σχε, Σημ, ΙΣ)
σχήμα. $RL^2 = AL \cdot LK$ α) $RL = \sqrt{(y - y_o)^2 + (x - x_o)^2}$ $RL = \sqrt{(y - y)^2 + (x - 0)^2}$ $RL = \sqrt{x^2} = x$ (απόσταση) $RL^2 = x^2$ $AL = -y$ (απόσταση) $LK = c$ (απόσταση) $x^2 = -y \cdot c \Rightarrow y = \frac{x^2}{-c}$ β) $y = \frac{x^2}{-c}$ γ) παραβολή $x^2 = -y \cdot c \Rightarrow c = \frac{x^2}{-y}$ $x^2 = -2py \Rightarrow p = \frac{c}{2}$ $E\left(0, \frac{p}{2}\right) = E\left(0, \frac{\frac{c}{2}}{2}\right) = E\left(0, \frac{-c}{4}\right)$	

Αφού χαρακτηρίστηκαν οι απαντήσεις σύμφωνα με τους 5 δείκτες, ακολούθησε η ποσοτικοποίηση αυτών των χαρακτηρισμών.

Από τον δείκτη «van Hiele»: $1 \text{ Αν} + 1 \text{ Αφ} = 1 \times 2 + 1 \times 3 = 5$ μονάδες (στα 2 υποερωτήματα)

Από τον δείκτη «Γνώση Καταχώρησης»: $3 \text{ ΓΜΤΚ} = 3 \times 3 = 9$ μονάδες (στα 3 υποερωτήματα)

Από τον δείκτη «SOLO»: $3 \text{ Σχε} = 3 \times 4 = 12$ μονάδες (στα 3 υποερωτήματα)

Από τον δείκτη «Επεξεργασίες»: $1 \text{ Συν} + 2 \text{ Σημ} = 1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$ μονάδες (στα 3 υποερωτήματα)

Από τον δείκτη «Συνδέσεις»: $1 \text{ ΙΣ} + 1 \text{ ΥΣ} + 1 \text{ ΜΣ} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6$ μονάδες (στα 3 υποερωτήματα)

Η ίδια διαδικασία εφαρμόστηκε σε κάθε ΦΕ του μαθητή Μ6 και στο τέλος υπολογίσθηκαν η μέση τιμή για κάθε μία από τις 5 μεταβλητές και προέκυψαν οι μέσες τιμές που υπάρχουν στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 7: Μέση τιμή γνωστικών μεταβλητών μαθητή C6 (Cavalieri)

	van Hiele	n	M	Γνώση Καταχώρησης	n	M
C6	33	19	1,7	32	23	1,4

Πίνακας 8: Μέση τιμή μεταβλητών δραστηριοτήτων μαθητή C6 (Cavalieri)

	SOLO	n	M	Επεξεργασίες	n	M	Συνδέσεις	n	M
C6	68	25	2,7	39	29	1,3	33	23	1,4

6.7. Ηθική και Δεοντολογία

Σε αυτήν την εργασία δεν υπήρξε κάποιο προϊόν λογοκλοπής ή παράφρασης καθώς και στοχευμένη κατασκευή δεδομένων και μετρήσεων. Δε αντιγράφηκε ή παραφράστηκε κάποια «ιδέα» άλλου συγγραφέα ή ερευνητή.

Κατά την διάρκεια των δύο πειραματικών διδασκαλιών τα υποκείμενα της έρευνας ενημερώθηκαν για τα δικαιώματά τους και για την προστασία τους. Επίσης είχαν ενημερωθεί και οι κηδεμόνες τους οι οποίοι και συμφώνησαν γραπτώς για την συμμετοχή υπό αυτούς τους όρους που περιγράφονται σε αυτήν την παράγραφο (**Παράρτημα [14]**).

Συγκεκριμένα, κατά την πρώτη και την δεύτερη ημέρα, έγινε ενημέρωση και αμοιβαία συμφωνία σχετικά με:

- (α) να μην απαντούν σε ερωτήσεις που δεν θέλουν, να μην αναφέρουν πληροφορίες που δεν θέλουν, να αποχωρήσουν από τη διαδικασία όποτε θελήσουν αφού πρώτα το δηλώσουν στην ολομέλεια και στους επιβλέποντες.
- (β) θα διασφαλισθεί η ανωνυμία των συμμετεχόντων, προλαμβάνοντας την πιθανή ταυτοποίησή τους, την εχεμύθεια και την προστασία των προσωπικών δεδομένων που θα σας δοθούν κατά την ερευνητική διαδικασία.
- (γ) τα φύλλα εργασίας θα αποθηκευτούν αφού πρώτα αφαιρεθεί το ονοματεπώνυμο κάθε μαθητή και μαθήτριας αντικαθιστώντας το με τα ακρωνύμια vS1, C2 κτλ. Τα αρχεία ήχου και εικόνες μετά την μελέτη τους από τον ερευνητή πρέπει να μην διαρρεύσουν και να καταστραφούν μετά την λήξη της έρευνας και την δημοσίευση των συμπερασμάτων της. Την απόλυτη ευθύνη φέρει ο ερευνητής.
- (δ) σε κάποια ερωτήματα που είναι ευαίσθητα ή τραυματικά, οι μαθητές-τριες έχουν το δικαίωμα να μην απαντήσουν δηλώνοντας το εκείνη τη στιγμή στην ολομέλεια και στους επιβλέποντες.

(ε) ο ερευνητής έχει την υποχρέωση να ενημερώσει του μαθητές-τριες για τα τελικά αποτελέσματα της έρευνας του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο

Αποτελέσματα

Κατηγορία ερευνητικών ερωτημάτων Διδακτικής των Μαθηματικών

Οι πέντε μεταβλητές δεν είναι συνεχείς αλλά διατακτικές. Η χρήση μέτρων κεντρικής θέσης δεν έχει σαφές νόημα. Όμως η έρευνα είναι ποιοτική και τα συμπεράσματα αναφέρονται στο «πώς» και το «γιατί» και όχι στο «πόσο». Απλά ταξινομήθηκαν τα συμπεράσματα και έγινε προσπάθεια για την άντληση ποιοτικών συμπερασμάτων για κάθε μαθητή και μαθήτρια που συμμετείχαν στις δύο πειραματικές διδασκαλίες.

Όσο αφορά την μελέτη των δεδομένων ανά ομάδα, εφαρμόστηκε για κάθε έναν από τους πέντε δείκτες, μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «Wilcoxon signed rank» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης της παρατηρούμενης διαμέσου από κάποια υποτιθέμενη τιμή της. Επειδή ο έλεγχος είναι μη παραμετρικός, δεν ελέγχεται η διαφορά των δύο διαμέσων τιμών, αλλά η διαφορά κατάταξης (rank) των τιμών. Επίσης αν και ο έλεγχος κανονικότητας σε κάθε περίπτωση δεν παρουσίαζε πρόβλημα, λόγω της ύπαρξης μη σταθμισμένων διατακτικών μεταβλητών, επελέγη μη παραμετρικός έλεγχος της διαμέσου τιμής κάθε μεταβλητής και όχι έλεγχος t-test για την μέση τιμή της.

(Α) Ατομική περιγραφή αποτελεσμάτων και σε κάθε ερευνητικό υποερώτημα από τα 1/α, 1/β, 1/γ, 1/δ, 1/ε (Παράρτημα [17]):

Ομάδα van Schooten

vS1: Αναλύει τα δεδομένα συλλογίζόμενος επαγωγικά σε στάδιο μετάβασης σε αφαιρετικό επίπεδο ($M_{\text{van Hiele}}=2,7$), ερμηνεύοντας τους τομείς που αναπαριστώνται και σε αρχικό στάδιο μετάβασης στην αντίστροφη κατεύθυνση ερμηνείας ($M_{\text{Γνώση Καταχώρησης}}=2,3$). Επίσης, εστιάζει σε πολλές πτυχές του προβλήματος και βρίσκεται σε ικανοποιητικό στάδιο μετάβασης να τις συνδυάσει συνεκτικά ($M_{\text{SOLO}}=3,6$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{\text{Επεξεργασίες}}=1,7$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις της ίδιας περιοχής και αρκετές φορές τις συνδέει και με αναπαραστάσεις άλλων περιοχών ($M_{\text{Συνδέσεις}}=1,8$).

vS2: Αναλύει τα δεδομένα συλλογίζόμενος επαγωγικά σε στάδιο μετάβασης σε αφαιρετικό επίπεδο ($M_{\text{van Hiele}}=2,4$), χειριζόμενος τις αναπαραστάσεις σε σημαντικό στάδιο ικανότητας ερμηνείας του αναπαριστώμενου τομέα ($M_{\text{Γνώση Καταχώρησης}}=1,8$). Επίσης, εστιάζει σε πολλές πτυχές του προβλήματος και βρίσκεται σε στάδιο μετάβασης να τις συνδυάσει συνεκτικά ($M_{\text{SOLO}}=3,4$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές

αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{\text{Επεξεργασίες}}=1,6$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις της ίδιας περιοχής και κάποιες φορές τις συνδέει και με αναπαραστάσεις άλλων περιοχών ($M_{\text{Συνδέσεις}}=1,4$).

vS3: Αναλύει τα δεδομένα συλλογισόμενος επαγωγικά σε αρχικό στάδιο μετάβασης σε αφαιρετικό επίπεδο ($M_{\text{van Hiele}}=2,3$), χειριζόμενος τις αναπαραστάσεις γνωρίζοντας τον αναπαριστώμενο τομέα ($M_{\text{Γνώση Καταχώρησης}}=2$). Επίσης, εστιάζει σε πολλές πτυχές του προβλήματος και βρίσκεται σε στάδιο μετάβασης να τις συνδυάσει συνεκτικά ($M_{\text{SOLO}}=3,5$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{\text{Επεξεργασίες}}=1,5$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις της ίδιας περιοχής και αρκετές φορές τις συνδέει και με αναπαραστάσεις άλλων περιοχών ($M_{\text{Συνδέσεις}}=1,6$).

vS4: Αναλύει τα δεδομένα συλλογισόμενος επαγωγικά σε αρχικό στάδιο μετάβασης σε αφαιρετικό επίπεδο ($M_{\text{van Hiele}}=2,2$), βρίσκεται σε στάδιο μετάβασης σύνδεσης κάποιων αναπαραστάσεων με τους τομείς που αναπαριστώνται ($M_{\text{Γνώση Καταχώρησης}}=1,7$). Επίσης, εστιάζει σε πολλές πτυχές του προβλήματος και βρίσκεται σε αρχικό στάδιο μετάβασης να τις συνδυάσει συνεκτικά ($M_{\text{SOLO}}=3,3$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{\text{Επεξεργασίες}}=1,5$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις της ίδιας περιοχής καθώς και μία αναπαράσταση μπορεί να την συνδέσει με άλλες περιοχές ($M_{\text{Συνδέσεις}}=1,6$).

vS5: Αναλύει τα δεδομένα επαγωγικά σε στάδιο μετάβασης και σε αφαιρετικό επίπεδο ($M_{\text{van Hiele}}=2,7$), χειριζόμενος τις αναπαραστάσεις ερμηνεύοντας ικανοποιητικά τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{\text{Γνώση Καταχώρησης}}=2,2$). Επίσης, εστιάζει σε πολλές πτυχές του προβλήματος και βρίσκεται σε στάδιο μετάβασης να τις συνδυάσει συνεκτικά ($M_{\text{SOLO}}=3,5$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και συνήθως αλληλοεπιδρά μαζί τους και με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{\text{Επεξεργασίες}}=1,6$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου και μπορεί σχεδόν πάντοτε να συνδέσει μία αναπαράσταση με άλλους τομείς ($M_{\text{Συνδέσεις}}=1,9$).

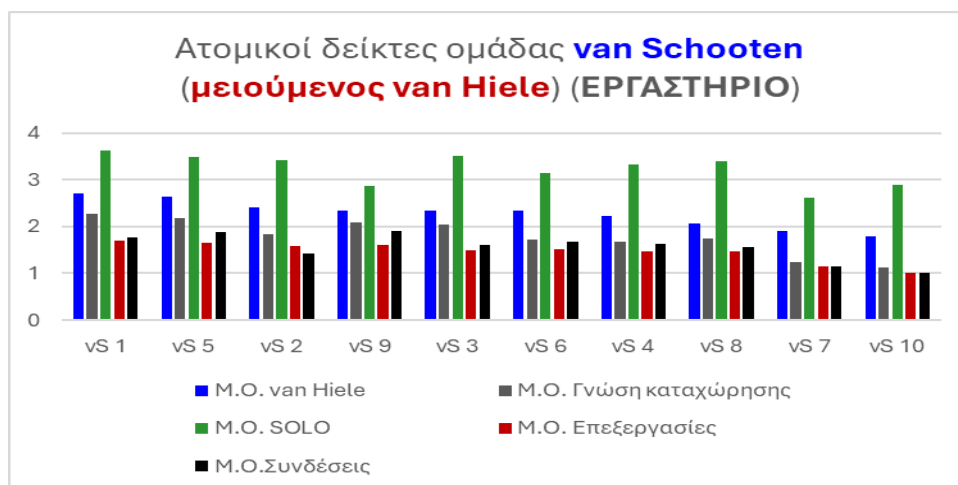
vS6: Αναλύει τα δεδομένα επαγωγικά και σε αρχικό στάδιο μετάβασης σε αφαιρετικό επίπεδο ($M_{\text{van Hiele}}=2,3$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και αρκετές φορές ερμηνεύοντας τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{\text{Γνώση Καταχώρησης}}=1,7$). Επίσης, εστιάζει σε πολλές πτυχές του προβλήματος ασύνδετα ($M_{\text{SOLO}}=3,2$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{\text{Επεξεργασίες}}=1,6$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις της ίδιας περιοχής και συνήθως μπορεί να συνδέσει μία αναπαράσταση με άλλους τομείς ($M_{\text{Συνδέσεις}}=1,7$).

vS7: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογίζόμενος συνήθως επαγωγικά ($M_{vanHiele}=1,9$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και πολύ λίγες φορές τις ερμηνεύει σχετικά με τον αντίστοιχο τομέα που αναπαρίσταται ($M_{Γνώση\ Καταχώρησης}=1,2$). Επίσης, πάντα εστιάζει σε μία πτυχή του προβλήματος και κάποιες φορές σε περισσότερες πτυχές αλλά ασύνδετα ($M_{SOLO}=2,6$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις συνήθως χωρίς ερμηνεία ($M_{Επεξεργασίες}=1,2$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις της ίδιας περιοχής και σπανίως με άλλους τομείς ($M_{Συνδέσεις}=1,2$).

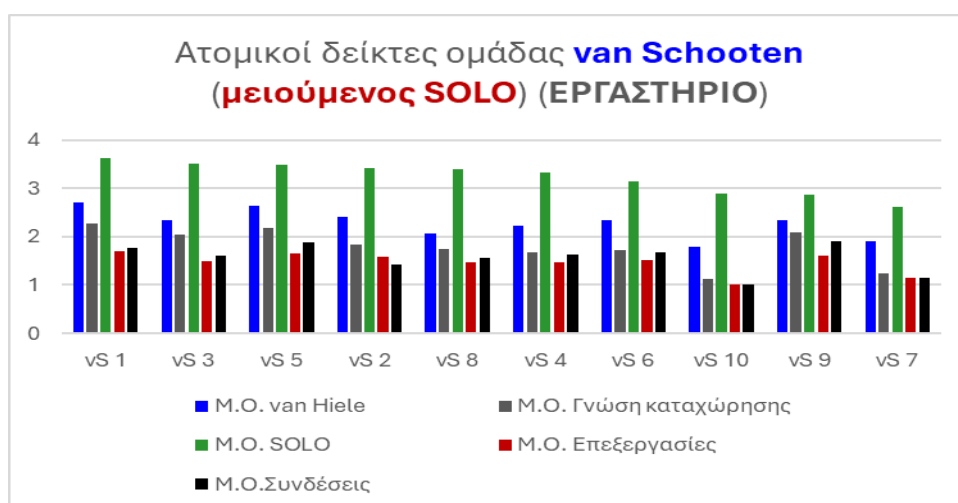
vS8: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογίζόμενος επαγωγικά ($M_{vanHiele}=1,9$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και ερμηνεύοντας συνήθως και τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{Γνώση\ Καταχώρησης}=1,7$). Επίσης, εστιάζει σε πολλές πτυχές του προβλήματος και βρίσκεται σε στάδιο μετάβασης να τις συνδυάσει συνεκτικά ($M_{SOLO}=2,6$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{Επεξεργασίες}=1,5$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις της ίδιας περιοχής και βρίσκεται σε σημαντικό στάδιο μετάβασης να συνδέσει μία αναπαράσταση με άλλες περιοχές ($M_{Συνδέσεις}=1,6$).

vS9: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας και ταξινομώντας τις ιδιότητες των σχημάτων και συλλογίζόμενος-η επαγωγικά ευρισκόμενος-η σε στάδιο μετάβασης στο αφαιρετικό επίπεδο ($M_{vanHiele}=2,4$), χειριζόμενος-η τις αναπαραστάσεις με βάση τον τομέα που αναπαριστούν ($M_{Γνώση\ Καταχώρησης}=2,1$). Επίσης, εστιάζει σε μία ή πολλές πτυχές του προβλήματος ασύνδετα ($M_{SOLO}=2,9$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{Επεξεργασίες}=1,6$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις της ίδιας περιοχής και σχεδόν πάντα μπορεί να συνδέσει μία αναπαράσταση με άλλους τομείς ($M_{Συνδέσεις}=1,9$).

vS10: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογίζόμενος συνήθως επαγωγικά ($M_{vanHiele}=1,8$), χειριζόμενος τις αναπαραστάσεις χωρίς ερμηνεία ($M_{Γνώση\ Καταχώρησης}=1,1$). Επίσης, εστιάζει σε περισσότερες πτυχές του προβλήματος αλλά ασύνδετα ($M_{SOLO}=2,9$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις χωρίς ερμηνεία ($M_{Επεξεργασίες}=1$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου αλλά όχι με άλλους τομείς ($M_{Συνδέσεις}=1$).



Εικόνα 137: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στην δεκαμελή ομάδα van Schooten (διατεταγμένοι ως προς τον δείκτη van Hiele)



Εικόνα 138: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στην δεκαμελή ομάδα van Schooten (διατεταγμένοι ως προς τον δείκτη SOLO)

Ομάδα Cavalieri

C1: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογισζόμενος-η συνήθως επαγωγικά ($M_{vanHiele}=1,7$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και σπανίως ερμηνεύοντας τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{Γνώση\ Καταχώρησης}=1,2$). Επίσης, εστιάζει σε μία πτυχή του προβλήματος και αρκετές φορές σε περισσότερες πτυχές μη συνδέοντάς τες ($M_{SOLO}=2,5$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και λίγες φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{Επεξεργασίες}=1,3$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου και όχι με και με άλλους τομείς ($M_{Συνδέσεις}=1$).

C2: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογίζόμενος-η συνήθως επαγωγικά ($M_{vanHiele}=1,7$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και σπανίως ερμηνεύοντας σχετικά με τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{Γνώση\ Καταχώρησης}=1,2$). Επίσης, εστιάζει σε μία πτυχή του προβλήματος και αρκετές φορές σε περισσότερες πτυχές μη συνδέοντάς τις ($M_{SOLO}=2,5$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και σπανίως αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{Επεξεργασίες}=1,2$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου και σπανίως και με άλλους τομείς ($M_{Συνδέσεις}=1,2$).

C3: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογίζόμενος-η συνήθως επαγωγικά ($M_{vanHiele}=1,8$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και σπανίως ερμηνεύοντας σχετικά με τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{Γνώση\ Καταχώρησης}=1,3$). Επίσης, εστιάζει σε μία πτυχή του προβλήματος και συνήθως σε περισσότερες πτυχές μη συνδέοντάς τις ($M_{SOLO}=2,7$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και λίγες φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{Επεξεργασίες}=1,3$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου και σπανίως και με άλλους τομείς ($M_{Συνδέσεις}=1,1$).

C4: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογίζόμενος-η συνήθως επαγωγικά ($M_{vanHiele}=1,7$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και σπανίως ερμηνεύοντας σχετικά με τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{Γνώση\ Καταχώρησης}=1,2$). Επίσης, εστιάζει σε μία πτυχή του προβλήματος και μερικές φορές σε περισσότερες πτυχές μη συνδέοντάς τις ($M_{SOLO}=2,4$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και λίγες φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{Επεξεργασίες}=1,2$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου και μερικές φορές και με άλλους τομείς ($M_{Συνδέσεις}=1,3$).

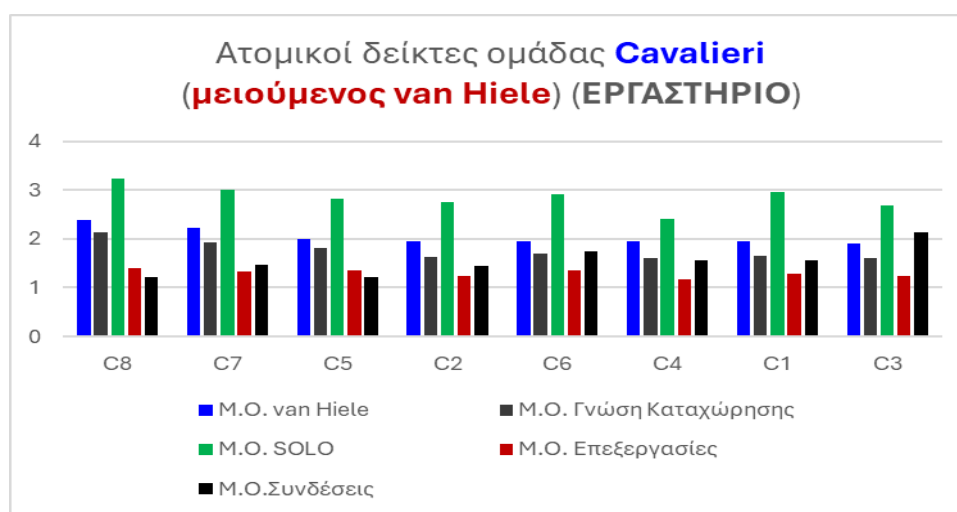
C5: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογίζόμενος-η συνήθως επαγωγικά ($M_{vanHiele}=1,9$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και κάποιες φορές ερμηνεύοντας τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{Γνώση\ Καταχώρησης}=1,2$). Επίσης, εστιάζει τις περισσότερες φορές σε περισσότερες πτυχές χωρίς να τις συνδέει μεταξύ τους ($M_{SOLO}=2,8$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τι εκπροσωπούν ($M_{Επεξεργασίες}=1,4$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου και τις περισσότερες φορές και με άλλους τομείς ($M_{Συνδέσεις}=1,6$).

C6: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογίζόμενος-η συνήθως επαγωγικά ($M_{vanHiele}=1,7$),

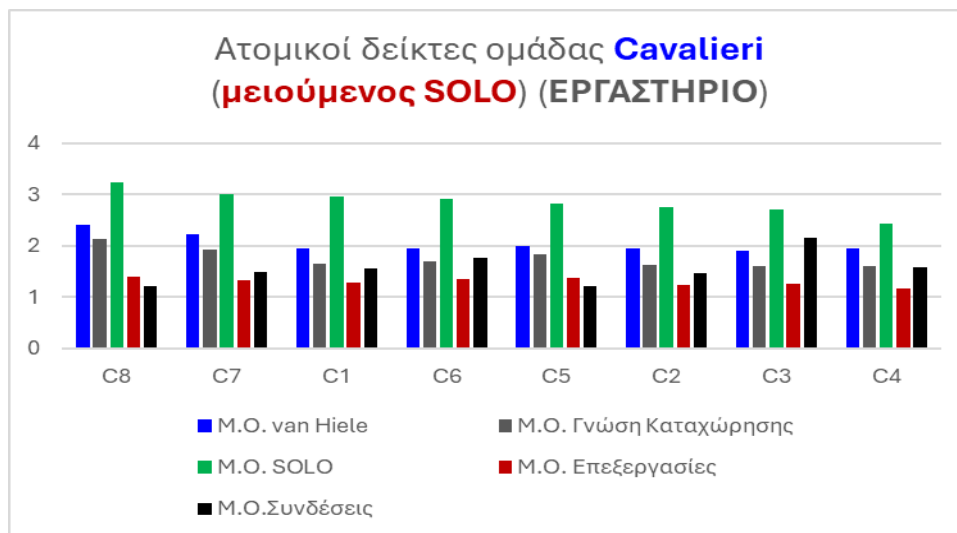
καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και αρκετές φορές ερμηνεύοντας τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{\text{Γνώση Καταχώρησης}}=1,4$). Επίσης, εστιάζει τις περισσότερες φορές σε περισσότερες πτυχές χωρίς να τις συνδέει μεταξύ τους ($M_{\text{SOLO}}=2,7$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τη εκπροσωπούν ($M_{\text{Επεξεργασίες}}=1,3$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου και αρκετές φορές και με άλλους τομείς ($M_{\text{Συνδέσεις}}=1,4$).

C7: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ τους και συλλογισμένος-η επαγωγικά ($M_{\text{vanHiele}}=2,1$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και αρκετές φορές ερμηνεύοντας τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{\text{Γνώση Καταχώρησης}}=1,5$). Επίσης, εστιάζει σε περισσότερες πτυχές χωρίς να τις συνδέει μεταξύ τους ($M_{\text{SOLO}}=3$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και αρκετές φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τη εκπροσωπούν ($M_{\text{Επεξεργασίες}}=1,5$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου και συχνά και με άλλους τομείς ($M_{\text{Συνδέσεις}}=1,6$).

C8: Αναλύει τα δεδομένα αναγνωρίζοντας γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων χωρίς να αναγνωρίζει συνήθως σχέσεις μεταξύ τους και συλλογισμένος-η επαγωγικά και σε στάδιο μετάβασης στο επίπεδο αφαίρεσης ($M_{\text{vanHiele}}=2,4$), καταχωρώντας τις αναπαραστάσεις και ερμηνεύοντας τον αντίστοιχο τομέα που αναπαριστούν ($M_{\text{Γνώση Καταχώρησης}}=1,9$). Επίσης, εστιάζει σε περισσότερες πτυχές και συνήθως δεν τις συνδέει μεταξύ τους ($M_{\text{SOLO}}=3,2$). Αλληλοεπιδρά με τις αναπαραστάσεις που χειρίζεται και τις περισσότερες φορές αλληλοεπιδρά μαζί τους με βάση τη εκπροσωπούν ($M_{\text{Επεξεργασίες}}=1,6$). Τέλος, συνδέει μεταξύ τους αναπαραστάσεις του ίδιου μητρώου καθώς και με άλλους τομείς ($M_{\text{Συνδέσεις}}=1,6$).



Εικόνα 139: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στην οκταμελή ομάδα Cavalieri (διατεταγμένοι ως προς τον δείκτη van Hiele)



Εικόνα 140: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στην οκταμελή ομάδα Cavalieri (διατεταγμένοι ως προς τον δείκτη SOLO)

(B) Περιγραφή των αποτελεσμάτων κάθε ομάδας στο ερευνητικό υποερώτημα 1/a

➤ (Επίπεδα γεωμετρικής γνώσης van Hiele για την ομάδα van Schooten)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «*Wilcoxon signed rank*» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '3' που αντιστοιχεί με το 3^ο επίπεδο van Hiele. Ο στατιστικός έλεγχος *Wilcoxon signed rank* φάνέρωσε ότι η τιμή $\delta = 2,3$ είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 3$. Άρα δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση για την διάμεσο να αντιστοιχεί στο 3ο γνωστικό επίπεδο van Hiele (αφαιρετικό γνωστικό επίπεδο) αλλά σύμφωνα με την διάμεσο $\delta = 2,3$, οι απαντήσεις των μαθητών βρίσκονται πλησίον του 2^{ου} γνωστικού επιπέδου van Hiele που μπορεί να ερμηνευθεί ότι αναγνωρίζουν ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων ή των μαθηματικών μηχανισμών με τάση μετάβασης στο να αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ αυτών των ιδιοτήτων. Επίσης είναι σε θέση να συλλογισθούν επαγωγικά όχι όμως παραγωγικά. Δημιουργούνται επιχειρήματα και αποδείξεις και κατανοούνται συνθήκες που οδηγούν στη σύνταξη συνοπτικών ορισμών ή περιγραφής της δομής του τεχνουργήματος χωρίς όμως να μπορούν να αναπτύξουν τη δική τους παραγωγική απόδειξη (Παράρτημα [17]).

➤ (Επίπεδα γεωμετρικής γνώσης van Hiele για την ομάδα Cavalieri)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «*Wilcoxon signed rank*» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '3' που αντιστοιχεί με το 3^ο επίπεδο van Hiele. Ο στατιστικός έλεγχος *Wilcoxon signed rank* φάνέρωσε ότι η τιμή $\delta = 1,7$ είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 3$. Άρα διαπιστώνεται

διαφοροποίηση από την τιμή '3' που ισοδυναμεί με το 3^ο γνωστικό επίπεδο van Hiele (αφαιρετικό επίπεδο) και σύμφωνα με την διάμεσο της μεταβλητής του δείγματος ($\delta = 1,7$), οι απαντήσεις των μαθητών βρίσκονται πλησίον του 1^{ου} γνωστικού επιπέδου van Hiele που μπορεί να ερμηνευθεί ότι ταξινομούν τα γεωμετρικά σχήματα αρχικά ολιστικά αλλά εξετάζουν συνήθως και τις ιδιότητες που διαθέτουν χωρίς να μπορούν να τις συσχετίσουν, και εμποδίζεται να διαμορφωθούν κάποιοι ορισμοί με τις απαραίτητες και επαρκείς προϋποθέσεις. Δεν προκύπτει επαγωγικός συλλογισμός αν και θα ήταν δυνατόν (Παράρτημα [17]).

(Γ) Περιγραφή των αποτελεσμάτων κάθε ομάδας στο ερευνητικό υποερώτημα 1/β

➤ (Γνώση Καταχώρησης για την ομάδα van Schooten)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «*Wilcoxon signed rank*» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '3' που αντιστοιχεί με το 3^ο επίπεδο «γνώσης καταχώρησης μητρώου-τομέα» (ΓΜΤΚ). Ο στατιστικός έλεγχος *Wilcoxon signed rank* φανέρωσε ότι η τιμή $\delta = 1,8$ είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 3$. Άρα δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση για την διάμεσο να αντιστοιχεί στο 3^ο γνωστικό επίπεδο «γνώσης μητρώου-τομέα καταχώρησης» (ΓΜΤΚ), αλλά σύμφωνα με την διάμεσο της μεταβλητής του δείγματος ($\delta = 1,8$), οι μαθητές βρίσκονται πλησίον του 2^{ου} γνωστικού επιπέδου γνώσης «τομέα καταχώρησης» μιας αναπαράστασης (ΓΤΚ) που μπορεί να ερμηνευθεί πως καταχωρούν τους διαφόρους χαρακτήρες, τελεστές, συμβάσεις και κανόνες της κάθε αναπαράστασης ή χαρακτηριστικά ενός τεχνουργήματος, με ισχυρή τάση μετάβασης προς το 2^ο γνωστικό επίπεδο καταχώρησης του τομέα που αναπαρίσταται και με τον οποίο συνδέονται οι καταχωρήσεις σε κάποιο μητρώο (Παράρτημα [17]).

➤ (Γνώση Καταχώρησης για την ομάδα Cavalieri)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «*Wilcoxon signed rank*» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '3' που αντιστοιχεί με το 3^ο επίπεδο «γνώσης μητρώου-τομέα καταχώρησης» (ΓΤΜΚ). Ο στατιστικός έλεγχος *Wilcoxon signed rank* φανέρωσε ότι η τιμή $\delta = 1,3$ είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 3$. Άρα δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση για την διάμεσο να αντιστοιχεί στο 3^ο γνωστικό επίπεδο καταχώρησης μιας αναπαράστασης (ΓΜΤΚ) αλλά σύμφωνα με την διάμεσο $\delta = 1,3$, οι απαντήσεις των μαθητών βρίσκονται στο 1^ο γνωστικό επίπεδο «γνώσης μητρώου καταχώρησης» μιας αναπαράστασης (ΓΜΚ) κατανοώντας τους διαφόρους χαρακτήρες, τελεστές, συμβάσεις και κανόνες της κάθε αναπαράστασης ή χαρακτηριστικά ενός τεχνουργήματος, με τάση μετάβασης προς το 2^ο γνωστικό επίπεδο (ΓΤΚ) που αφορά τους αναπαριστώμενους τομείς (Παράρτημα [17]).

(Δ) Περιγραφή των αποτελεσμάτων κάθε ομάδας στο ερευνητικό υποερώτημα 1/γ

➤ (Επίπεδα δραστηριοτήτων SOLO για την ομάδα van Schooten)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «*Wilcoxon signed rank*» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '4' που αντιστοιχεί με το 4^ο δείκτη δραστηριότητας της ταξινόμησης SOLO. Ο στατιστικός έλεγχος *Wilcoxon signed rank* φανέρωσε ότι η τιμή $\delta = 3,4$ είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 4$. Άρα δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση για την διάμεσο να αντιστοιχεί στο 4^ο σχετικιστικό επίπεδο κατανόησης της ταξινόμησης SOLO, αλλά σύμφωνα με την διάμεσο $\delta=3,4$, οι απαντήσεις των μαθητών βρίσκονται στο 3^ο επίπεδο της (πολυδομική δραστηριότητα) που μπορεί να ερμηνευθεί πως οι απαντήσεις τους επικεντρώνονται σε πολλές σχετικές πτυχές του προβλήματος, αλλά αυτές οι πτυχές αντιμετωπίζονται ασύνδετα και προσθετικά. Επίσης διακρίνεται και τάση μετάβασης προς το σχετικιστικό επίπεδο κατανόησης αρχίζοντας να συσχετίζουν και να εξηγούν με όρους αίτιου και αποτελέσματος (Παράρτημα [17]).

➤ (Επίπεδα δραστηριοτήτων SOLO για την ομάδα Cavalieri)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «*Wilcoxon signed rank*» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '4' που αντιστοιχεί με το 4^ο δείκτη δραστηριότητας της ταξινόμησης SOLO. Ο στατιστικός έλεγχος *Wilcoxon signed rank* φανέρωσε ότι η τιμή $\delta = 2,7$ είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 4$. Άρα απορρίπτεται η υποθετική τιμή 4 για την διάμεσο η οποία αντιστοιχεί στον 4^ο σχετικιστικό επίπεδο κατανόησης της ταξινόμησης SOLO, αλλά σύμφωνα με την διάμεσο $\delta = 2,7$, οι απαντήσεις βρίσκονται στο του 2^ο επίπεδο κατανόησης της ταξινόμησης SOLO (μονοδομικό επίπεδο), που μπορεί να ερμηνευθεί πως οι απαντήσεις τους των μαθητών επικεντρώνονται σε μία πτυχή του προβλήματος, με σημαντική τάση μετάβασης προς το πολυδομικό επίπεδο όπου επικεντρώνονται συνήθως σε περισσότερες τις μίας πτυχές του προβλήματος, ασύνδετα, και είναι τις περισσότερες φορές σε θέση να ταξινομούν, να συνδυάζουν, να εφαρμόζουν μεθόδους και να εκτελούν διαδικασίες (Παράρτημα [17]).

(Ε) Περιγραφή των αποτελεσμάτων κάθε ομάδας στο ερευνητικό υποερώτημα 1/δ

➤ (Επεξεργασίες για την ομάδα van Schooten)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «*Wilcoxon signed rank*» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '2' που αντιστοιχεί με στο 2^ο επίπεδο «σημασιολογικής επεξεργασίας» των αναπαραστάσεων). Ο στατιστικός έλεγχος *Wilcoxon signed rank* φανέρωσε ότι η τιμή $\delta = 1,5$ είναι στατιστικώς σημαντικά

μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 2$. Άρα δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση για την διάμεσο να αντιστοιχεί στο 2^ο επίπεδο επεξεργασίας των αναπαραστάσεων, αλλά σύμφωνα με την διάμεσο $\delta = 1,5$ οι απαντήσεις αντιστοιχούν στον 1^ο επίπεδο επεξεργασίας των αναπαραστάσεων (συντακτική επεξεργασία) που μπορεί να ερμηνευθεί πως αλληλοεπιδρούν με μια αναπαράσταση ή με ένα τεχνούργημα, με άμεσο χειρισμό των τοπικών συμβόλων ή εξαρτημάτων χωρίς αναφορά στο νόημα της ιδέας που αναπαρίσταται. Όμως παρατηρείται και τάση μετάβασης προς το 2^ο επίπεδο σημασιολογικής επεξεργασίας των αναπαραστάσεων και μηχανικών εργαλείων που διαμεσολαβούν (Παράρτημα [17]).

➤ (Επεξεργασίες για την ομάδα Cavalieri)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «*Wilcoxon signed rank*» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '2' που αντιστοιχεί με στο 2^ο επίπεδο σημασιολογικής επεξεργασίας των αναπαραστάσεων). Ο στατιστικός έλεγχος *Wilcoxon signed rank* φανέρωσε ότι η τιμή $\delta = 1,3$ είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 2$. Άρα δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση για την διάμεσο να αντιστοιχεί στο αντιστοιχεί στο 2^ο επίπεδο σημασιολογικής επεξεργασίας των αναπαραστάσεων, αλλά σύμφωνα με την διάμεσο $\delta = 1,3$ οι απαντήσεις αντιστοιχούν στον 1^ο επίπεδο επεξεργασίας των αναπαραστάσεων (συντακτική επεξεργασία) που μπορεί να ερμηνευθεί πως αλληλοεπιδρούν με μια αναπαράσταση ή με ένα τεχνούργημα, με άμεσο χειρισμό των τοπικών συμβόλων ή εξαρτημάτων χωρίς αναφορά στο νόημα της ιδέας που αναπαρίσταται. Όμως παρατηρείται και τάση μετάβασης προς το 2^ο επίπεδο σημασιολογικής επεξεργασίας των αναπαραστάσεων αλλά και μηχανικών εργαλείων που διαμεσολαβούν (Παράρτημα [17]).

(ΣΤ) Περιγραφή των αποτελεσμάτων κάθε ομάδας στο ερευνητικό υποερώτημα 1/ε

➤ (Συνδέσεις για την ομάδα van Schooten)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «*Wilcoxon signed rank*» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '3' που αντιστοιχεί στο 3^ο δείκτη συνδέσεων. Ο στατιστικός έλεγχος *Wilcoxon signed rank* φανέρωσε ότι η τιμή $\delta = 1,6$ είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 2$. Άρα δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση για την διάμεσο να αντιστοιχεί στο αντιστοιχεί στο 3^ο δείκτη μικτών συνδέσεων των αναπαραστάσεων, αλλά σύμφωνα με την διάμεσο $\delta = 1,6$ οι απαντήσεις αντιστοιχούν στον 1^ο δείκτη ισομορφικών συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων διαφορετικών μητρώων και παρατηρείται και τάση μετάβασης προς το 2^ο δείκτη υπερβατικών συνδέσεων μεταξύ των αναπαριστάμενων τομέων αλλά και μηχανικών εργαλείων που διαμεσολαβούν (Παράρτημα [17]).

➤ (Συνδέσεις για την ομάδα Cavalieri)

Εφαρμόστηκε μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου «Wilcoxon signed rank» για την διερεύνηση της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης από την τιμή '3' που αντιστοιχεί στο 3^ο δείκτη συνδέσεων. Ο στατιστικός έλεγχος Wilcoxon signed rank φανέρωσε ότι η τιμή $\delta = 1,4$ είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερη από την τιμή $\delta = 3$. Άρα δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση για την διάμεσο να αντιστοιχεί στο 3^ο επίπεδο των «μεικτών συνδέσεων» των αναπαραστάσεων, αλλά σύμφωνα με την διάμεσο $\delta = 1,4$ οι απαντήσεις αντιστοιχούν στο 1^ο επίπεδο των «ισομορφικών συνδέσεων» μεταξύ αναπαραστάσεων διαφορετικών μητρώων, και παρατηρείται και τάση μετάβασης προς το 2^ο επίπεδο των «υπερβατικών συνδέσεων» μεταξύ των αναπαριστάμενων τομέων αλλά και μηχανικών εργαλείων που διαμεσολαβούν (Παράρτημα [17]).

(Ζ) Περιγραφή των αποτελεσμάτων κάθε ομάδας στο ερευνητικό υποερώτημα 1/στ

Λόγω κυρίως των ποιοτικών και κατ'έπекταση μη συνεχών μεταβλητών της έρευνας, πραγματοποιήθηκε μη παραμετρικός έλεγχος Kendall's tau_b, για την ανίχνευση σχέσεων μεταξύ τους. Έγινε έλεγχος συσχέτισης μεταξύ κάθε δείκτη «γνωστικού επιπέδου» και κάθε δείκτη «επιπέδου κατανόησης μέσω δραστηριοτήτων». Τα δεδομένα αν και κατατάχθηκαν βάσει του ποσοτικού χαρακτηρισμού τους, οι αποστάσεις μεταξύ τους έχουν χάσει την σημασία τους. Αξιολογήθηκε η σειρά συμμετοχής (rank) στην πρώτη μεταβλητή σε σχέση με την σειρά στην δεύτερη μεταβλητή. Τα αποτελέσματα συσχέτισης κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής (Κατσίης, Σιδερίδης και Εμβαλωτής, 2010):

- 0,00 – 0,20 Μηδενική συσχέτιση
- 0,21 – 0,40 Μικρή συσχέτιση
- 0,41 – 0,60 Μέτρια συσχέτιση
- 0,61 – 0,80 Ισχυρή συσχέτιση
- > 0,81 Πολύ ισχυρή συσχέτιση

Συσχέτιση «van Hiele» & «SOLO» για την ομάδα van Schooten

Παρατηρείται ότι ο συντελεστής συσχέτισης Kendall's tau_b είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο δείκτες έχουν μέτρια θετική συσχέτιση. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην Γεωμετρία ή στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που ενυπάρχουν σε ένα τεχνούργημα συσχετίζεται μέτρια και θετικά με την κατανόηση μέσω αλγεβρικών

δραστηριοτήτων αυξανόμενης πολυπλοκότητας όπου διαμεσολαβεί το εν λόγω τεχνούργημα (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «van Hiele» & «Επεξεργασίες» για την ομάδα van Schooten

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης *Kendall's tau_b* είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο δείκτες έχουν πολύ ισχυρή θετική συσχέτιση και δημιουργείται ο προβληματισμός κάποιας αιτιώδους σχέσεως μεταξύ των δύο μεταβλητών και μήπως τελικά μετρούν θεωρητικά το ίδιο φαινόμενο.

Μπορεί να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην Γεωμετρία ή στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που ενυπάρχουν σε ένα τεχνούργημα έχει πολύ ισχυρή και θετική συσχέτιση με την επεξεργασία των αλγεβρικών αναπαραστάσεων συντακτικά και σημασιολογικά όπου διαμεσολαβεί το εν λόγω τεχνούργημα (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «van Hiele» & «Συνδέσεις» για την ομάδα van Schooten

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης *Kendall's tau_b* είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο δείκτες έχουν μέτρια θετική συσχέτιση. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στη Γεωμετρία καθώς και στην γεωμετρία των μαθηματικών μηχανών έχει μέτρια και θετική συσχέτιση με την δυνατότητα σύνδεσης των αναπαραστάσεων εντός του ιδίου μητρώου αλλά και μεταξύ άλλων αναπαριστώμενων περιοχών (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «Γνώση Καταχώρησης » & «SOLO» για την ομάδα van Schooten

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης *Kendall's tau_b* είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο δείκτες έχουν μέτρια-υψηλή θετική συσχέτιση. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην καταχώρηση και ερμηνεία μιας αναπαράστασης ή ενός τεχνουργήματος έχει μέτρια-υψηλή και θετική συσχέτιση με το επίπεδο κατανόησης του μαθητή μέσω αλγεβρικών δραστηριοτήτων αυξανόμενης πολυπλοκότητας και με την διαμεσολάβηση των μηχανισμών (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «Γνώση Καταχώρησης » & «Επεξεργασίες» για την ομάδα van Schooten

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης *Kendall* είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο δείκτες

έχουν πολύ ισχυρή θετική συσχέτιση και δημιουργείται ο προβληματισμός κάποιας αιτιώδους σχέσεως μεταξύ των και μήπως τελικά μετρούν θεωρητικά το ίδιο φαινόμενο.

Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην διαχείριση και καταχώρηση μιας αναπαράστασης ή στην ερμηνεία ενός τεχνουργήματος έχει πολύ ισχυρή θετική συσχέτιση με την ικανότητα του μαθητή να χειρισθεί, να αποκωδικοποιήσει, να κωδικοποιήσει και να συνδυάσει επιλεκτικά αναπαραστάσεις από χαρακτήρες ή σύμβολα ή τεχνουργήματα προκειμένου να ερμηνευτούν σωστά (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «Γνώση Καταχώρησης» & «Συνδέσεις» για την ομάδα van Schooten

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης Kendall είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο μεταβλητές έχουν μέτρια-υψηλή θετική συσχέτιση. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην καταχώρηση και ερμηνεία μιας αναπαράστασης ή ενός μηχανολογικού αντικειμένου έχει μέτρια-υψηλή και θετική συσχέτιση με την ικανότητα συνδέσεων του μαθητή τοπικά και συντακτικά μεταξύ χαρακτηριστικών διαφορετικών αλγεβρικών αναπαραστάσεων ή χαρακτηριστικών ενός μηχανισμού αλλά και μεταξύ μιας αναπαράστασης και άλλων περιοχών που αναπαριστώνται (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «van Hiele» & «SOLO» για την ομάδα Cavalieri

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης Kendall είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο δείκτες έχουν ισχυρή θετική συσχέτιση. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην Γεωμετρία ή στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που ενυπάρχουν σε ένα τεχνούργημα έχει ισχυρή και θετική συσχέτιση με την κατανόηση μέσω αλγεβρικών δραστηριοτήτων αυξανόμενης πολυπλοκότητας όπου διαμεσολαβεί το εν λόγω τεχνούργημα (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «van Hiele» & «Επεξεργασίες» για την ομάδα Cavalieri

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης Kendall είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο μεταβλητές έχουν ισχυρή θετική συσχέτιση. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην Γεωμετρία ή στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που ενυπάρχουν σε ένα τεχνούργημα έχει ισχυρή και θετική συσχέτιση με την επεξεργασία των αναπαραστάσεων συντακτικά και σημασιολογικά καθώς διαμεσολαβεί το εν λόγω τεχνούργημα (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «van Hiele» & «Συνδέσεις» για την ομάδα Cavalieri

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης Kendall είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο δείκτες έχουν ισχυρή θετική συσχέτιση. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στη Γεωμετρία καθώς και στην γεωμετρία των τεχνουργημάτων έχει ισχυρή και θετική συσχέτιση με την δυνατότητα σύνδεσης μεταξύ αναπαραστάσεων αλλά και μεταξύ περιοχών που αναπαριστώνται (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «Γνώση Καταχώρησης» & «SOLO» για την ομάδα Cavalieri

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης Kendall είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο δείκτες έχουν ισχυρή θετική συσχέτιση. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην καταχώρηση και ερμηνεία μιας αναπαράστασης ή ενός τεχνουργήματος έχει ισχυρή και θετική συσχέτιση με την κατανόηση του μαθητή μέσω αλγεβρικών δραστηριοτήτων με την διαμεσολάβηση μηχανισμών και με αυξανόμενη πολυπλοκότητα (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «Γνώση Καταχώρησης» & «Συνδέσεις» για την ομάδα Cavalieri

Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης Kendall είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Οι δύο μεταβλητές έχουν ισχυρή θετική συσχέτιση. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην καταχώρηση και ερμηνεία μιας αναπαράστασης ή ενός τεχνουργήματος έχει ισχυρή και θετική συσχέτιση με την ικανότητα συνδέσεων του μαθητή τοπικά και συντακτικά μεταξύ χαρακτηριστικών διαφορετικών αναπαραστάσεων ή χαρακτηριστικών ενός μηχανισμού αλλά και μεταξύ μιας αναπαράστασης ή του μηχανισμού αυτού και άλλων περιοχών όπως η Γεωμετρία (Παράρτημα [17]).

Συσχέτιση «Γνώση Καταχώρησης» & «Επεξεργασίες» για την ομάδα Cavalieri

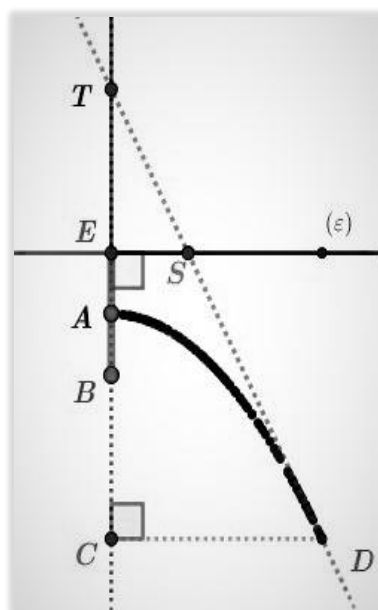
Παρατηρείται πως ο συντελεστής συσχέτισης Kendall είναι στατιστικά σημαντικός και δεν ισχύει η «μηδενική υπόθεση», δηλαδή ότι «οι δύο δείκτες δεν συσχετίζονται». Επομένως, οι δύο μεταβλητές έχουν ισχυρή θετική συσχέτιση. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί πως το γνωστικό επίπεδο του μαθητή στην καταχώρηση και ερμηνεία μιας αναπαράστασης ή ενός τεχνουργήματος έχει ισχυρή και θετική συσχέτιση με την ικανότητα χειρισμού, αποκωδικοποίησης, κωδικοποίησης και συνδυασμού αναπαραστάσεων που διαμεσολαβούν προκειμένου να ερμηνευθούν σωστά (Παράρτημα [17]).

Κατηγορία ερευνητικών ερωτημάτων μαθηματικού περιεχομένου

(Α) Περιγραφή αποτελεσμάτων για το 2^ο ερευνητικό ερώτημα (αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα)

Ο παραβολογράφος του Frans van Schooten μπορεί να λύσει μία συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση. Η επίλυση είναι γεωμετρική και χωρίς να είναι απαραίτητη η αλγεβρική εξίσωση της παραβολής ως προς το συγκεκριμένο σύστημα αξόνων. Το πρόβλημα διατυπώνεται με δύο ισοδύναμους γεωμετρικούς τρόπους, όπου ο δεύτερος χρησιμοποιεί την έννοια του εμβαδού επίπεδου χωρίου.

«Σε μία από δύο κάθετες ευθείες θεωρούμε σημείο B που απέχει σταθερή απόσταση $p = (BE)$ από την άλλη ευθεία. Να χαραχθεί η καμπύλη που ξεκινά από το μέσο A του τμήματος BE και η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο D να είναι τέτοια ώστε η απόσταση του D από την ευθεία που περιέχει το B , να είναι γεωμετρικός μέσος της απόστασης p και της αντίστοιχης υποεφαπτομένης στο σημείο D ως προς την ευθεία που περιέχει το B » (εικόνα 141).



Εικόνα 141 : Διατύπωση αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος παραβολικής καμπύλης

Ισοδύναμα: *«Σε μία από δύο κάθετες ευθείες θεωρούμε σημείο B που απέχει σταθερή απόσταση $p = (BE)$ από την άλλη ευθεία. Να χαραχθεί η καμπύλη που ξεκινά από το μέσο του τμήματος BE και η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο D να είναι τέτοια ώστε το τετράγωνο πλευράς ίσης με την απόσταση του D από την ευθεία που περιέχει το B , να είναι ισεμβαδικό του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με την απόσταση p και την αντίστοιχη υποεφαπτομένη στο D ως προς τη ευθεία που περιέχει το B ».*

(Γ) Περιγραφή των αποτελεσμάτων στο 4^ο ερευνητικό ερώτημα (μηχανολογικό ισοδύναμο των δύο μαθηματικών μηχανών)

Στο 5^ο Κεφάλαιο παρουσιάστηκε η προσάρτηση πάνω στον παραβολογράφο van Schooten του παραβολογράφου Cavalieri αλλά και η αντίστροφη προσάρτηση. Οι μηχανισμοί αυτοί ενσωματώνουν διαφορετικούς ορισμούς της παραβολής αλλά μετά την άρθρωση του ενός πάνω στον άλλο (μέσα από προσομοίωση στο λογισμικό GeoGebra), η ταυτόχρονη λειτουργία και των δύο μηχανισμών παραμένει αμετάβλητη. Έχοντας ως είσοδο, την είσοδο του πρώτου μηχανισμού και με κοινή έξοδο χαράσσεται και από τους δύο μηχανισμούς το ίδιο παραβολικό τόξο.

Από τον ορισμό παραβολής «ίσων αποστάσεων από σημείο και ευθεία» προκύπτει ο ορισμός παραβολής του Απολλώνιου μέσω τομής κώνου από επίπεδο παράλληλο με την γενέτειρά του που πρακτικά αποτελεί τον τετραγωνισμό ορθογωνίων με σταθερή την μία πλευρά τους.

Τελικά οι δύο μηχανισμοί είναι ισοδύναμοι λόγω της κοινής απρόσκοπτης λειτουργίας του και με τους δύο τρόπους. Αυτό επιβεβαιώνει με μηχανολογικό τρόπο την ισοδυναμία των αντιστοίχων ορισμών της παραβολής που ενσωματώνουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^ο

Συμπεράσματα & Συζήτηση

Ο κύριοι στόχοι αυτής της διατριβής ήταν (α) να αναδειχθεί ο λόγος εμφάνισης των μαθηματικών μηχανών ανά τους αιώνες και η συνεισφορά τους στην αντίληψη για τα Μαθηματικά, (β) να πραγματοποιηθεί ανάλυση-προσομοίωση-κατασκευή δύο ιστορικών μαθηματικών μηχανών και να διερευνηθούν οι δυνατότητες τους καθώς και οι επεκτάσεις τους, (γ) να γίνει εισαγωγή μαθηματικών μηχανών στην διδασκαλία μαθητών και μαθητριών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και να αξιολογηθούν σε διάφορες πτυχές που αφορούν το γνωστικό τους επίπεδο καθώς και στο επίπεδο κατανόησης μέσω δραστηριοτήτων απαντώντας στο 1^ο ερευνητικό ερώτημα μέσω των 1/α, 1/β, 1/γ, 1/δ, 1/ε και 1/στ ερευνητικών υπο-ερωτημάτων του, (δ) να απαντηθούν επίσης κάποια ερευνητικά ερωτήματα (2^ο, 3^ο και 4^ο) που συναρτώνται με τις μαθηματικές μηχανές και τα Μαθηματικά, και αποτελούν νέα γνώση.

(α) Η ιστορική διαδρομή για τις μαθηματικές μηχανές στην Αρχαιότητα αλλά και στους επόμενους αιώνες αναδεικνύει στενή σχέση με την ανάπτυξη της Γεωμετρίας, της αναλυτικής Γεωμετρίας, των συναρτήσεων και του Λογισμού. Αποκαλύπτει την γέννηση αλγεβρικής γλώσσας μέσα από μηχανολογικά παραγόμενες γεωμετρικές καμπύλες. Βέβαια αυτά τα ιστορικά εργαλεία έχουν εξαφανιστεί πλέον από το πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά. Μπορεί ο Weierstrass να δημιούργησε μια «γλωσσική επανάσταση» στα Μαθηματικά, αλλά δεν μπορεί και δεν πρέπει να εισαχθεί πρόωρα στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η αναζήτηση των εφαπτόμενων ευθειών σε καμπύλες, η εμβαδομέτρηση περιοχών και τα μήκη τόξων που σχετίζονται με αρκετές καμπύλες μπορούν να αντιμετωπισθούν πιο νωρίς και με γεωμετρικά εργαλεία. Το σημειωτικό δυναμικό του λογισμού εξαρτάται από τη δυνατότητα συσχέτισης των συμβολισμών του με την γεωμετρική εμπειρία που μπορεί να αποκτηθεί από την κατασκευή και τη χρήση μαθηματικών μηχανών και από προσομοιώσεις τους μέσω λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας.

Λόγω της επιστημολογίας των «πολλαπλών αναπαραστάσεων» της Confrey που επηρέασε την έρευνα, έπρεπε να μελετηθούν κάποιοι μηχανισμοί, να γίνει κάποια προσομοίωση τους και αργότερα να κατασκευαστούν και να αποτελέσουν το μέσο σημειωτικής διαμεσολάβησης κατά την διδασκαλία σχετικών εννοιών. Έπρεπε πρώτα να βιώσουμε την δομή και την δράση του εργαλείου και κατά κάποιο τρόπο να «αναδημιουργηθεί» και να γίνει αισθητή η ιστορία του. Έγινε προσπάθεια να μελετηθούν κατά το δυνατόν οι πρωτότυπες πηγές όπου περιγράφονται αυτοί οι μαθηματικοί μηχανισμοί για να αποκτήσει αυθεντικότητα η ανάλυση τους και έγκυρη εμπειρία και χρήση τους.

Η μελέτη της ιστορίας αυτών των μαθηματικών μηχανών καθώς και η σταδιακή ανακατασκευή τους, βοήθησε στην συνέχεια να δημιουργηθεί η «δομή» των αντίστοιχων πειραματικών μαθημάτων. Δεν αφορούσε ένα μάθημα Ιστορίας των Μαθηματικών, ούτε ένα μάθημα διατυπωμένο στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα η οποία χρησιμοποιείται στα σχολεία μας. Δημιουργήθηκε ένας διάλογος μεταξύ του φυσικού και του συμβολικού, μεταξύ της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας, μεταξύ των μηχανισμών και των Μαθηματικών. Οι παραβολογράφοι αντέστρεψαν την ιεραρχία που ακολουθείται σήμερα για την μελέτη των συναρτήσεων. Οι αντιλήψεις για την αναπαράσταση των συναρτήσεων αμφισβητήθηκαν σημαντικά.

(β) Το περιβάλλον του ηλεκτρονικού υπολογιστή και το λογισμικό Μαθηματικών Geogebra εκ των πραγμάτων έπαιξε σημαντικό ρόλο σε αυτήν την έρευνα. Η αρχική αναβίωση των δύο παραβολογράφων έγινε μέσω αυτού του λογισμικού και παράλληλα μελετώντας τις εικόνες από τις πρωτότυπες πηγές. Μέσω του λογισμικού «χτίστηκαν» οι μηχανισμοί κομμάτι-κομμάτι και χωρίς την χρήση των αλγεβρικών δυνατοτήτων του λογισμικού. Η κατασκευή όμως απαιτούσε γεωμετρική διαδικασία αν και στο φυσικό μοντέλο είναι απλούστερη ή φαίνεται απλούστερη, Χαρακτηριστικά παραδείγματα; (α) η κατασκευή των ορθών γωνιών στον παραβολογράφο του Cavalieri που απαιτούσε σε κίνηση μία διαρκώς εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο, και (β) η κατασκευή του ρόμβου στον παραβολογράφο van Schooten που απαιτούσε τομές δύο κύκλων με ίδιες ακτίνες και με τα κέντρα τους ευρισκόμενα πάντα στην ίδια ευθεία η οποία όμως κινείται. Αυτές οι δύο κατασκευές ήταν απλούστερες στο φυσικό μοντέλο. Όμως το Geogebra, ως λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, βασίζεται σε ευκλείδειες έννοιες των ευθειών και των κύκλων, και συνήθως για την προσομοίωση μίας φαινομενικά απλής φυσικής κατασκευής απαιτούνται πολλά επίπεδα «κρυφής» γεωμετρίας. Από την άλλη πλευρά το λογισμικό έκρυψε προβλήματα τριβής και συγκρούσεων και στους δύο μηχανισμούς. Βοήθησε να γίνει ανεμπόδιστα ο σχεδιασμός αλλά και να ερευνηθούν πιθανές επεκτάσεις των μηχανών. Η αρχική προσπάθεια ανάλυσης και κατασκευής των δύο παραβολογράφων αυτής της έρευνας διευκολύνθηκε σημαντικά από το λογισμικό αντικαθιστώντας τις αρχικές μονογραμμικές απεικονίσεις που θα έπρεπε να γίνουν. Ίσως εμφανιστεί κάποτε νέο και απλούστερο λογισμικό που θα προσομοιώνει πιο άμεσα τις μαθηματικές μηχανές.

Όλη αυτή η προσπάθεια ανάλυσης, προσομοίωσης, φυσικής κατασκευής αλλά και επέκτασης των μηχανισμών μέσω του λογισμικού, αποτελεί ένα σημαντικό υλικό που μπορεί να γίνει και υλικό διδασκαλίας για επόμενες έρευνες. Η επίδραση στους μαθητές-τριες της ανάμειξης φυσικών και προσομοιωμένων συσκευών παραμένει προς διερεύνηση. Το μόνο συμπέρασμα είναι ότι θα ήταν πολύ άστοχο να προσεγγισθεί το θέμα της έρευνας αυτής χρησιμοποιώντας

μόνο προσομοιώσεις από λογισμικά, διότι δεν θα βίωναν «χωρικά», «απτικά» καθώς και «σωματικά» τον μηχανισμό.

(γ) Περνώντας στον τρίτο γενικό στόχο, που αφορά το **1^ο ερευνητικό ερώτημα** με τα έξι υποερωτήματα του, η έρευνα αυτή εφαρμόστηκε σε δύο ομάδες μαθητών-τριών με δέκα και οκτώ μέλη αντίστοιχα. Αξιολογήθηκαν οι απαντήσεις τους εστιάζοντας σε δύο γνωστικές πτυχές της κατανόησης καθώς και σε τρεις πτυχές δραστηριότητας και γνωστικής δομής. Όσον αφορά τους δείκτες van Hiele και SOLO, παρατηρήθηκε ότι δεν υπήρχαν περιπτώσεις στα κατώτερα επίπεδα «οπτικοποίησης» και «προδομικό» αντίστοιχα. Επίσης, δεν υπήρχαν περιπτώσεις στα μεγαλύτερα επίπεδα van Hiele «παραγωγής», «αυστηρότητας» και στα μεγαλύτερα επίπεδα SOLO «σχετικιστικό» και «εκτεταμένα αφαιρετικό». Ειδικότερα:

1. Οι μαθητές-τριες με τις χαμηλότερες επιδόσεις αξιολογήθηκαν: (α) στο επίπεδο «Οπτικοποίηση» με τάση μετάβασης στο επίπεδο «Ανάλυση» του δείκτη van Hiele, (β) στο επίπεδο «Γνώση Μητρώου Καταχώρησης» της ταξινόμησης «Γνώση Καταχώρησης», (γ) στο «μονοδομικό» επίπεδο της ταξινόμησης SOLO με τάση να μετακινηθούν στο «Πολυδομικό» επίπεδο, (δ) στο επίπεδο «Συντακτικής Επεξεργασίας» της ταξινόμησης «Επεξεργασίες», (ε) και στο επίπεδο των «Ισομόρφων Συνδέσεων» της ταξινόμησης «Συνδέσεις».
2. Οι μαθητές-τριες με τις υψηλότερες επιδόσεις και στις δύο ομάδες αξιολογήθηκαν: (α) στο επίπεδο «Ανάλυσης» με τάση προς την «Αφαίρεση» του δείκτη van Hiele, (β) στο επίπεδο «Γνώση Τομέα Καταχώρησης» της ταξινόμησης «Γνώση Καταχώρησης» (γ) στο «Πολυδομικό» επίπεδο της ταξινόμησης SOLO με τάση προς το «Σχετικιστικό» επίπεδο, (δ) στο επίπεδο «Συντακτικής επεξεργασίας» στην ταξινόμηση «Επεξεργασίες» με τάση προς το επίπεδο της «Σημασιολογικής επεξεργασίας» και (ε) σχεδόν στο επίπεδο των «Υπερβατικών» συνδέσεων για την ταξινόμηση «Συνδέσεις».

Σε **«ατομικό επίπεδο»**, για τους μαθητές-τριες με τις υψηλότερες επιδόσεις, παρατηρείται ότι ο δείκτης «Συνδέσεις» δεν μπορεί να φθάσει στο επίπεδο των «Μεικτών συνδέσεων», γεγονός που υποδηλώνει ότι υπάρχει δυσκολία στην πραγματοποίηση αμφίδρομων συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων και τομέων. Επίσης, παρόμοια κατάσταση παρατηρείται και για τον δείκτη «Γνώση Καταχώρησης» όπου δεν κατατάσσονται στο επίπεδο «Γνώση Μητρώου & Πεδίου Καταχώρησης», ώστε να υπάρχει η ικανότητα να κατανοήσουν αμφίδρομα πληροφορίες μεταξύ αναπαραστάσεων και αντιστοίχων πεδίων αναφοράς. Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως αποτέλεσμα της μη ισορροπημένης διδασκαλίας Άλγεβρας και Γεωμετρίας.

Σε «ομαδικό επίπεδο», η ομάδα van Schooten είχε καλύτερες «μέσες» και «διάμεσες» επιδόσεις από την ομάδα Cavalieri και στους πέντε δείκτες. Ίσως αυτό το συμπέρασμα συμβαδίζει με το καλύτερο μέσο επίπεδο των μαθητών-τριών της ομάδας van Schooten στους πέντε δείκτες για τα αντίστοιχα μαθήματα της τάξης τους κατά το ίδιο σχολικό έτος (2021-22) και σύμφωνα με τους «φακέλλους» (portfolio) που υπάρχουν στο αρχείο μου (**Παράρτημα [16]**). Πιθανόν όμως να οφείλεται και στο σημειωτικό δυναμικό κάθε μηχανισμού. Συγκεκριμένα:

1. Το θεωρητικό υπόβαθρο της μηχανής Cavalieri μπορεί να θεωρηθεί αρχικά πιο προσιτό από το θεωρητικό υπόβαθρο της άλλης. Συγκεκριμένα είναι λιγότερο απαιτητικό το αρχικό γεωμετρικό στάδιο ανάλυσης της διότι τα όμοια τρίγωνα που χρησιμοποιούνται είναι εμφανή συνεχώς. Αλλά και το πέρασμα στο επόμενο αλγεβρικό στάδιο αναπαράστασης της χαρασσόμενης καμπύλης είναι πιο προσιτό διότι κορυφή $O(0,0)$ και άξονας $y'y$ είναι εμφανή στοιχεία της μηχανής. Όμως, η τελική απόφαση ότι η καμπύλη είναι παραβολή, γίνεται μόνο μέσω της αλγεβρικής εξίσωσης που προκύπτει και έχει διδαχθεί για πρώτη φορά στην Άλγεβρα καθώς και στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Β' Λυκείου. Όμως, γιατί ονομάζεται «παραβολή» και όχι κάτι άλλο, δεν δίνεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα. Για τον λόγο αυτό οι μαθητές-τριες, καθώς δούλεψαν με τα Φ.Ε., καθοδηγήθηκαν στην εύρεση ισεμβαδικού τετραγώνου ενός ορθογωνίου, όπου το ένα «παραβάλλεται» στο άλλο. Τουλάχιστον ανακάλυψαν ότι αυτή η μηχανή «τετραγωνίζει ορθογώνια», εξάγει τετραγωνικές ρίζες και υπολογίζει δυνάμεις δευτέρου βαθμού.
2. Ο μηχανισμός van Schooten «πατάει» εξ' αρχής στην «ισοαποστατική» ιδιότητα και ορισμό της παραβολής. Το αποτέλεσμα ερευνάται γεωμετρικά και αλγεβρικά. Όμως η «γεωμετρία» του μηχανισμού απαιτεί την εργασία σε «μονογραμμική απεικόνιση» όπου σχεδιάζονται η διάμετρος της χαρασσόμενης παραβολής καθώς και ένα συγκεκριμένο ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο μετά εφαρμόζεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Για το πέρασμα στο αλγεβρικό πλαίσιο είναι φανερός ο άξονας $x'x$ αλλά όχι το $O(0,0)$. Η τοποθέτηση του $O(0,0)$ στην κορυφή της χαραχθείσας παραβολής είναι μία επιλογή που επελέγη τυχαία. Όμως, η προκύπτουσα πολωνυμική εξίσωση δεν έχει την απλότητα της αντίστοιχης που προκύπτει από τον μηχανισμό Cavalieri.

Τα αποτελέσματα μπορούν να ταξινομηθούν και να ερμηνευθούν μόνο ποιοτικά. Για τις δύο ομάδες έγινε προσεκτική προσπάθεια συσχέτισης του «γνωστικού τομέα» (van Hiele & Γνώση Καταχώρησης) με τον τομέα των «επιπέδου κατανόησης μέσω δραστηριοτήτων» (SOLO, Επεξεργασίες, Συνδέσεις). Τα δεδομένα κατατάχθηκαν «κατά σειρά» και όχι «κατά απόσταση». Η σειρά συμμετοχής σε μια γνωστική μεταβλητή αξιολογήθηκε σε σχέση με τη

σειρά συμμετοχής σε μια μεταβλητή δραστηριότητας. Παρατηρείται ισχυρή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών με εξαίρεση τις περιπτώσεις: (α) «van Hiele» & «SOLO» για την ομάδα van Schooten όπου έχουμε μέτρια συσχέτιση και (β) «van Hiele» & «Επεξεργασίες» για την ομάδα van Schooten όπου παρατηρείται πολύ δυνατή συσχέτιση και δημιουργεί προβληματισμό μήπως ελέγχεται το ίδιο φαινόμενο. Αυτά τα αποτελέσματα δεν μπορούν να γενικευθούν και αφορούν το συγκεκριμένο δείγμα.

Λόγω του πολύ φτωχού γεωμετρικού υπόβαθρου του αναλυτικού προγράμματος, η παραβολική καμπύλη που μελετήθηκε εμφάνισε πολύ λίγες από τις πάρα πολλές ιδιότητες της. Η «ισοαποστατική» ιδιότητα και ορισμός της παραβολής, είναι κάτι που δίνεται στους μαθητές-τριες της Β' Λυκείου από τα Μαθηματικά θετικού προσανατολισμού, όμως μέσα από ένα «άγνωστο γεωμετρικό παρελθόν» αυτής της ιδιαίτερης καμπύλης. Η παραβολή χρησιμοποιείται άλλοτε αλγεβρικά και άλλοτε γεωμετρικά για την εισαγωγή των μαθητών-τριών σε πολύ βασικά θέματα, όπως (α) η τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού, (β) η δευτεροβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση (γ) η βολή στην Μηχανική και (δ) η εισαγωγή στο ορισμένο ολοκλήρωμα. Όμως η ίδια δεν μελετάται γεωμετρικά πριν χρησιμοποιηθεί σε τόσο σημαντικές ενότητες. Θεωρείται απλά μία δευτεροβάθμια πολυωνυμική ή μία άρρητη συνάρτηση.

Η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές-τριες στην κατανόηση γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων υπογραμμίζει την ανάγκη για μεγαλύτερη έμφαση στην οικοδόμηση μιας σταθερής βάσης γεωμετρικών γνώσεων σε όλα τα σχολικά επίπεδα. Η Β' Λυκείου ίσως είναι επίπεδο που θα έπρεπε να υπήρχε καλύτερο γεωμετρικό υπόβαθρο με δυνατότητες παραγωγικού συλλογισμού για να εισαχθούν φυσιολογικά οι μαθητές-τριες στον Λογισμό της Γ' Λυκείου. Εάν οι εργασίες είναι παρακινητικές και συνδέονται μεταξύ τους οι τομείς της Γεωμετρίας, της Άλγεβρας καθώς και της Μηχανικής, έτσι ώστε για να εμπλακούν οι μαθητές-τριες σε διαρκή επιχειρηματολογία που περιλαμβάνει διατύπωση και αιτιολόγηση εικασιών, θα μπορούσαν να επιτύχουν καλύτερες επιδόσεις. Οι μαθηματικές μηχανές και οι προσομοιώσεις αυτών αποτελούν περιβάλλοντα που συνδέουν την εμπειρική με την παραγωγική συλλογιστική και την προώθηση μιας αποδεικτικής κουλτούρας σε ατομικό καθώς και σε ομαδικό επίπεδο.

(δ) Όσον αφορά τον τέταρτο στόχο που αφορά τα 2^ο, 3^ο και 4^ο **ερευνητικά ερωτήματα** μαθηματικού περιεχομένου:

- Για το 2^ο **ερευνητικό ερώτημα**, διατυπώθηκε γεωμετρικά το «αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα» που επιλύει ο μηχανισμός Frans van Schooten μέσω της εμφανώς αρθρωμένης άκαμπτης ράβδου που ενσωματώνει την εφαπτομένη ευθεία

του χαρασσόμενου παραβολικού τόξου. Απαντήθηκε στα πρότυπα της διατύπωσης των προβλημάτων «de Beaune» και «Perrault». Αναδείχθηκε η μετατροπή του μηχανισμού σε εφαπτομενικογράφο, δηλαδή η εφαπτομένη ευθεία να κατασκευάζει μία «θήκη» της προκύπτουσας καμπύλης.

Αυτό προτάθηκε μέσω του λογισμικού ως «επέκταση» του παραβολογράφου Cavalieri, που αποτελεί μία σχετικά απλή μηχανολογική προσθήκη. Δεν κατασκευάστηκε το αντίστροφο εφαπτομενικό πρόβλημα για τον παραβολογράφο Cavalieri και αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

- Για το **3^ο ερευνητικό ερώτημα**, λαμβάνοντας ως δεδομένο την εύρεση της καμπυλότητας μέσω Διαφορικής Γεωμετρίας, επιβεβαιώθηκε μία εικασία για την ακτίνα του μεγίστου εφαπτόμενου κύκλου σε τυχαίο σημείο του παραβολικού τόξου. Τελικά, μέσα από εμφανή μέλη του μηχανισμού Frans van Schooten υπολογίζεται η εν λόγω ακτίνα της οποίας ο αντίστροφος αριθμός αποτελεί και την τοπική καμπυλότητα της παραβολής, η οποία διαρκώς αλλάζει, όπως συμβαίνει και στην έλλειψη και την υπερβολή. Το ίδιο ερώτημα για τον παραβολογράφο Cavalieri αποτελεί επίσης αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.
- Σχετικά με το **4^ο ερευνητικό ερώτημα** του μηχανολογικού ισοδύναμου των δύο αυτών μαθηματικών μηχανών, απαντήθηκε και κατασκευάστηκε σχετική προσομοίωση. Ουσιαστικά επιβεβαιώθηκαν ως ισοδύναμοι οι δύο ορισμοί της παραβολής που ενσωματώνουν οι δύο πλέον μηχανολογικά ισοδύναμοι μηχανισμοί.

ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΤΟΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΔΙΑΛΟΓΟ

- Η παρούσα έρευνα εξελίχθηκε ταυτοχρόνως σε τέσσερις «συνιστώσες»: την Ιστορία των Μαθηματικών, την Μηχανολογία, τα Μαθηματικά και την Διδακτική των Μαθηματικών. Δεν ήταν δυνατόν να παρουσιασθούν όλα τα ευρήματα. Η «ώσμωση» των τεσσάρων επιστημονικών περιοχών αναδεικνύει δυναμικά την κάθε επιστημονική περιοχή και κινητοποιεί το ενδιαφέρον. Η μαθηματική μηχανή αποτελεί το κέντρο αυτής της έρευνας, κινητοποιεί και αναγκάζει να αναδειχθούν έννοιες που είναι ενσωματωμένες. **Όλα ξεκινούν και καταλήγουν στην μαθηματική μηχανή.**
- Η προσπάθεια μελέτης του επιπέδου κατανόησης των μαθητών-τριών η οποία εφαρμόστηκε στην έρευνα αποτελεί έναν **«πολύπτυχο μεγεθυντικό φακό αξιολόγησης»**. Αυτή η αξιολόγηση αναδεικνύει και βελτιώνει και τους εκπαιδευτικούς διότι αντιμετωπίζουν κάθε μαθητή-τρια σε συγκεκριμένα επίπεδα. Αναδεικνύονται πτυχές κατανόησης των παιδιών που χρήζουν λεπτομερούς προσοχής ενώ είναι χαμένες ή τουλάχιστον «μπερδεμένες μεταξύ τους».

Ως είδος έρευνας, μπορεί να πλαισιωθεί από ερευνητικές φάσεις «πριν και μετά» και να παραχθούν ισχυρότερα συμπεράσματα.

- Η απάντηση του **«αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος»**, ο υπολογισμός της **«τοπικής καμπυλότητας»** μέσα από την μηχανή καθώς και το **«μηχανολογικό ισοδύναμο»** των δύο ορισμών της παραβολής, σαφώς αποτελούν νέα πρόταση στον διάλογο.

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

- Οι πρωτότυπες πηγές ήταν δυσανάγνωστες αλλά κρύβουν «πλούτο». Ήταν δύσκολη η μετάφραση από τα Λατινικά στον Descartes και τον van Schooten ή από τα «παλαιά» Ιταλικά στον Cavalieri.
- Η (ανα)κατασκευή των τριών μηχανισμών ήταν αρκετά περίπλοκη και κοπιαστική διαδικασία. Χρησιμοποιήθηκε η τρισδιάστατη εκτύπωση για τον πρώτο μηχανισμό van Schooten αφού σχεδιάστηκε στο Geogebra και μετά στο μηχανολογικό AutoCAD. Το αποτέλεσμα ήταν μικρού μεγέθους που δεν επέτρεπε μετρήσεις ακριβείας και το υλικό ήταν ευαίσθητο.
- Η (ανα)κατασκευή του δεύτερου μεγαλύτερου μηχανισμού van Schooten από πιο σταθερά υλικά, με αρθρώσεις εμφανείς και γερές, όσο απαραίτητη τόσο δύσκολη ήταν να πραγματοποιηθεί, αναζητώντας εκ νέου σχεδιαστή μηχανολογικού AutoCAD καθώς και ειδικό μηχανουργό.
- Όσον αφορά την (ανα)κατασκευή του μηχανισμού Cavalieri πραγματοποιήθηκε μόνο με οδηγό τον σχεδιασμό του στο Geogebra και τα υπόλοιπα βήματα ήταν εμπειρικά και χωρίς τα σύγχρονα εργαλεία ενός μηχανουργού.
- Πρέπει επίσης να τονισθούν οι δυσκολίες πραγματοποίησης των δύο πειραματικών διδασκαλιών, που είχαν σχέση με την ταυτόχρονη λειτουργία του σχολείου και την έξοδο των μαθητών-τριών από την συνήθη ροή του ωρολογίου προγράμματος. Όσο και αν ο σχεδιασμός ήταν δελεαστικός για όσους και όσες συμμετείχαν εθελοντικά, πάντα υπήρχε μία δυσπιστία για την αξία του εγχειρήματος και την σύνδεσή του με τις απαιτήσεις των Πανελλαδικών εξετάσεων που θα είχαν σε ένα έτος. Δυστυχώς επικρατεί το «αλγεβρικό» καθεστώς κατά το τρέχον Αναλυτικό Πρόγραμμα και έχει εμποτίσει την Ελληνική κοινωνία.
- Τέλος, πρέπει να αναφέρω ότι η έρευνα όλα αυτά τα έτη, έγινε χωρίς ιδιαίτερη επάρκεια χρόνου λόγω επαγγελματικών υποχρεώσεων στο σχολείο.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

- Η διατύπωση του αντιστρόφου εφαπτομενικού προβλήματος μέσω του παραβολογράφου Cavalieri.
- Η κατασκευή του πλήρους παραβολογράφου Cavalieri που θα χαράσσει συμμετρικό τόξο.
- Η επέκταση του τρισδιάστατου παραβολογράφου Cavalieri που θα «εμβαδομετρεί» το παραβολικό χωρίο μέσω «ογκομέτρησης» τετραέδρου και σύμφωνα με τα «αδιαίρετα» του Cavalieri.
- Ο υπολογισμός της τοπικής καμπυλότητας μέσω του παραβολογράφου Cavalieri.
- Η αλγεβρική αναπαράσταση των παραβολών που χαράσσουν οι δύο μηχανές τοποθετώντας το σύστημα αξόνων σε διαφορετική θέση.
- Που πρέπει να τοποθετηθούν οι άξονες για να προκύψει, από τους συγκεκριμένους παραβολογράφους, αλγεβρική εξίσωση της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και που τοποθετούνται οι παράμετροι a, b, γ στην μηχανή;
- Εάν δοθεί κάποια καμπύλη πως μπορούν οι μαθητές-τριες να αναγνωρίσουν εάν είναι παραβολή;

Σε αυτήν την έρευνα, οι μηχανές ήταν ήδη κατασκευασμένες. Δεν υπήρχε άλλωστε σχετικός χρόνος και προγραμματισμός για την προσομοίωση και την κατασκευή τους από ομάδα μαθητών. Όμως φέτος έγινε προσπάθεια (ανα)κατασκευής του ευθυγράφου των Peaucellier-Lipkin. Μέσα σε πολύ περιορισμένα χρονικά πλαίσια και εκτός ωρολογίου προγράμματος, κατασκευάστηκαν τρία αντίγραφα του εν λόγω μηχανισμού. Οι μαθητές-τριες παρουσίασαν το εγχείρημα στο 1^ο Μαθη(μα)τικό Συνέδριο Δυτικής Ελλάδος καθώς και κατέθεσαν και σχετικό άρθρο για τις μαθηματικές μηχανές. Στη συνέχεια επισκεφθήκαμε το 6^ο Γυμνάσιο Πάτρας όπου πραγματοποιήθηκε Πειραματική Διδασκαλία με τους μαθητές των δύο σχολείων και με την διαμεσολάβηση των δύο συγκεκριμένων παραβολογράφων. Γίνεται αυτή η αναφορά για να τονισθεί ότι πριν διδαχθούν Μαθηματικά μέσω των μαθηματικών μηχανών είναι πολύ σημαντικό αυτές να κατασκευασθούν από τους μαθητές-τριες και να αναδειχθεί η διαφορά σχεδιασμού και προσομοίωσης από την φυσική κατασκευή. Μπορεί η ανάπτυξη της τεχνολογίας των Η.Υ. και των σχετικών λογισμικών να είναι τεράστια, όμως δεν μπορούν να αντικαταστήσουν την παρουσία του φυσικού αντικειμένου καθώς και την διαδικασία κατασκευής του, όπου αναπτύσσεται η απτική, σωματική και χωρική αντίληψη.

Κλείνοντας, αξίζει να αναφερθεί ως παράδειγμα (μεταξύ πολλών) ο Frans van Schooten ο οποίος το 1646, μέσα σε πολύ δύσκολες κοινωνικές συνθήκες, περιέγραψε ότι η διαγώνιος ράβδος του παραβολογράφου του, αποτελεί την ενσωμάτωση της εφαπτομένης ευθείας σε κάθε σημείο της χαρασσόμενης παραβολής. Δεν το απέδειξε με «άτοπο απαγωγή» αλλά

στηρίχθηκε στην Οπτική και ειδικότερα στο φαινόμενο ανάκλασης του φωτός, κάνοντας σχετική αναφορά στην έρευνα του νεοπλατωνιστή φιλοσόφου και επιστήμονα Vitellionis (1230-1300). Θεώρησε επίσης ότι η καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από απειροελάχιστα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, κάτι που χρησιμοποιήθηκε αργότερα και από τον Leibnitz αλλά και σήμερα από τους μηχανολόγους μηχανικούς. Τελικά, η διεπιστημονική S.T.E.M. προσπάθεια και λογική του van Schooten για την απάντηση ερωτημάτων και επίλυση προβλημάτων θα μπορούσε να αποτελεί ένα ισχυρό παράδειγμα προς τους κατασκευαστές των σύγχρονων Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών σε όλα τα επίπεδα της Εκπαίδευσης.

Αναφορές

- Abakanowicz, A. (1886). *Les Intégraphes* (Gauthier-Villars (Ed.); 1st ed.).
<https://play.google.com/books/reader?id=j489AAAAAYAAJ&pg=GBS.PA10&hl=el&lr=>
- Αγγελόπουλος, Ε. (2007). *Θέλουμε Παιδεία*; Αθήνα: νήσος
- Adu-Gyamfi, K., & Bosse, M. J. (2014). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12, 167-192., 12, 167–192. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x>
- Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Chandler, K. (2017). Student Connections between Algebraic and Graphical Polynomial Representations in the Context of a Polynomial Relation. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(5), 915–938. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9730-1>
- Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Lynch-Davis, K. (2019). Three types of mathematical representational translations: Comparing empirical and theoretical results. *School Science and Mathematics*, 119(7), 396–404. <https://doi.org/10.1111/ssm.12360>
- Agricola, G. (1556) *De Re Metallica Libri XII*, Basel: Frobenius.
- Alexander, A. (2012). “From Voyagers to Martyrs : Towards a Storied History of Mathematics”. In A. Doxiadis & B. Mazur (Eds.), *Circles Disturbed*. Princeton University Press. <https://doi.org/https://link.springer.com/article/10.1007/s10699-017-9523-1>
- Αλεξοπούλου, Ι. (2015). Η αναλυτικοσυνθετική μέθοδος από τον Πλάτωνα μέχρι τις νέες τεχνολογίες (Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία). Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα.
- Allen, C. E., Froustet, M. E., LeBlanc, J. F., Payne, J. N., Priest, A., Reed, J. F., Worth, J. E., Thomason, G. M., Robinson, B., & Payne, J. N. (2000). National Council of Teachers of Mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 29(5), 59. <https://doi.org/10.5951/at.29.5.0059>
- Allman, G. (1889). *THALES TO EUCLID* (University of Ireland (Ed.); 1st ed.). Hodges, Figgis, & Co.
<https://ia902200.us.archive.org/0/items/greekgeometryfro00allm/greekgeometryfro00allm.pdf>
- Andersen, K. (1985). Cavalieri’s method of indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences*, 31(4), 291–367. <https://doi.org/10.1007/BF00348519>
- Ariotti, P.E.: Bonaventura Cavalieri, Marin Mersenne, and the reflecting telescope. *Isis* 66, 302–321 (1975)
- Artobolevskii, I. I. (1964). *Mechanisms for the generation of plane curves* (Academy of Sciences of the U.S.S.R. (Ed.); 1st ed.). <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-009985-9.50008-6>

- Artobolevskii, I. I. (1976). *Mechanisms In Modern Engineering Design Vol 2* (2nd ed.). MIR Publishers Moscow.
<https://archive.org/details/ArtobolevskyMechanismsInModernEngineeringDesignVol22>
- Barrow-Green, J. (2018). An exquisite machine. In Olaus Henrici's harmonic analyser. In Gessner, S., Hashagen, U., Pfeiffer, J., & Tournès, D. (Ed.). *Mathematical Instruments between Material Artifacts and Ideal Machines: Their Scientific and Social Role before 1950. Oberwolfach Reports*, 14(4), 3471–3560. <https://doi.org/10.4171/owr/2017/58>
- Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., Ferri, F., & Garuti, R. (1999). Early approach to theoretical thinking: Gears in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1–3), 67–87. <https://doi.org/10.1023/a:1003707727896>
- Bennett, J. (2011). Early modern mathematical instruments. *Isis; an International Review Devoted to the History of Science and Its Cultural Influences*, 102(4), 697–705. <https://doi.org/10.1086/663607>
- Bennet, J. (2018). Mathematical instruments in Florence: A cataloguing project and its relevance for historians of the sixteenth century. In Gessner, S., Hashagen, U., Pfeiffer, J., & Tournès, D. (Ed.). *Mathematical Instruments between Material Artifacts and Ideal Machines: Their Scientific and Social Role before 1950. Oberwolfach Reports*, 14(4), 3471–3560. <https://doi.org/10.4171/owr/2017/58>
- Berger, E. (1970). New Methods of Synthesis of Mechanisms for Reproducing and Enveloping Curves. In Levitskii, N. (Ed.), *Analysis and Synthesis of Mechanisms* (1st ed.). N.A.S.A. & N.S.F.
https://archive.org/details/nasa_techdoc_19760011374/page/n1/mode/2up
- Berggren J.L. (1986), *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. New York: SpringerVerlag
- Besson, Jacques, Dauphinois. Uniform Title: *Theatrum instrumentorum et machinarum..*
 French Title: *Theatre des instrumens mathematiques et mechaniques de Iaques Besson ... : avec l'interpretation des figures d'icelui / / par François Beroald ; plus en ceste derniere edition ont esté adioustees additions à chacune figure*. Publisher: A Lyon: Par Iaques Chouët, 1596.
- Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-10375-3>
- Biggs, J. (1999). What the student does: Teaching for enhanced learning. *International Journal of Phytoremediation*, 21(1), 57–75. <https://doi.org/10.1080/0729436990180105>
- Biggs, J. (2012). What the student does: Teaching for enhanced learning. *Higher Education Research and Development*, 31(1), 39–55.
<https://doi.org/10.1080/07294360.2012.642839>
- Blasjo, V. (2017). *Transcendental Curves in the Leibnizian Calculus*. Academic Press.

- Bolt, B. (1991). *Mathematics meet Technology* (B. Bolt (Ed.); 1st ed.). Cambridge University Press.
- Borelli, A. (2018). Were early modern optical diagrams mathematical instruments? In Gessner, S., Hashagen, U., Pfeiffer, J., & Tournès, D. (2018). *Mathematical Instruments between Material Artifacts and Ideal Machines: Their Scientific and Social Role before 1950. Oberwolfach Reports*, 14(4), 3471–3560. <https://doi.org/10.4171/owr/2017/58>
- Bos, H. J. M. (1984). Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory; the “construction of equations”, 1637-ca.1750. *Archive for History of Exact Sciences*, 30(3–4), 331–380. <https://doi.org/10.1007/BF00328124>
- Bos, H. J. M. (1987). *Recognition and wonder - Huygens, tractional motion, and some thoughts on the history of mathematics*. 1, 1–21. <https://doi.org/10.1090/hmath/007/01>
- Bos, H. J. M. (1988). Tractional Motion and the Legitimation of Transcendental Curves. *Centaurus*, 31(1), 9–62. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0498.1988.tb00714.x>
- Bos, H. J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction* (G. J. Toomer (Ed.)). Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1515/9780773588202-021>
- Bosse, M., Adu-Gyamfi, K. & Chandler, K. (2014). Students' Differentiated Translation Processes. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 828, 1–28. https://scholar.google.gr/scholar?q=Bossé,+Adu-Gyamfi,+%26+Chandler,+2014&hl=el&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholar
- Bossé, M. J., Lynch-Davis, K., & DeMarte, A. M. (2021). Assessing Analytic Geometry Understanding: Van Hiele, SOLO, and Beyond. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 22(1), 1–23. <https://www.cimt.org.uk/ijmtl/index.php/IJMTL/article/view/274>
- Brown, H. (1868). *507 mechanical movements / Henry T. Brown* (Brown and Seward (Ed.); 1st ed.). Dover. www.doverpublications.com
- Brown, M., Bossé, M., & Chandler, K. (2016). Student Errors in Dynamic Mathematical Environments. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(1), 17(1). <https://doi.org/https://doi.org/10.4256/ijmtl.v17i1.5>
- Burger, W., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterising the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31–48. <https://doi.org/10.2307/749317>
- Bush, V. (1931). The differential analyzer. A new machine for solving differential equations. *Journal of the Franklin Institute*, 212(4), 447–488. [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(31\)90616-9](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(31)90616-9)
- Bush, V. (1936). Instrumental analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42(10), 649–669.

- Bussi, M. G. B., & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 1962, 746–783.
<https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9780203930236>
- Cajori, F. (1894). *A History of Mathematics*. Mac Millan Company.
<https://archive.org/details/ahistorymathema00cajogoog>
- Cajori, F. (1909). *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments* (1st ed.).
http://cs.furman.edu/~chealy/cs273/A_History_of_the_Logarithmic_Slide_Rule.pdf
- Cajori, F. (1922). George Bruce Halsted. *The American Mathematical Monthly*, 29(9), 338–340. https://www.jstor.org/stable/pdf/2298725.pdf?refreqid=fastlydefault%3A123db87e92b786cbc37868e3f7253514&ab_segments=&origin=&initiator=&acceptTC=1
- Cajori, F. (1929). Controversies on mathematics between Wallis, Hobbes, and Barrow. *The Mathematics Teacher*, 22(3), 146-151.
- Camic, P. M., Rhodes, J. E., & Yardley, L. (Eds.). (2003). *Qualitative research in psychology: Expanding perspectives in methodology and design*. American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/10595-000>
- Care, C. (2010). *Technology for Modelling Electrical Analogies, Engineering Practice, and the Development of Analogue Computing* (M. Campbell-Kelly (Ed.); 1st ed.). Springer. doi.org/10.1007/978-3-319-70712-9_1.
- Carpenter, T. P. (1986). Conceptual Knowledge as a Foundation for Procedural Knowledge. In J. Hiebert (Edr.) *Conceptual and Procedural Knowledge*. (pp. 111-132) Hillsdale NJ: L. Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9780203063538>
- Carse, G. & Urquhart, J. (1914). Planimeters. In Horsburgh, M. (Ed.). *The tercentenary exhibition of Napier relics and of books, instruments, and devices for facilitating calculation* (G. Bells (Ed.); 1st ed.). NEILL AND COMPANY, LIMITED, EDINBURGH. <http://www.archive.org/details/cu31924003962127>
- Cavalieri, B. (1632). *Directorium generale uranometricum in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta... [Including:] Tabvla trigonom. Logarithmica*. (1st ed.).
<https://archive.org/details/directorivmgene00cavagoog/page/n2/mode/2up>
- Cavalieri, B. (1632). *Lo specchio ustorio, overo, Trattato delle settioni coniche, et alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora*. (1st ed.).
<https://play.google.com/books/reader?id=ZX64AAAIAAJ&pg=GBS.PA186&hl=el>
- Cavalieri, B. (1635). *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota.pdf* (1st ed.). <https://ia600702.us.archive.org/32/items/ita-bnc-mag-00001345-001/ita-bnc-mag-00001345-001.pdf>

- Cavalieri, B. (1647). *Exercitationes Geometricae sex.pdf* (1st ed.).
<https://ia904702.us.archive.org/18/items/ita-bnc-mag-00001344-001/ita-bnc-mag-00001344-001.pdf>
- Chassapis, D. The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics* 37, 275–293 (1998). <https://doi.org/10.1023/A:1003696507155>
- Chow, J. K., Palmeri, T. J., & Gauthier, I. (2022). Haptic object recognition based on shape relates to visual object recognition ability. *Psychological Research*, 86(4), 1262–1273. <https://doi.org/10.1007/s00426-021-01560-z>
- Confrey, J. (1993). The role of technology in reconceptualizing functions and algebra. *Proceedings of the XV Psychology of Mathematics Education–NA*, 1, 47-74.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86. <http://doi.org/10.2307/749228>
- Confrey, J. (1994). Multiplication and Exponential Functions. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 291.
- Confrey, J. (2012). Learning to see children's mathematics: Crucial challenges in constructivist reform. In *The practice of constructivism in science education* (pp. 299-321). Routledge.
- Clark, A. (2011). Finding the Mind: Book Symposium on Supersizing the Mind: Embodiment, Action, and Cognitive Extension (Oxford University Press, NY, 2008). *Philosophical Studies*, 152(3), 447–461. <https://doi.org/10.1007/s11098-010-9598-9>
- Clarke, V., Braun, V. and Hayfield, N. (2015) Thematic Analysis. In: Smith, J.A., Ed., *Qualitative Psychology: A Practical Guide to Research Methods*, SAGE Publications, London, 222-248.
- Crippa, D., & Milici, P. (2019). A Relationship between the Tractrix and Logarithmic Curves with Mechanical Applications. *Mathematical Intelligencer*, 41(4), 29–34. <https://doi.org/10.1007/s00283-019-09895-7>
- Crowley, M. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and Teaching Geometry, K-12*, 1–16. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=9f3e06ade7f9fd46c2339818ae6b1ee5fa899a5f>
- Dennis, D., & Confrey, J. (1993). The creation of continuous exponents: A study of the methods and epistemology of John Wallis. *Research in Collegiate Mathematics*, 6, 33–60. <https://doi.org/10.1090/cbmeth/006/02>
- Dennis, D. (1995). Historical perspectives for the reform of mathematics curriculum: Geometric curve drawing devices and their role in the transition to an algebraic

- description of functions [Cornell]. In *ProQuest Dissertations and Theses*.
<https://www.quadrivium.info/mathhistory/CurveDrawingDevices.pdf>
- Dennis, D., & Confrey, J. (1995). Functions of a Curve: Leibniz's Original Notion of Functions and Its Meaning for the Parabola. *The College Mathematics Journal*, 26(2), 124. <https://doi.org/10.2307/2687364>
- Dennis, D., & Confrey, J. (1997). Drawing logarithmic curves with Geometer's sketchpad: a method inspired by historical sources. *Geometry Turned on! Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*, 147–156.
<https://quadrivium.info/mathhistory/Log.pdf>
- Dennis, D., & Confrey, J. (2003). Functions of a Curve: Leibniz's Original Notion of Functions and Its Meaning for the Parabola. In M. Anderson, V. Katz, & R. Wilson (Eds.), *Sherlock Holmes in Babylon: And Other Tales of Mathematical History* (Spectrum, pp. 292-296). Mathematical Association of America.
doi:10.5948/UPO9781614445036.040
- Depaepe, M., Herman, F., Surmont, M., Gorp, A. Van, & Simon, F. (2008). Educational Research: the Educationalization of Social Problems. *Educational Research: The Educationalization of Social Problems, January*. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9724-9>
- Descartes, R. (1629). *Regulae ad directionem ingenii*, Vol. X (1908) of *Oeuvres*. English translation by L. J. Lafleur. Indianapolis, Ind.: Bobbs-Merrill, 1964.
- Descartes, R., LATHAM, M. L., & Smith, D. E. (1925). *The Geometry of René Descartes. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. With a Facsimile of the First Edition, 1637.[With a Portrait.]*. Open Court Publishing Company.
<https://ia802207.us.archive.org/5/items/geometryofrene00desc/geometryofrene00desc.pdf>
- Δημαρόγκωνας, Α. (1985). *Στοιχεία Μηχανών με υπολογιστές (CAD)*. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών.
- Dijksterhuis, F. J. (2011). Moving around the ellipse. Conic sections in Leiden, 1620-1660. In S. Dupré, & C. Lüthy (Eds.), *Silent messengers: the circulation of material objects of knowledge in the early modern Low Countries* (pp. 89-124). (Low Countries studies on the circulation of natural knowledge; No. vol. 1). Berlin: LIT.
- Dopper, J. (2014). *A life of learning in Leiden. The mathematician Frans van Schooten (1615–1660)* [GVO drukkers & vormgevers B.V. | Ponsen & Looijen].
<https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/288935>
- Dörrie, H. (2013). *100 great problems of elementary mathematics*. Courier Corporation.

- Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In *Proceedings of the first conference of the european society for research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 125-139).
- Dyck, W. (1892). *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* (G. Olms (Ed.); 1st ed.).
<https://ia801606.us.archive.org/22/items/katalogmathemat00goog/katalogmathemat00goog.pdf>
- Duval, R.: 1995, *Semiosis et Pensee Humaine: Registres semiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang
- Duval, R.: 1998, Geometry from a Cognitive Point of View, In C. Mammana & V. Villani(eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*, Dordrecht: Kluwer.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision And Visualization: Cognitive Functions In Mathematical Thinking. Basic Issues For Learning. *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, 91(2), 266–297.
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Escobar-Castillejos, D., Noguez, J., Neri, L., Magana, A., & Benes, B. (2016). A Review of Simulators with Haptic Devices for Medical Training. *Journal of Medical Systems*, 40(4), 1–22. <https://doi.org/10.1007/s10916-016-0459-8>
- Euler, L. (1855). *Introduction L'Analyse Infinitesimale* (J. Labey (Ed.)). Ecole Polytechnique. <http://www.archive.org/details/introductionla01eule>
- Euler L. & Blanton J. D. (1988-1990). *Introduction to analysis of the infinite*. Springer-Verlag.
- Fereday, J., & Muir-Cochrane, E. (2006). Demonstrating Rigor Using Thematic Analysis: A Hybrid Approach of Inductive and Deductive Coding and Theme Development. *International Journal of Qualitative Methods*, 5(1), 80–92.
<https://doi.org/10.1177/160940690600500107>
- Fischer, J. (2014). *200 Jahre Planimeter. Ein bayerischer Vermesser und seine geniale Idee. 1814- 2014*. Catalogue of the exhibition, May 5 until September 15, 2014 in Munich, M"unchen: Landesamt f"ur Digitalisierung, Breitband und Vermessung, 2014.
- Fisher, J., (2018). The early history of mechanical integration: The first five decades, 1814-1864. In Gessner, S., Hashagen, U., Pfeiffer, J., & Tournès, D. (ed), *Mathematical Instruments between Material Artifacts and Ideal Machines: Their Scientific and Social Role before 1950*.(p.p. 3502-3506) Oberwolfach Reports, 14(4), 3471–3560.
<https://doi.org/10.4171/owr/2017/58>

- Franco, W., Trivella, A., & Quaglia, G. (2020). Mechanism and Machine Science Educational Workshop Based on Schröder-Reuleaux Ancient Models of Politecnico di Torino. *Advances in Historical Studies*, 09(05), 295–311. <https://doi.org/10.4236/ahs.2020.95023>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Springer Science & Business Media.
- Fuys, D., Geddes, D., & Rosamond, T. (1984). English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. *National Science Foundation*, 1, 246–252. <https://eric.ed.gov/?id=ED287697>
- Galileo, G. (1906). *Le Opere di Galileo Galilei* (A. Favaro (Ed.); Vol. 18). <https://archive.org/details/agh6462.0018.001.umich.edu/page/n1/mode/2up>
- Gessner, S., Hashagen, U., Pfeiffer, J., & Tournès, D. (2018). Mathematical Instruments between Material Artifacts and Ideal Machines: Their Scientific and Social Role before 1950. *Oberwolfach Reports*, 14(4), 3471–3560. <https://doi.org/10.4171/owr/2017/58>
- Γκουντουβάς, Σ. (2009). *Το νόημα της κατασκευής στην πορεία εξέλιξης της Γεωμετρίας* [Πανεπιστήμιο Αθηνών]. http://me.math.uoa.gr/dipl/dipl_Goudouvas.pdf
- Gail Jones, M., Minogue, J., Tretter, T. R., Negishi, A., & Taylor, R. (2006). Haptic augmentation of science instruction: Does touch matter? *Science Education*, 90(1), 111–123. <https://doi.org/10.1002/sce.20086>
- Grabiner, J. V. (1995). *Descartes and Problem-Solving*. 2(April), 83–97. https://maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Allendoerfer/1996/0025570x.di021189.02p0130a.pdf
- Guin, D., & Trouche, L. (1998). Complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195–227. <https://doi.org/10.1023/A:1009892720043>
- Guin, D., & Trouche, L. (2002). Umgang der LehrerInnen mit der instrumentalen Genese in CAS-Umgebungen: Notwendigkeit von instrumentalen Orchestrierungen. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 34(5), 204–211. <https://doi.org/10.1007/BF02655823>
- Gulikers, I., & Blom, K. (2001). “A historical angle”, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 223–258. <https://doi.org/10.1023/A:1014539212782>
- Haviger, J., & Vojtkůvková, I. (2014). The Van Hiele Geometry Thinking Levels: Gender and School Type Differences. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 112(May), 977–981. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.1257>
- Hazard, J. (2007). Claude Perrault, architecte celebre, medecin meconnu, chercheur infatigable. *Histoire des sciences médicales*, 41(4), 399.

- Heath T. L., (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Από τον Θαλή στον Ευκλείδη* (μτφ. Α. Αγγελή, Ε. Βλάμου, Θ. Γραμμένος, Α. Σπανού). Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1921).
- Heersmink, R. (2021). Varieties of Artifacts: Embodied, Perceptual, Cognitive, and Affective. *Topics in Cognitive Science*, 13(4), 573–596. <https://doi.org/10.1111/tops.12549>
- Heath T. L., (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Από τον Αρίσταρχο στον Διόφαντο* (μτφ. Α. Αγγελή, Ε. Βλάμου, Θ. Γραμμένος, Α. Σπανού). Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1921).
- Heidegger, M. (1962). *Sein und Zeit*, trans. by: J. Macquarrie & E. Robinson, Being and time. Oxford, UK & Cambridge, USA: Blackwell Publishers Ltd. (Original work published 1927)
- Hiebert, J. (1988). A Theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 333–355. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF00312451>
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123–134. [https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(99\)80064-9](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(99)80064-9)
- Hofmann, J. E. (1962). *Frans van Schooten der jüngere* (Wiesbaden)
- Holloway, I., & Todres, L. (2003). The status of method: flexibility, consistency and coherence. *Qualitative Research*, 3(3), 345–357. https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1468794103033004?casa_token=EbTUWf_qD14AAAAA:zBG7zebG_FFAqOBeiHXukYQ7MUR12eI3CJxkSE-Up2MdhjTQU_Isw_fVcdXaN3DEmqRJMNZmlqjt3w
- Horsburgh, M. (1914). *The tercentenary exhibition of Napier relics and of books, instruments, and devices for facilitating calculation* (G. Bells (Ed.); 1st ed.). NEILL AND COMPANY, LIMITED, EDINBURGH. <http://www.archive.org/details/cu31924003962127>
- Huygens, C. (1693), Letter to H. Basnage de Beauval, February 1693, Oeuvres (vol. 10, pp. 407- 422). Printed in Histoire des ouvrages des sçavants (or Journal de Rotterredam), pp. 244-257.
- Isoda, M. (1998). Developing the Curriculum for Curves Using History and Technology. *Electronic Proceedings of the 3rd Asian Technology Conference in Mathematics*, 82–89. <https://www.atcm.mathandtech.org/EP/1998/ATCMP047/paper.pdf>
- Jacob, L. (1911). *Calcul mécanique* (M. Docagne (Ed.); 1st ed.). Doin & Fills. <https://ia601407.us.archive.org/4/items/lecalculmecaniqu00doca/lecalculmecaniqu00doca.pdf>

- Kaput, J. J. (1987a). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics* (pp. 19–26). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J. J. (1987b). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 159–195). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A Kaleidoscope of James J. Kaput Department of Mathematics University of Massachusetts at Dartmouth. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 265–281.
[https://doi.org/10.1016/s0364-0213\(99\)80062-7](https://doi.org/10.1016/s0364-0213(99)80062-7)
- Κατσής, Α., Σιδερίδης, Γ., & Εμβαλωτής, Α. (2010). *Στατιστικές Μέθοδοι στις Κοινωνικές Επιστήμες*. Αθήνα: Τόπος.
- Kempe, A. B. (1876). On a General Method of describing Plane Curves of the n th degree by Linkwork. IV(1), 213–216
- Kempe, A. B. (1877). *How to Draw a Straight Line A Lecture on Linkages* (1st ed.). MacMillan and Co.
- Κηπουρός Χ. «*Ηρώνας Αλεξανδρέως Μετρικά – Διόπτρα*» Ε.Μ.Ε. 2000
- Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001/α). *Ενκλείδη “Στοιχεία” τόμος Ι* (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (Ed.); 1η). Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.
<https://drive.google.com/file/d/1iDf5axmUJFwWNih8dyw91ju6DcdztINl/view>
- Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001/β). *Ενκλείδη “Στοιχεία” τόμος 2* (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (Ed.); 1η).
<https://drive.google.com/file/d/1iDf5axmUJFwWNih8dyw91ju6DcdztINl/view?pli=1>
- Kilpatrick, J. (2013). Introduction to section D: International perspectives on mathematics education. *Third International Handbook of Mathematics Education, January 2013*, 791–795. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2>
- Kinnison, T., Forrest, N. D., Freaan, S. P., & Baillie, S. (2009). Teaching bovine abdominal anatomy: Use of a haptic simulator. *Anatomical Sciences Education*, 2(6), 280–285.
<https://doi.org/10.1002/ase.109>
- Klein, F. (1897). *Famous problems of elementary geometry* (W. Beman & D. Smith (Eds.)). Ginn and Company.
<https://dn790009.ca.archive.org/0/items/famousproblemse00kleigoog/famousproblemse00kleigoog.pdf>
- Kleritj, L. (1897). Tractoriograph und Construction der transcendenten Zahlen “ π ” und “ e ”, sowie Construction der n -seitigen, dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Polygone. *Dinglers polytechnisches Journal*, 305, 234–237, 260–263.
- Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών. *2ο Συνέδριο Για Τα Μαθηματικά Στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*, 3–19.

- Κολέζα Ευγενία, (2022). ΑΝ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΤΕΧΝΟΥΡΓΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΝΑΙ Η ΑΠΑΝΤΗΣΗ, ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ Η ΕΡΩΤΗΣΗ; Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ., σελ. 70-78
- Lenoir, T. (1979). Descartes and the geometrization of thought: The methodological background of Descartes' géométrie. *Historia Mathematica*.
[https://doi.org/10.1016/0315-0860\(79\)90023-5](https://doi.org/10.1016/0315-0860(79)90023-5)
- Mariotti, M. A. (2002). Influence of technologies advances on students' math learning. *Handbook of International Research in Mathematics Education, May*, 757–786.
<https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=eb34febfac67d2decf6e828638c076e08dbea5da>
- Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: How the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 45(3), 441–452. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0495-5>
- Mariotti, M. A., & Maffia, A. (2018). From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula*, 4, 50–63. <https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3.1>
- Μαυρομάτης, Α. (1985). Θεωρία Μηχανισμών και Μηχανών. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.
- McKernan, J. (1996). *Curriculum action research: A handbook of methods and resources for the reflective practitioner* (Kogan Page Limited (Ed.); 2nd ed.). Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9781315041742>
- Milici, P. (2015). A Geometrical Constructive Approach to Infinitesimal Analysis: Epistemological Potential and Boundaries of Tractional Motion. *Boston Studies in the Philosophy and History of Science*, 308(August), 3–21. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10434-8_1
- Morel, T. (2017). Bringing Euclid into the Mines: Classical Sources and Vernacular Knowledge in the Development of Subterranean Geometry. In *Translating early modern science* (pp. 154-181). Brill.
- Morgan, D. L. (1998). Practical strategies for combining qualitative and quantitative methods: Applications to health research. *Qualitative Health Research*, 8(3), 362–376.
<https://doi.org/10.1177/104973239800800307>
- Νικολαντωνάκης, Κ. (2023). *Η Αναλυτικο-συνθετική Μέθοδος στην Ιστορία των Μαθηματικών. Επεισόδια από την Ελληνική Αρχαιότητα, τον Αραβικό Μεσαίωνα και την Ευρωπαϊκή Αναγέννηση μέχρι τον 18ο Αιώνα* [Μονογραφία]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-173>
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.

- Palmieri, P. (2009). Superposition: On Cavalieri's practice of mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, 63(5), 471–495. <https://doi.org/10.1007/s00407-008-0032-z>
- Paltheppu, S. (1997). GNIREENIGNE: Reverse Engineering or Backwards Engineering? *Seventh Annual Graduate Symposium on Computational Science*, 29–44. file:///C:/Users/Teratech/Downloads/GNIREENIGNE_Reverse_Engineering_or_Backwards_Engin.pdf
- Pearson, K. (1904). XVIII. On a novel instrument for drawing parabolas. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 7(38), 200–201. <https://doi.org/10.1080/14786440409463100>
- Perks, J. (1706). *The Construction and Properties of a new Quadratrix to the Hyperbola*. <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1706.0017>
- Perks, J. (1714-1716), An easy mechanical way to divide the nautical meridian line in Mercator's projection, with an account of the relation of the same meridian line to the curva catenaria. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 29(345), 331- 339.
- Petitgirard, L. (2018). From analogue to digital mathematical instruments: Examples of mathematical practices with machines in the 1950s and 1960s. In Gessner, S., Hashagen, U., Pfeiffer, J., & Tournès, D. (Ed.), *Mathematical Instruments between Material Artifacts and Ideal Machines: Their Scientific and Social Role before 1950* (pp. 3544-3550). *Oberwolfach Reports*, 14(4), 3471–3560. <https://doi.org/10.4171/owr/2017/58>.
- Πνευματικός, Ν. (1974). *Συμπλήρωμα Γεωμετρίας*. (1η). https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpd1A1YnM2ZVN5Mlk/view?pli=1&resourcekey=0-wZEjD1Hhl_q8V0a8DZaVVQ
- Poleni, G. (1729) *Epistolarum mathematicarum fasciculus*, Patavii: typis Seminarii. <https://play.google.com/books/reader?id=BymYyFnKwYgC&pg=GBS.PP4&hl=el>
- Prabhu, V. & Czarnocha, B. (2000). Method of Indivisibles in Calculus Instruction.. In W.-S. Lin & H. & Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the HPM 2000 Conference* (Vol. 1, pp 198-205). Department of Mathematics National Taiwan Normal University. http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/HPM_2000_-_Vol_1_2000.pdf
- Preston, B. (2018). Artifact. In E. Zalta (Ed.), *Stanford encyclopedia of philosophy*.
- Ransom, P. (1993). Astrolabes, Cross Staffs and Dials: The ACD of Geometry through Old Instruments. *Mathematics in School*, 22(4), 2-8. Reid, S., Shapiro, L., & Louw, G. (2019). How Haptics and Drawing Enhance the Learning of Anatomy. *Anatomical Sciences Education*, 12(2), 164–172. <https://doi.org/10.1002/ase.1807>
- Ransom, P.: 1995, 'Navigation and surveying: teaching through the use of old instruments', *Histoire et Epistémologie dans l'Education Mathématique*, IREM de Montpellier, pp. 227–239 Riccati, V. (1752), *De usu motus tractorii in constructione æquationum*

- differentialium commentarius, Bononiæ: Ex typographia Lælii a Vulpe.
<https://play.google.com/books/reader?id=ZW1aAAAcAAJ&pg=GBS.PA8&hl=el>
- Roberts, D. (2014). Handbook on the History of Mathematics Education. In *History of Tools and Technologies in Mathematics Education* (pp. 565–576). <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2>
- Roegel, D. (2009). Anecdotes: Prototype fragments from Babbage's first difference engine. *IEEE Annals of the History of Computing*, 31(2), 70–75.
<https://doi.org/10.1109/MAHC.2009.31>
- Schoenfeld, A. H. (2013). On having and using geometric knowledge. *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics, August*, 225–264.
<https://doi.org/10.4324/9780203063538>
- Schooten, F. (1646). *De organica conicarum sectionum in plano descriptione* (Ex Officina Elzeviriorum (Ed.); 1st ed.).
<https://play.google.com/books/reader?id=6xNiAAAcAAJ&pg=GBS.PP16>
- Siopi, K., & Koleza, E. (2016). New perspectives for Geometry teaching : Mechanical linkages Technology. *Hellenic Conference on Innovating STEM Education, December*, 18.
- Smith, D. (1929). *Source Book in Mathematics* (G. Walcott (Ed.); 1st ed.). Mac Graw Hill Company.
<https://ia800307.us.archive.org/10/items/sourcebookinmath00smit/sourcebookinmath00smit.pdf>
- Shannon, C. E. (1941). Mathematical Theory of the Differential Analyzer. *Studies in Applied Mathematics*, 20(1–4), 337–354. <https://doi.org/10.1002/sapm1941201337>
- Sharp, J., & Zachary, L. (2004). Using the van Hiele K-12 Geometry Learning Theory to Modify Engineering Mechanics Instruction. *Journal of STEM Education: Innovations and Research*, 5(1), 35–41.
<https://www.jstem.org/jstem/index.php/JSTEM/article/view/1111>
- Slife, B. D., & Williams, R. N. (1995). What's behind the research? Discovering hidden assumptions in the behavioral sciences. SAGE Publications, Inc.,
<https://sk.sagepub.com/books/whats-behind-the-research/n1.xml>
- Smith, A. M. (2019). *From sight to light: The passage from ancient to modern optics*. University of Chicago Press.
- Σμυρλής, Γ. (2008). *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*. Πανεπιστήμιο Κύπρου.
http://users.math.uoc.gr/~tertikas/ODE_smyrlis.pdf
- Σταμάτης, Ε. (1949). *Το Δήλιον πρόβλημα και η τριχοτόμησης γωνίας* (ιδίου (Ed.); 1st ed.).
<https://evangelosstamatis.files.wordpress.com/2011/06/1972-epistimonikai-ergasiai-arthra-tomos-a.pdf>

- Σταμάτης, Ε. (1975). *Απολλωνίου Κωνικά Βιβλίο Α* (1st ed.). Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδος.
<https://evangelosstamatis.wordpress.com/bibliography/>
- Σταμάτης, Ε. (1976). *Απολλωνίου Κωνικά ΒΙΒΛΙΑ Δ', Ε' και ΣΤ'*. Τ.Ε.Ε.
<https://evangelosstamatis.files.wordpress.com/2012/04/1976-apolloniou-konika-tomos-3.pdf>
- Σταμάτης, Ε. (1976). *Απολλωνίου Κωνικά 7ο βιβλίο* (Τ. Ε. Ε. Ελλάδος (Ed.)).
<https://evangelosstamatis.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/04/1976-apolloniou-konika-tomos-4.pdf>
- Study NE (2002). The effectiveness of using the successive perception test I to measure visual-haptic tendencies in engineering students. *Eng Des Graph J.*; 66: 17–26.
- Suardi, G. (1752) *Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne e di molto altre, che servir possono alla speculazione de' geometri, ed all'uso de' pratici*, Brescia: Rizzardi. <https://iif.wellcomecollection.org/pdf/b30408441>
- Suzuki, J. (2005). The Lost Calculus (1637-1670): Tangency and Optimization without Limits. *Mathematics Magazine*, 78(5), 339. <https://doi.org/10.2307/30044190>
- Swartling, Å. G. (2014). Focus group. *Advanced Tools for Sustainability Assessment, European Commission Webbook, January 2007*.
<http://www.ivm.vu.nl/en/projects/Archive/SustainabailityA-test/index.asp>
- Taimina, D. (2007). Historical mechanisms for drawing curves. *Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics, January 2007*, 89–104.
<https://doi.org/10.5948/UPO9780883859766.011>
- Τασσόπουλος, Γ. (1981). *Αναλυτική Γεωμετρία*. (1^η εκδ., Τομ. Α). Αθήνα: Παπαδημητρώπουλος.
<https://drive.google.com/file/d/1VbJ15Kntfomo9uuJ4wFpbE86x4htxHMD/view>
- Taton, R. (1977). Florimond de Beaune, Doctrine de l'angle solide. Inventaire de sa bibliothèque. Ed. Pierre Costabel, transcription, commentaires. *Revue d'histoire des sciences*, 30(1), 82-84.
- Teppo, A. (1991). Van Hiele Levels Thought of Revisited Geometric. *NCTM The Mathematics Teacher*, 84(3), 210–221. <https://www.jstor.org/stable/27967094>
- Tournes, D. (2009). *La construction tractionnelle des 'equations differentielles*, Paris: Blanchard. <https://www.researchgate.net/publication/281299091%0ALa>
- Tournès, D. (2018). Instruments for impossible problems: Around the work of Ljubomir Klerić (1844-1910). *Oberwolfach Reports*, 14(4), 3517-3520.
- Trninic, Dragan & Abrahamson, Dor. (2012). *Embodied Artifacts and Conceptual Performances*. 10th International Conference of the Learning Sciences: The Future of Learning, ICLS 2012 - Proceedings. 1.

- Trouche, L. (1998). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281–307. <https://doi.org/DOI: 10.1023/A:1009892720043>
- Tsiolis, G. (2015). Γ. Τσιώλης : Η σχέση ποιοτικής και ποσοτικής προσέγγισης στην κοινωνική έρευνα : από τη θέση περί ' ριζικής ασυμβατότητας ' στο συνδυασμό ή τη συμπληρωματικότητα των προσεγγίσεων . Στο ... Η σχέση ποιοτικής και ποσοτικής προσέγγισης στην κοινωνική έρευνα. November.
- Tweedie, Ch. (1914). Integragraphs. In Horsburgh, M. (Ed.), *The tercentenary exhibition of Napier relics and of books, instruments, and devices for facilitating calculation* (G. Bells (Ed.); 1st ed.). NEILL AND COMPANY, LIMITED, EDINBURGH. <http://www.archive.org/details/cu31924003962127>
- Urbankova, A., Eber, M., & Engebretson, S. P. (2013). A Complex Haptic Exercise to Predict Preclinical Operative Dentistry Performance: A Retrospective Study. *Journal of Dental Education*, 77(11), 1443–1450. <https://doi.org/10.1002/j.0022-0337.2013.77.11.tb05620.x>
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77–101. <https://doi.org/10.1007/BF03172796>
- Vincent, J. L. (2002). *Mechanical linkages, dynamic geometry software, and argumentation: Supporting a classroom culture of mathematical proof* [Melbourne]. <https://minerva-access.unimelb.edu.au/items/43f27669-116f-5018-a031-78239d7aa75e>
- Vitellonis. (1535). *Peri optikes, id est de natura, ratione, & proiectione radiorum uisus, luminum, colorum atq[ue] formarum, quam uulgo perspectiuam vocant, libri X*. (1st ed.). Apud Io. Petreium. https://books.google.gr/books?id=hrL_6P3B-YcC&printsec=frontcover&source=gbs_atb&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false
- Vygotsky, L. (1962). *Thought and language*. (E. Hanfmann & G. Vakar, Eds.). MIT Press. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/11193-000>
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes* (M. Cole, V. Jolm-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.). Harvard University Press. <https://doi.org/10.2307/j.ctvjf9vz4>
- Wartofsky, M. W. (1979). Perception, Representation, and the Forms of Action: Towards an Historical Epistemology: 1973. In *A Portrait of Twenty-five Years: Boston Colloquium for the Philosophy of Science 1960–1985* (pp. 215–237). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Wearne, D., & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(5), 371–384. <https://doi.org/10.2307/749172>
- Wetzel, J. E. (2010). An ancient elliptic locus. *American Mathematical Monthly*, 117(2), 161–167. <https://doi.org/10.4169/000298910X476068>

- Whipple, F (1914). Calculating Machines. In Horsburgh, M. (Ed.). *Modern Instruments and Methods of Calculation* (1st ed.). G. Bells & Sons, L.T.D.
<http://www.archive.org/details/cu31924003962127>
- Χόνδρος, Θ. (1998), *Κινηματική και Δυναμική Μηχανών Ι*. Πάτρα: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.
- Yakimanskaya, I.S. (1991). The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren. *Soviet Studies in Mathematics Education*. Volume 3.
- Yates, R. C. (1961). *Analutic Geometry with Calculus* (R. C. Yates (Ed.); 1st ed.). University of South Florida. <https://handoutset.com/wp-content/uploads/2022/05/Analytic-geometry-with-calculus-Robert-Carl-Yates.pdf>
- Yılmaz, H. B. (2009). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 1(2), 83-96.
- Zerfowski, D. 2021. Early Area Measurement Instruments. *Gazette*, 21, 138–158.
- Zhou M, Jones DB, Schwaitzberg SD, Cao CG (2007). Role of haptic feedback and cognitive load in surgical skill acquisition. *Proc Hum Factors Ergon Soc Ann Meet.*; 51: 631–635.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

[1] Ο Cavalieri στο βιβλίο του με τίτλο²⁹ «*Lo specchio ustorio, ovvero, Trattato delle settioni coniche, et alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo, suono, e moto ancora*» αναφέρει για τον μηχανισμό του (σε μετάφραση από τα Ιταλικά του 17^{ου} αιώνα):

Κωνικές τομές Κεφ XLV, σελ. 187

«Πώς περιγράφεται η παραβολή (καμπύλη), μέσω στέρεων οργάνων, τα οποία αποτελούνται από κανόνες, που είναι ο δεύτερος τρόπος στο επίπεδο»

Κεφάλαιο XLVI

«Αυτό θα το επιτύχουμε μέσω δυο ομάδων (ορθών γωνιών), που θα τοποθετηθούν και θα χρησιμοποιηθούν μαζί όπως θα αναφερθεί παρακάτω. Ας περιγράψουμε την παραβολή της οποίας το σημείο F εστία δίνεται από την κορυφή για την ευθεία γραμμή AP (στο σχήμα 29) για να είναι επομένως το τέταρτο τμήμα της ευθείας (ή ορθής) πλευράς της συγκεκριμένης παραβολής, θα γνωρίζουμε επίσης την ορθή πλευρά της παραβολής η οποία είναι η AE σε ορθή γωνία πάνω από την AP η οποία δημιουργείται αόριστα προς το σημείο P , όπως στο M εννοούμε να πρέπει να είναι άξονας της παραβολής που περιγράφεται, στην συνέχεια δημιουργούνται δύο ομάδες (ορθές γωνίες) από ξύλο ή μέταλλο τα οποία είναι N, L, M, A, I, K τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο που η πλευρά της μια από αυτές όπως LM θα πρέπει πάντα να «ρέει» (μάλλον εννοεί παράλληλη) πάνω από την ευθεία AM , γι' αυτό NL θα είναι πάντα κάθετη πάνω AM .

Μετά η LK στην LM που τερματίζει στο K να είναι ίσο με την ορθή πλευρά AE και τοποθετώντας έναν μικρό πείρο ή κάτι άλλο ώστε να αναγκάσει το σκέλος IK , της ομάδας (τετραγωνισμού) AIK να περνάει πάντα από το σημείο K το οποίο μπορεί να τοποθετηθεί στις άκρες ή στο κέντρο του σκέλους IK δημιουργώντας ένα αυλάκι. Ομοίως τοποθετείται στο σημείο A και αναγκάζει την πλευρά AI να περνάει πάντα από το σημείο A και στο σημείο I τοποθετείται το..... RI που έχει την κορυφή (άκρη) του στο I το οποίο θα πρέπει να κινείται πάνω, κάτω στην πλευρά N, A , μένοντας πάντα παρακείμενη καθώς οι πλευρές IA, IK κινούνται ως προς τα σημεία A, K με σκοπό να ξεκινά η περιγραφή (αναπαράσταση;) από το σημείο A .

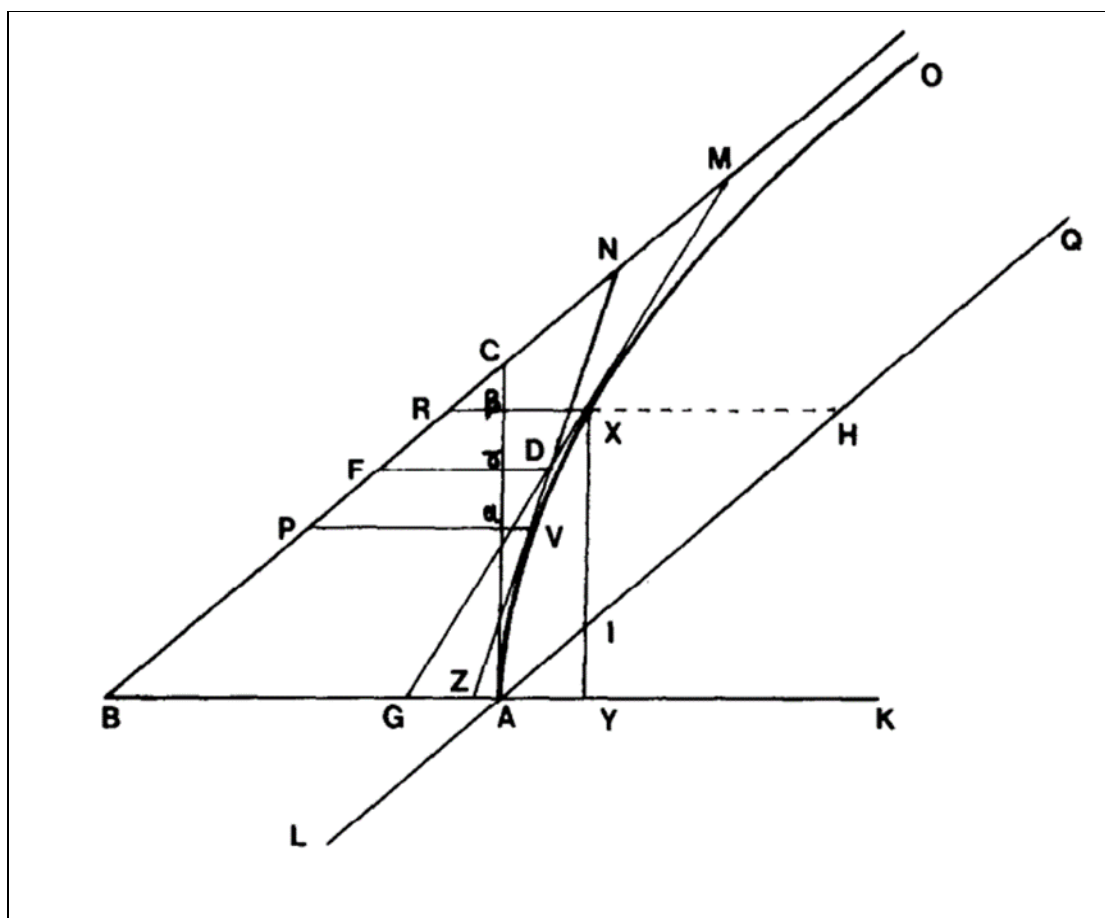
Αρχικά τα τρία σημεία I, L, A θα κάνουν ένα μόνο, μετά μετακινώντας τους την ομάδα: NLM , έτσι ώστε για παράδειγμα να συγκροτείται, όπου τώρα αντιλαμβανόμαστε ότι το σημείο I είναι διερχόμενο από L στο I διαγράφοντας καμπύλη AI , ενώ οι πλευρές AI, IK θα διέρχονται από τα σημεία A, K διατηρώντας τα πάντα παράπλευρα σε αυτά και έτσι θα παρακολουθήσουμε με αυτόν τον τρόπο να διαγράφεται η καμπύλη IB η οποία είναι ευνόητο ότι η AIB θα κάνει μια παραβολική γραμμή δεδομένου ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο για παράδειγμα AIK , το τετράγωνο της καθέτου IL είναι ίσο με το ορθογώνιο κάτω AL και LK , ή καλύτερα AE ορθή πλευρά στη οποία, LK είναι ίδια, δηλαδή το τετράγωνο της IL , εφαρμοσμένη διάταξη στον άξονα AM είναι ίση με το κάτω τετράγωνο, LA .

Μέρος του άξονα μεταξύ αυτής και της κορυφής A και κάτω από την ορθή πλευρά AE , έτσι θα δοκιμάσουμε να συμβεί (επακολουθήσει) σε όλα τα υπόλοιπα μέρη των δυο ομάδων::: AIK, NLM συνεπώς AB είναι παραβολή της οποίας η κορυφή είναι το σημείο A , εστία P , και άξονας AM παίρνοντας ως υπόθεση το **hauer??** που περιγράφεται η άλλη πλευρά AC όπου θα κάνουμε με τον ίδιο τρόπο, έτσι δημιουργείται από την τέταρτη ιδιότητα της παραβολής όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 12 και στο σχήμα $NIKA$, πιστεύω ότι μάλλον το ελληνικό A του **Ισίδωρου του Μιλήσιου** από αυτόν εφευρεμένο για να περιγράψει την παραβολή.

²⁹ «Τα φλεγόμενα κάτοπτρα, υπερβολικά, πραγματείες στις κωνικές τομές και μερικά από τα αξιοθαύμαστα εφέ τους γύρω από το φως, τη θερμότητα, το κρύο, τον ήχο και την κίνηση».

[2] Το πρόβλημα de Beaune προς τον Descartes

«Λαμβάνοντας ευθύγραμμο τμήμα BA μήκους b , χαράσσουμε δύο ευθείες γραμμές BAK και LQ οι οποίες τέμνονται σε σημείο A όπου και σχηματίζεται γωνία 45° . Να κατασκευασθεί ο γεωμετρικός τόπος (η καμπύλη) όπου σε οποιοδήποτε σημείο X του γ.τ. εάν φέρουμε το εφαπτομένη XG (της άγνωστης καμπύλης) και το κάθετο τμήμα XY προς την ευθεία BAK , τότε ο λόγος μεταξύ των XY και GY θα είναι συνεχώς ίσος με τον λόγο του δεδομένου τμήματος b προς το τμήμα XI , όπου I το σημείο τομής της άλλης ευθείας LQ με το τμήμα XY , δηλαδή $\frac{XY}{GY} = \frac{b}{XI}$ ».



Εικόνα 143: Η λογαριθμική καμπύλη του Descartes

Αρχικά τοποθετούμε στο επίπεδο και στο σημείο A , ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων όπου ο ένας άξονας είναι η ευθεία BAK (έστω ο άξονας BAK πως είναι ο $x'x$) και η ευθεία AC ο άξονας $y'y$. Επίσης απαιτούμε να ισχύει $\frac{XY}{GY} = \frac{b}{XI}$, (*). Παρατηρώντας το παραπάνω σχήμα, έχουμε $\frac{XY}{GY} = \varepsilon\varphi \widehat{XGY} = y'(x)$, όπου $y(x)$ η διαφορίσιμη συνάρτηση που συνδέει τις

συντεταγμένες των σημείων $X(x, y)$ της ζητούμενης λείας και συνεχούς καμπύλης³⁰.

Επομένως, $\frac{XY}{GY} = \varepsilon\varphi\widehat{XGY} = y'(x) = \frac{dy}{dx}$ και συνδυάζοντας με την σχέση (*), προκύπτει η

διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{xI}$ (**). Όμως, επειδή η γωνία $QAK = 45^\circ$, το ορθογώνιο τρίγωνο

AYI είναι και ισοσκελές όπου $YI = AY = x =$ τετμημένη του σημείου X . Άρα,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{xI} = \frac{b}{XY - YI} = \frac{b}{y - AY} = \frac{b}{y - x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{y - x} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y - x}{b} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{b} + \frac{-1}{b}x.$$

Εάν την μεταβλητή y την συμβολίσουμε με t τότε η διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι η:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{b} + \frac{-1}{b}x \Leftrightarrow x'(t) = \frac{t}{b} + \frac{-1}{b}x(t),$$

η οποία είναι γραμμική μη ομογενής 1^{ης} τάξεως.

(επίλυση της ΔΕ)

$$x'(t) = \frac{t}{b} + \frac{-1}{b}x(t) \Leftrightarrow x'(t) + \frac{1}{b}x(t) = \frac{t}{b} \Leftrightarrow e^{\frac{t}{b}} \cdot \left(x'(t) + \frac{1}{b}x(t) \right) = e^{\frac{t}{b}} \cdot \frac{t}{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'(t) \cdot e^{\frac{t}{b}} + x(t) \cdot e^{\frac{t}{b}} \cdot \frac{1}{b} = e^{\frac{t}{b}} \cdot \frac{t}{b} \Leftrightarrow \left(x(t) \cdot e^{\frac{t}{b}} \right)' = e^{\frac{t}{b}} \cdot \frac{t}{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) \cdot e^{\frac{t}{b}} = \int e^{\frac{t}{b}} \cdot \frac{t}{b} \cdot dt + C \Leftrightarrow x(t) \cdot e^{\frac{t}{b}} = \int \left(e^{\frac{t}{b}} \right)' \cdot t \cdot dt + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) \cdot e^{\frac{t}{b}} = e^{\frac{t}{b}} \cdot t - \int e^{\frac{t}{b}} \cdot t' \cdot dt + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) \cdot e^{\frac{t}{b}} = e^{\frac{t}{b}} \cdot t - \int e^{\frac{t}{b}} \cdot dt + C \Leftrightarrow x(t) \cdot e^{\frac{t}{b}} = e^{\frac{t}{b}} \cdot t - b \cdot e^{\frac{t}{b}} + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = t - b + C \cdot e^{-\frac{t}{b}}.$$

Επαναφέροντας τον αρχικό συμβολισμό των μεταβλητών, έχουμε την εξίσωση³¹ της ζητούμενης καμπύλης υπό τους περιορισμούς της:

$$x = y - b + C \cdot e^{-\frac{y}{b}}$$

³⁰ Θεωρώ πως η καμπύλη που αναζητώ είναι ΛΕΙΑ, ΣΥΝΕΧΗΣ και δεν έχει σημείο όπου η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη με κάποιον από τους άξονες ΒΑΚ και ΑC.

³¹ Στο άρθρο του TIMOTHY LENOIR (DESCARTES AND THE GEOMETRIZATION OF THOUGHT), προκύπτει παρόμοια εξίσωση,
 $x = y - b + bC \cdot e^{-\frac{y}{b}}$

[3] Επίλυση τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης (χωρίς δευτεροβάθμιο όρο) από τον Descartes $x^3 + px - q = 0, (p, q \in R)$.

(Ανάλυση προβλήματος μέσω πολυωνυμικής Άλγεβρας)

Προσπαθώντας να φανεί ο τρόπος σκέψης του Καρτέσιου, προκύπτει:

$$x^3 + px - q = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^3 + px - q) = 0 \Leftrightarrow x^4 + px^2 - qx = 0 \Leftrightarrow$$

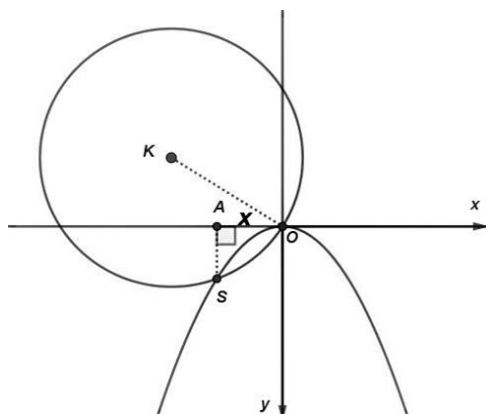
$$x^4 + (p - 1 + 1)x^2 - qx = 0 \Leftrightarrow x^4 + (p - 1)x^2 + x^2 - qx = 0$$

Θέτοντας $y = x^2$, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$x^4 + (p - 1)x^2 + x^2 - qx = 0 \Leftrightarrow y^2 + (p - 1)y + x^2 - qx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - qx + (p - 1)y = 0$$

Τελικά προκύπτει ένα σύστημα δύο πολυωνυμικών εξισώσεων 2^{ου} βαθμού, όπου η μία αντιστοιχεί σε κύκλο ο οποίος περνά από το $O(0,0)$ και η άλλη αντιστοιχεί σε παραβολή η οποία επίσης περνά από το $O(0,0)$ (εικόνα 147).



Εικόνα 144: Γεωμετρική κατασκευή τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης από τον Descartes (σύνθεση προβλήματος)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - qx + (p - 1)y = 0 \\ y = x^2 \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} \left(y - \frac{1-p}{2} \right)^2 + \left(x - \frac{q}{2} \right)^2 = \frac{(1-p)^2 + q^2}{4} \\ y = x^2 \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} \left(y - \frac{1-p}{2} \right)^2 + \left(x - \frac{q}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-p}{2} \right)^2 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \\ y = x^2 \end{array} \right\}.$$

(Σύνθεση προβλήματος μέσω Γεωμετρίας)

Ο κύκλος είναι κατασκευάσιμος με κανόνα και διαβήτη, αφού πρώτα κατασκευαστούν τα ευθύγραμμα τμήματα με μήκος $\frac{|1-p|}{2}$, και $\frac{|q|}{2}$, και στην συνέχεια η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές τα μήκη αυτά. Η υποτείνουσα είναι και η ακτίνα του κύκλου, οποίος τέμνεται με την παραβολή στο $O(0,0)$ και πιθανώς και σε ένα άλλο σημείο $S(x,y)$, του οποίου η τετμημένη x είναι και η ζητούμενη λύση της αρχικής τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης $x^3 + px - q = 0, (p, q \in R)$ (Bos, 1984). Βέβαια πρέπει, να χαραχθεί με μέγιστη ακρίβεια η εν λόγω κωνική τομή μέσω «κατάλληλου διαβήτη».

[4] Μέθοδος «προσδιοριστέων συντελεστών» από τον Frans van Schooten

Συγκεκριμένα, επιλέγονται ως μέσα κατασκευής δύο καμπύλες (κύκλος και παραβολή) των οποίων οι παράμετροι είναι προς το παρόν απροσδιόριστες. Μετά είτε με αλγεβρικά είτε με γεωμετρικά επιχειρήματα και με αναφορά σε ένα σχήμα, παράγεται η εξίσωση της οποίας οι ρίζες είναι τα σημεία τομής των δύο καμπυλών, έχοντας πλέον υπολογίσει τις παραμέτρους και έχοντας χαράξει τις δύο καμπύλες με μεγάλη ακρίβεια.

(Ανάλυση προβλήματος μέσω πολυωνομικής Άλγεβρας)

Συγκεκριμένα, υποθέτοντας ότι πρέπει να επιλυθεί η εξίσωση

$$x^4 + Bx^2 + \Gamma x + \Delta = 0, (B, \Gamma, \Delta \in R)$$

η κατασκευή της γίνεται με μία παραβολή που έχει εξίσωση $y = ax^2$ και έναν κύκλο που έχει εξίσωση $(x - b)^2 + (y - c)^2 = r^2$, όπου προφανώς τα a, b, c, r είναι οι παράμετροι της κατασκευής. Θεωρώντας ότι το $a = 1$, τότε μένει να υπολογιστούν οι υπόλοιπες τρεις παράμετροι έτσι ώστε μέσω της κατασκευής να προκύπτει η δεδομένη εξίσωση και τα σημεία τομής των καμπυλών να δίνουν και τις λύσεις της. Στο ορθογώνιο τρίγωνο EMG (εικόνα 148) προκύπτει:

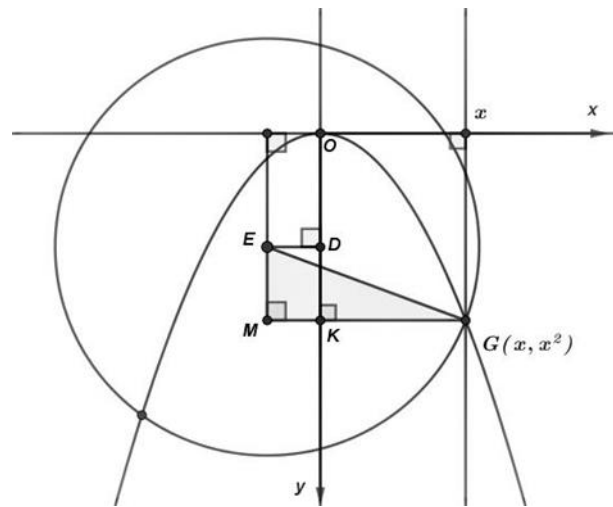
$$\begin{aligned} (EG)^2 &= (EM)^2 + (MG)^2 \Rightarrow r^2 = (y - c)^2 + (x - b)^2 \Rightarrow r^2 = (x^2 - c)^2 + (x - b)^2 \Rightarrow r^2 \\ &= x^4 - 2cx^2 + c^2 + x^2 - 2bx + b^2 \\ &\Rightarrow x^4 - 2cx^2 + c^2 + x^2 - 2bx + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^4 + (1 - 2c)x^2 - 2bx + (b^2 + c^2 - r^2) = 0 \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των δύο εξισώσεων, μπορούν να υπολογισθούν οι παράμετροι b, c, r της κατασκευής και να σχεδιαστεί ο ζητούμενος κύκλος:

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 1 - 2c \\ \Gamma = -2b \\ \Delta = b^2 + c^2 - r^2 \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1 - B}{2} \\ b = \frac{-\Gamma}{2} \\ r = \sqrt{\frac{(1 - B)^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}{4}} \end{array} \right\}$$

(Σύνθεση προβλήματος μέσω Γεωμετρίας)

Είναι πάλι φανερό η ανάγκη ακριβούς χάραξης των δύο αυτών κωνικών τομών με κατάλληλους διαβήτες.



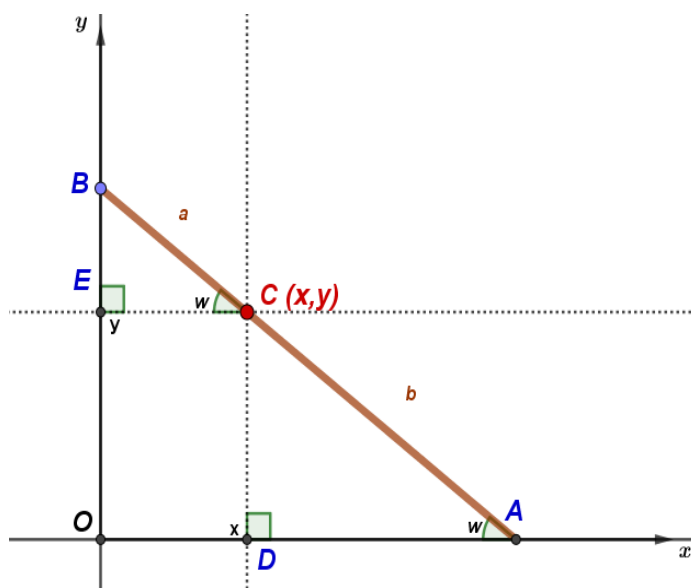
Εικόνα 145: Γεωμετρική κατασκευή λύσεων πολωνυμικής εξίσωσης 4^{ου} βαθμού από τον van Schooten

[5] The «van Schooten's Locus Problem»

«Δύο κορυφές ενός άκαμπτου τριγώνου σε ένα επίπεδο ολισθαίνουν κατά μήκος των βραχιόνων μιας γωνίας του επιπέδου. Ποιος είναι ο γ. τ. που περιγράφει η τρίτη κορυφή;»

Ακολουθεί η ειδική περίπτωση του προβλήματος του van Schooten που αναφέρεται σε ορθή γωνία, η λύση του οποίου είχε ήδη διδαχθεί από το Βυζαντινό Πρόκλο (410-485 μ.Χ.), και αποδεικνύεται ότι προκύπτει μία ελλειπτική καμπύλη.

«Άκαμπτο ευθύγραμμο τμήμα που ολισθαίνει, με τα άκρα του στις πλευρές ορθής γωνίας».



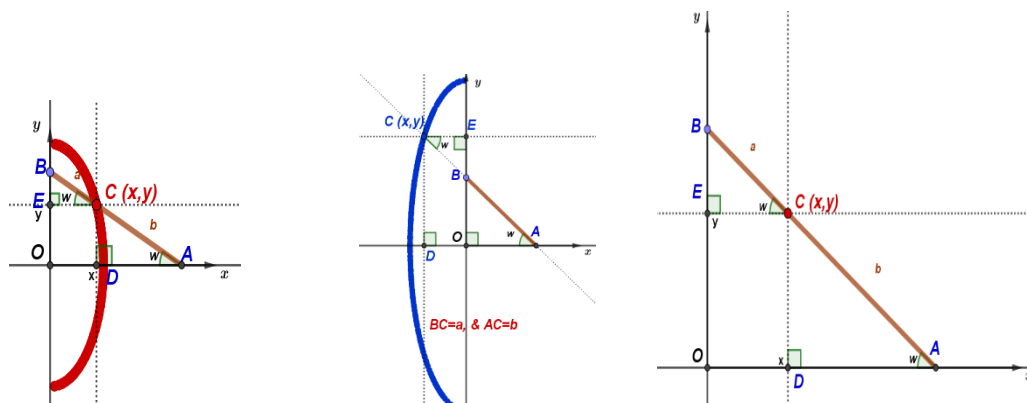
Εικόνα 146: Η ειδική περίπτωση του «Locus Problem» του van Schooten

Από το τρίγωνο BEC έχουμε $(EC) = a \cdot \cos w \Rightarrow x = a \cdot \cos w$. Επίσης από το τρίγωνο DAC προκύπτει ότι $(CD) = b \cdot \sin w \Rightarrow y = b \cdot \sin w$. Άρα, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 w}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 w}{b^2} = 1$.

Επομένως το σημείο C κινείται πάνω σε ελλειπτική καμπύλη με άξονες που έχουν μήκος το διπλάσιο των τμημάτων a και b της άκαμπτης ευθύγραμμης ράβδου AB . Εάν η ράβδος AB ολισθαίνει όπως περιγράψαμε, αλλά το σημείο C βρίσκεται (με κάποιο τρόπο) στην προέκταση του τμήματος AB , έχουμε:

Από το τρίγωνο BEC προκύπτει $(EC) = a \cdot \cos w \Rightarrow -x = a \cdot \cos w \Rightarrow x = -a \cdot \cos w$. Επίσης από το τρίγωνο DAC προκύπτει ότι $(CD) = b \cdot \sin w \Rightarrow y = b \cdot \sin w$.

Άρα, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 w}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 w}{b^2} = 1$. Επομένως και πάλι το σημείο C κινείται πάνω σε ελλειπτική καμπύλη με άξονες που έχουν μήκος το διπλάσιο των τμημάτων $a = BC$ και $b = AC$.



Εικόνα 147: Δύο περιπτώσεις χάραξης έλλειψης

(ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ): «Άκαμπτο τρίγωνο του οποίου 2 κορυφές ολισθαίνουν στις πλευρές τυχαίας γωνίας» (van Schooten's Locus Problem)

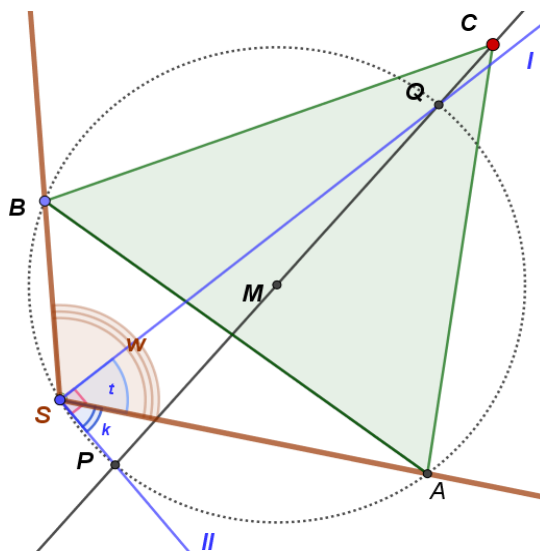
Έχουμε τυχαίο άκαμπτο τρίγωνο ABC που οι κορυφές της B, C ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές της γωνίας $BSA = w$, παραμένοντας και η τρίτη κορυφή C στο επίπεδο της γωνίας αυτής (εικόνα 155).

Κατασκευάζουμε στη συνέχεια τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου SAB , ο οποίος ακολουθεί το τρίγωνο καθώς κινούνται τα σημεία A, B με τον τρόπο που περιγράψαμε.

Σε κάθε θέση της πλευράς AB , αυτή «φαίνεται» από το σημείο S υπό σταθερού μέτρου (και θέσης) γωνία w . Ισοδύναμα μπορεί να θεωρηθεί ότι το τρίγωνο παραμένει ακίνητο και η γωνία $w = BSA$, μετακινείται πάνω στο σταθερό κυκλικό τόξο BSA , που αποτελεί τμήμα του γεωμετρικού τόπου των κορυφών των γωνιών που «βλέπουν» με γωνία w την χορδή BA αυτού του κύκλου.

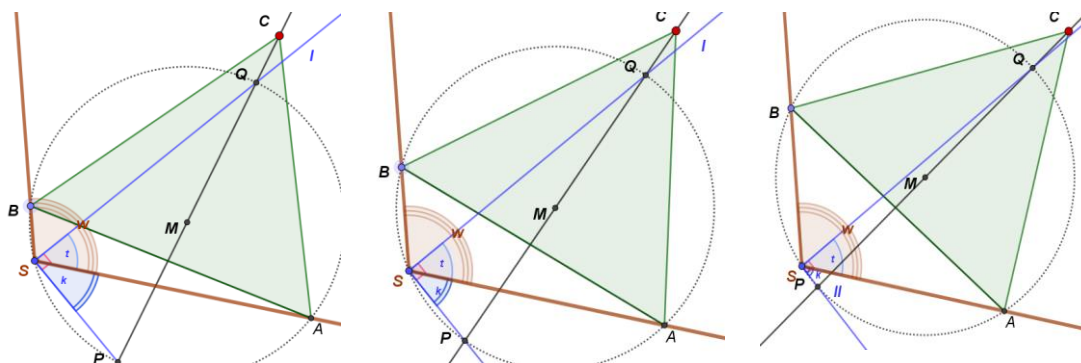
Αυτός ο κύκλος, που έχει ήδη κατασκευασθεί, έχει κέντρο το M και η ευθεία που το συνδέει με την τρίτη κορυφή C του τριγώνου ABC , τον τέμνει σε σημεία P, Q .

Η εγγεγραμμένη γωνία PSQ είναι ορθή επειδή «βλέπει» την προηγούμενη διάμετρο. Επίσης η ορθή αυτή γωνία αποτελεί το άθροισμα των διαδοχικών γωνιών t, k οι οποίες με την κίνηση του τριγώνου αλλάζουν θέση χωρίς να αλλάζουν μέτρο. Για να αποδειχθεί το τελευταίο αρκεί να θεωρήσουμε την ισοδύναμη κίνηση της γωνίας w παραμένοντας ακίνητο το άκαμπτο τρίγωνο, όπου είναι προφανές ότι οι γωνίες t, k βαίνουν πάντα στα ίδια τόξα PA, QA αντιστοίχως.



Εικόνα 148: Άκαμπτο τρίγωνο του οποίου 2 κορυφές ολισθαίνουν στις πλευρές τυχαίας γωνίας

Επομένως αφού οι συμπληρωματικές γωνίες t, k έχουν σταθερό μέτρο καθώς το τρίγωνο ολισθαίνει πάνω στις πλευρές της ακίνητης γωνίας w και η κοινή τους πλευρά είναι η ακίνητη SA , συμπεραίνουμε ότι και οι άλλες 2 πλευρές τους SP, SQ παραμένουν ακίνητες (και κάθετες μεταξύ τους).



Εικόνα 149: Άκαμπτο τρίγωνο του οποίου 2 κορυφές ολισθαίνουν στις πλευρές τυχαίας γωνίας και ακινησία ευθειών SP, SQ

Επομένως έχουμε την ολίσθηση του ευθυγράμμου τμήματος PQ (διάμετρος του κύκλου που προέκυψε από τον προηγούμενο γ.τ.) στις πλευρές ακίνητης ορθής γωνίας. Επίσης, θεωρώντας πάλι πως αυτή η κίνηση του τριγώνου σε ακίνητη γωνία, ισοδυναμεί με την κίνηση της κορυφής της γωνίας αυτής πάνω στο κυκλικό τόξο του προαναφερθέντος γ.τ. καθώς το τρίγωνο είναι ακίνητο, μπορούμε να πούμε ότι και η απόσταση QC παραμένει σταθερή.

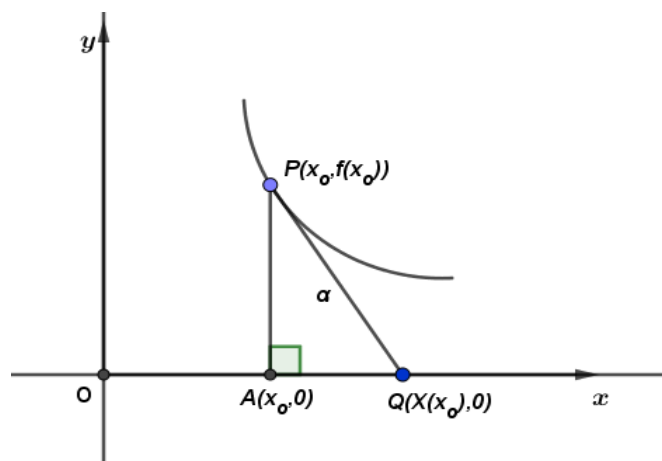
[6] «Tractrix» ή «Tractoria» ή «Έλκουσα» καμπύλη

Ο **Claude Perrault** (1613–1688) έθεσε στον **Leibniz** το ακόλουθο πρόβλημα:

«Να βρεθεί καμπύλη³² με την ιδιότητα ότι σε κάθε της σημείο P , ή εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των x σε σημείο Q κατά τρόπον ώστε το μήκος τού ευθύγραμμου τμήματος PQ να ισούται με σταθερό μήκος a ».

Έστω C_f η ζητούμενη καμπύλη η οποία αναπαρίσταται αλγεβρικά σε ορθοκανονικό σύστημα μέσω εξίσωσης $y=f(x)$ και έστω $P(x_0, f(x_0))$ τυχαίο σημείο της (εικόνα 145). Υποτίθεται επίσης ότι η καμπύλη είναι γνησίως φθίνουσα, συνεχής και λεία. Η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο P έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Η ευθεία αυτή για κάθε τέτοιο σημείο P , τέμνει τον άξονα x σε σημείο $Q(X(x_0), 0)$ όπου η εκάστοτε τετμημένη X του Q εξαρτάται από την αντίστοιχη τετμημένη x_0 του σημείου P . Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του Q στην εξίσωση της (ε) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} 0 - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (X(x_0) - x_0) \Rightarrow -f(x_0) = f'(x_0) \cdot (X(x_0) - x_0) \Rightarrow \\ -f(x_0) &= f'(x_0) \cdot X(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \Rightarrow f'(x_0) \cdot X(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0) \Rightarrow \\ X(x_0) &= \frac{f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, (1) \end{aligned}$$



Εικόνα 151: περιγραφή κατασκευής της έλκουσας καμπύλης

Από το ορθογώνιο τρίγωνο PAQ προκύπτει:

$$\begin{aligned} (PQ)^2 &= (PA)^2 + (AQ)^2 \Rightarrow \alpha^2 = (x_0 - X(x_0))^2 + (f(x_0) - 0)^2 \\ \Rightarrow_{(1)} \alpha^2 &= \left(x_0 - x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right)^2 + f^2(x_0) \Rightarrow \alpha^2 = \frac{f^2(x_0)}{(f'(x_0))^2} + f^2(x_0) \Rightarrow \\ \alpha^2 &= f^2(x_0) \cdot \left[\frac{1}{(f'(x_0))^2} + 1 \right] \Rightarrow \frac{\alpha^2}{f^2(x_0)} = \frac{1}{(f'(x_0))^2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{(f'(x_0))^2} = \frac{\alpha^2}{f^2(x_0)} - 1 \end{aligned}$$

³² Ο Perrault χρησιμοποίησε ένα ρολόι τσέπης, και η αλυσίδα είχε το σταθερό μήκος a , ενώ το κέντρο περιστροφής των δεικτών, απέτελεσε το τυχόν σημείο της ζητούμενης καμπύλης. Το δέ άκρο της αλυσίδας κινείτο πάνω σε τραπέζι.

$$\Rightarrow \frac{1}{(f'(x_0))^2} = \frac{\alpha^2 - f^2(x_0)}{f^2(x_0)} \Rightarrow (f'(x_0))^2 = \frac{f^2(x_0)}{\alpha^2 - f^2(x_0)},$$

όπου $f'(x_0) \neq 0, f(x_0) \neq 0$ και $f(x_0) \neq \pm \alpha$. Στη συνέχεια με τον περιορισμό $\alpha^2 - f^2(x_0) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_0) \in [-\alpha, \alpha]$, προκύπτει: $f'(x_0) = \pm \frac{f(x_0)}{\sqrt{\alpha^2 - f^2(x_0)}}$. Αυτή η εξίσωση

ισοδυναμεί με την διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}$ με «ανεξάρτητη» μεταβλητή x την

τετμημένη x_0 του τυχαίου σημείου P της ζητούμενης καμπύλης και «εξαρτημένης μεταβλητής y την αντίστοιχη τιμή $f(x_0)$ ».

θεωρώντας στη συνέχεια πως η ζητούμενη καμπύλη είναι «φθίνουσα» (βλέπε σχήμα), τότε $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}$ (2), όπου ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$

εξαρτάται άμεσα από την αντίστοιχες τιμές της $f(x)=y$. Για την επίλυση της εισάγεται ο μετασχηματισμός $z^2 = \alpha^2 - y^2 > 0 \Rightarrow dz^2 = -dy^2 \Rightarrow 2zdz = -2ydy \Rightarrow zdz = -ydy$ (3).

Επίσης από τον μετασχηματισμό $z^2 = \alpha^2 - y^2$ προκύπτει πως $|z| = \sqrt{\alpha^2 - y^2}$.

Θεωρώντας επίσης $z > 0$ προκύπτει πως $z = \sqrt{\alpha^2 - y^2}$ (Σμυρλής, 2008).

Στη συνέχεια από την (2) προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = \frac{-y}{z} \xrightarrow{(3)} \frac{-zdz}{ydx} = \frac{-y}{z} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{y^2}{z^2} = \frac{\alpha^2 - z^2}{z^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\alpha^2 - z^2}{z^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot \frac{z^2}{\alpha^2 - z^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{z^2}{(\alpha - z) \cdot (\alpha + z)} = 1 \Rightarrow^{33} \left(-1 + \frac{\alpha}{2(\alpha - z)} + \frac{\alpha}{2(\alpha + z)} \right) \cdot \frac{dz}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \left(-1 + \frac{\alpha}{2(\alpha - z)} + \frac{\alpha}{2(\alpha + z)} \right) dz = dx \Rightarrow -dz + \frac{\alpha}{2(\alpha - z)} dz + \frac{\alpha}{2(\alpha + z)} dz = dx \Rightarrow$$

$$- \int dz + \int \frac{\alpha}{2(\alpha - z)} dz + \int \frac{\alpha}{2(\alpha + z)} dz = \int dx \Rightarrow -z - \frac{\alpha}{2} \ln|\alpha - z| + \frac{\alpha}{2} \ln|\alpha + z|$$

$$= x + C \Rightarrow -z + \frac{\alpha}{2} \ln \left| \frac{\alpha + z}{\alpha - z} \right| = x + C \xrightarrow{z^2 = \alpha^2 - y^2 > 0} -z + \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{\alpha + z}{\alpha - z} \right) = x + C.$$

Παραλείποντας την αυθαίρετη σταθερά C διότι δεν αλλοιώνει την φύση του προβλήματος

αυτή η παράλληλη μεταφορά, προκύπτει: $x = -z + \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{\alpha + z}{\alpha - z} \right) \Rightarrow$

$$x = -\sqrt{\alpha^2 - y^2} + \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - y^2}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - y^2}} \right) \Rightarrow x = -\sqrt{\alpha^2 - y^2} + \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - y^2}}{y} \right)^2$$

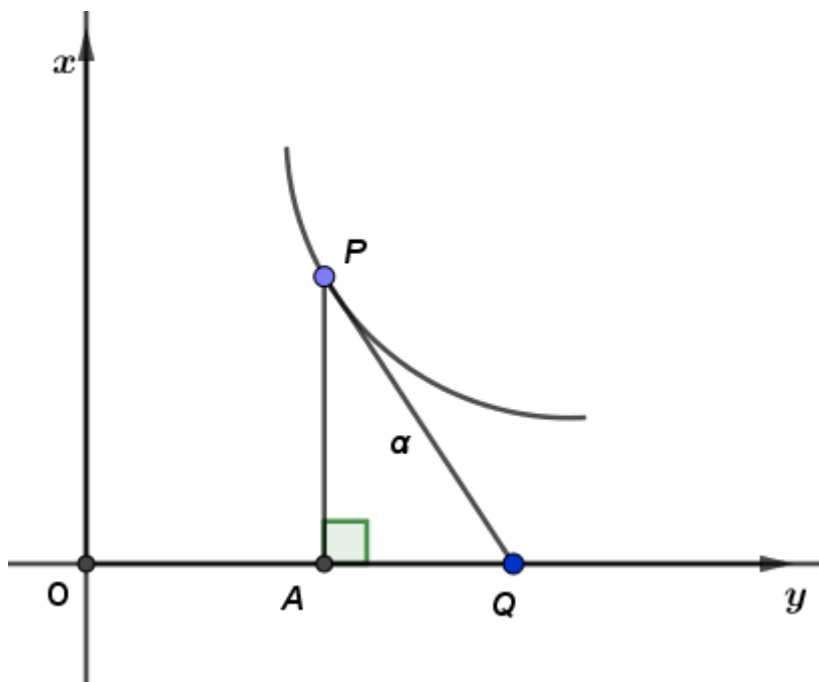
$$\Rightarrow x = -\sqrt{\alpha^2 - y^2} + 2 \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - y^2}}{y} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{\alpha^2 - y^2} + \alpha \cdot \ln \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - y^2}}{y} \right).$$

³³ Η παράσταση $\frac{z^2}{(\alpha - z) \cdot (\alpha + z)} = \frac{z^2}{\alpha^2 - z^2} = -1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - z^2} = -1 + \frac{\alpha^2}{(\alpha - z) \cdot (\alpha + z)} = -1 + \frac{A}{\alpha - z} + \frac{B}{\alpha + z} = \dots = -1 + \frac{\alpha}{2(\alpha - z)} + \frac{\alpha}{2(\alpha + z)}$.

Η εξίσωση αυτή αποτελεί την ζητούμενη «έλκουσα», και θεωρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το αρχικό y , μπορεί να θεωρηθεί εκ των υστέρων πως η μελέτη έγινε στην αντίστροφη της συνάρτηση (που υπάρχει λόγω των περιορισμών που απαιτήθηκαν).

Τελικά, $f(x) = -\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \alpha \cdot \ln\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - x^2}}{x}\right)$, ορίζοντας τον κατακόρυφο άξονα ως άξονα x και ο οριζόντιος y ορίζεται ως «διευθετούσα».



Εικόνα 152: περιγραφή κατασκευής της έλκουσας καμπύλης

$$f(x) = -\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \alpha \cdot \ln\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - x^2}}{x}\right)$$

[7] Κατασκευή μηχανισμών χάραξης κωνικών τομών γνωρίζοντας μόνο την καρτεσιανή αναπαράστασή τους (Berger, 1970). <https://www.geogebra.org/m/axwsv8v2>

Ο γενικός τύπος των κωνικών τομών σε ορθοκανονικό σύστημα ³⁴, μπορεί να λάβει την γενική μορφή $y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 - 2px = 0$ (όπου το σημείο τομής των αξόνων έχει τοποθετηθεί σε κορυφή της και ο κύριος άξονας συμμετρίας της ταυτίζεται με τον άξονα των τετμημένων (Τασσόπουλος, 1981).

ΑΝΑΛΥΣΗ

Θα γίνει προσπάθεια να βρεθούν δύο **μονοπαραμετρικές οικογένειες** ευθειών έτσι ώστε για κάθε τιμή της κοινής τους παραμέτρου λ , η τομή δύο αντίστοιχων ευθειών να ορίζει ένα σημείο αυτής της κωνικής τομής.

Θεωρώντας αυθαίρετα ως την μία τέτοια οικογένεια ευθειών την: $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbf{R}$, θα γίνει η προσπάθεια να «**αποδομηθεί**» η εξίσωση της κωνικής τομής (1) και να προκύψει η άλλη οικογένεια ευθειών.

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 - 2px = 0 \\ y = \lambda x \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 = 2px \\ y = \lambda x \end{array} \right\} \sim$$

$$\left\{ \frac{y^2}{2px} + \frac{(1 - \varepsilon^2)x^2}{2px} = 1 \right\} \sim \left\{ \frac{\lambda y^2}{2py} + \frac{(1 - \varepsilon^2)x}{2p} = 1 \right\} \sim$$

$$\left\{ \frac{\lambda y}{2p} + \frac{(1 - \varepsilon^2)x}{2p} = 1 \right\} \sim \left\{ \frac{y}{\frac{2p}{\lambda}} + \frac{x}{\frac{2p}{1 - \varepsilon^2}} = 1 \right\} \sim \left\{ \frac{x}{\frac{2p}{1 - \varepsilon^2}} + \frac{y}{\frac{2p}{\lambda}} = 1 \right\}, (2)$$

Πράγματι, η εξίσωση (1) μπορεί να προκύψει από το σύστημα των 2 ανωτέρω μονοπαραμετρικών οικογενειών ευθειών (με παράμετρο $\lambda = \varepsilon\varphi = \text{κλίση της ευθείας με εξίσωση } y = \lambda x$, όπου γενικά $0^\circ \leq \varphi < 180^\circ$).

Στη συνέχεια ορίζουμε τις σταθερές ποσότητες (για την συγκεκριμένη κωνική τομή):

$$l = \frac{2p}{\varepsilon^2} \quad \& \quad k = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}, \text{ όπου η μία είναι εμφανής στην 1}^\eta \text{ εξίσωση του παραπάνω συστήματος.}$$

(με ποιο κριτήριο επελέγησαν και ποια η σχέση τους με τα κωνικά ή με κάτι άλλο που σχετίζεται με τις μηχανές?)

³⁴ Το δ είναι η απόσταση της Εστίας από την διευθετούσα της κωνικής τομής, το ε η εκκεντρότητά της και η ποσότητα $\varepsilon\delta$ είναι η παράμετρος p που συναντήσαμε στην περίπτωση της Παραβολής, μελετώντας σε γεωμετρικό και αλγεβρικό πλαίσιο.

Θα γίνει προσπάθεια να μην εμφανίζονται οι «σταθερές» ε και p . Παρατηρώντας τις δύο σταθερές k και l , είναι φανερό πως $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{1}{2p} \Rightarrow \frac{k+l}{kl} = \frac{1}{2p} \Rightarrow 2p = \frac{kl}{k+l}$.

Αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει:

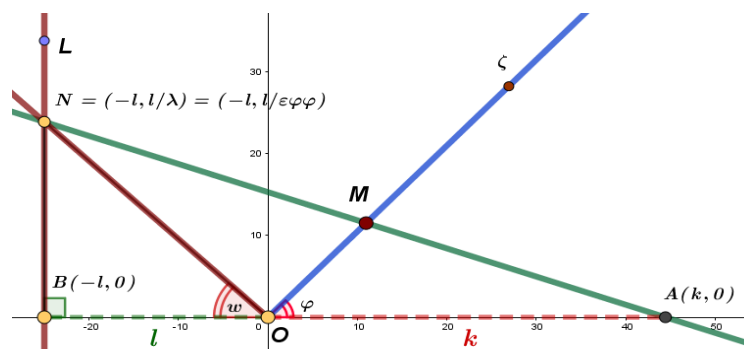
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{k} + \frac{y}{\frac{kl}{\lambda(k+l)}} = 1 \\ y = \lambda x \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{\lambda(k+l)} x + y = \frac{kl}{\lambda(k+l)} \\ y = \lambda x \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} lx + \lambda(k+l)y = kl \\ y = \lambda x \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{l}{\lambda(k+l)} x + \frac{kl}{\lambda(k+l)} \\ y = \lambda x \end{array} \right\}$$

Αυτές οι δύο οικογένειες ευθειών με κοινή παράμετρο το $\lambda = \varepsilon\varphi\varphi$, ορίζουν για κάθε τιμή του λ και ένα σημείο της κωνικής τομής με εξίσωση $y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 - 2px = 0$.

Στην περίπτωση που $\varepsilon < 1$, η ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{l}{\lambda(k+l)}x + \frac{kl}{\lambda(k+l)}$, τέμνει τον θετικό ημιάξονα του x στο σημείο $A(k, 0)$, και τέμνει τον y στο σημείο $Q(0, \frac{kl}{\lambda(k+l)})$. Επίσης για $x = -l < 0$ τέμνει την κατακόρυφη ευθεία $x = -l$ στο σημείο με τεταγμένη $-\frac{l}{\lambda(k+l)}(-l) + \frac{kl}{\lambda(k+l)} = \frac{l^2 + kl}{\lambda(k+l)} = \frac{l(l+k)}{\lambda(l+k)} = \frac{l}{\lambda}$ δηλαδή στο σημείο $N(-l, \frac{l}{\lambda})$ το οποίο και διατρέχει συνεχώς όλη την κατακόρυφη ευθεία BL καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος λ .

Παρατηρείται ότι για την συγκεκριμένη κωνική τομή (με τις συγκεκριμένες σταθερές k και l), το σημείο A παραμένει σταθερό ενώ τα σημεία Q και N έχουν σταθερή τετμημένη ενώ η τεταγμένη τους αλλάζει με συνεχή τρόπο καθώς αλλάζει το $\lambda = \varepsilon\varphi\varphi$.

Άρα το N «σύρεται» πάνω στην κατακόρυφη ευθεία «οδηγό» BN (που έχει εξίσωση $x = -l$) εξαρτώμενο μόνο από την παράμετρο λ και τελικά από την γωνία φ .



Εικόνα 153: περιγραφή μηχανισμού Berger

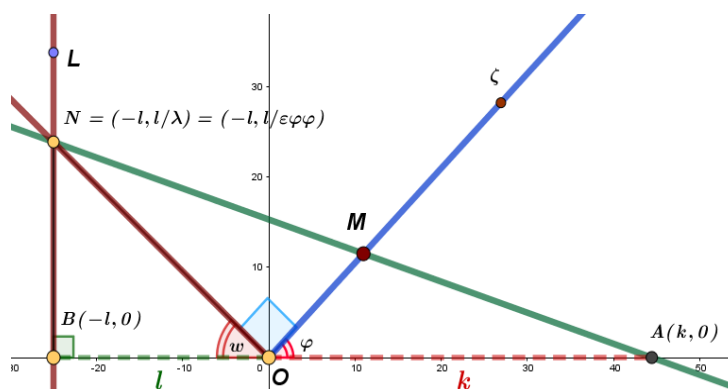
Επομένως, καθώς η ευθεία (ράβδος) OM περιστρέφεται γύρω από το σημείο (περιστροφική άρθρωση) O τότε το σημείο N «σύρεται» ομαλά πάνω στην κατακόρυφη ευθεία (οδηγό) BL (όπου το N είναι αρθρωμένο πρισματικά).

Επίσης στο μονίμως ορθογώνιο τρίγωνο NBO , η γωνία $BON = \omega$ είναι μονίμως συμπληρωματική της φ διότι $\varepsilon\varphi \widehat{BON} = \frac{(BN)}{(OB)} = \frac{l}{l} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\varphi}$, και προκύπτει η μόνιμη καθετότητα των κινούμενων ράβδων OM και ON .

Επίσης από μία άλλη «οπτική», η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων θέσεως $\overrightarrow{ON}$ και $\overrightarrow{OM}$, όπου $M(x, y)$ τυχαίο σημείο τομής των δύο ευθειών από τις 2 οικογένειες ευθειών που αναλύθηκε η κωνική τομή, είναι ορθή επειδή: $\lambda_{\overrightarrow{OM}} \cdot \lambda_{\overrightarrow{ON}} = \frac{\frac{1}{-l}}{\frac{y}{x}} = \frac{l}{-l} \cdot \frac{y}{x} = \frac{l}{-l\lambda} \cdot \frac{y}{x} = \frac{-1}{\lambda} \cdot \lambda = -1 \Rightarrow \overrightarrow{ON} \perp \overrightarrow{OM}$, και επομένως για κάθε τιμή της παραμέτρου φ τα διανύσματα αυτά παραμένουν κάθετα.

Τελικά, σύροντας το σημείο N πάνω στον κατακόρυφο οδηγό BN , υπάρχει 1-1 σχέση των αντίστοιχων θετικών τεταγμένων του N με τις τιμές της γωνίας φ (και κατ' επέκταση της παραμέτρου λ).

Μπορεί να θεωρηθεί ότι σύροντας το σημείο N πάνω στην μπάρα BL , καθορίζονται οι ευθείες της 1^{ης} οικογένειας ευθειών μέσω της μόνιμης συμπληρωματικότητας των προηγούμενων γωνιών και της καθετότητας των ράβδων ON και OM , και ταυτοχρόνως καθορίζονται οι αντίστοιχες ευθείες της 2^{ης} οικογένειας ευθειών λόγω του ότι το σταθερό σημείο A είναι συνδεδεμένο με το συρόμενο σημείο N , και ανήκουν πάντοτε στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{l}{\lambda(k+l)}x + \frac{kl}{\lambda(k+l)}$.



Εικόνα 154: περιγραφή μηχανισμού Berger

Πρόκειται για δύο μονοπαραμετρικές οικογένειες ευθειών με κοινή παράμετρο το $\lambda = \varepsilon\varphi\varphi$, το οποίο έχει 1-1 αντιστοίχιση με τις τιμές της τεταγμένης l/λ του σημείου N .

ΣΥΝΘΕΣΗ

($\varepsilon < 1$): Τοποθετούμε στον άξονα $x'x$ ενός καρτεσιανού συστήματος, τα σταθερά σημεία $A(k, 0)$ και $B(-l, 0)$, και χαράσσουμε την ευθεία με εξίσωση $x = -l$.

Από το $O(0, 0)$ φέρω τυχαία ημιευθεία που τέμνει την ευθεία $x = -l$ σε σημείο N .

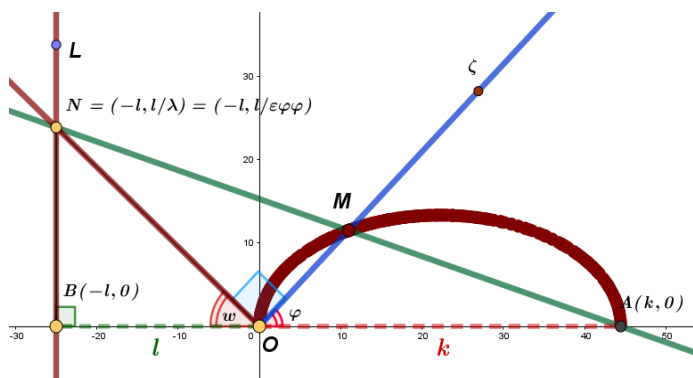
Φέρουμε επίσης και την κάθετη με την ON ημιευθεία OZ , η οποία θα έχει εξίσωση $y = \lambda x$. Συνεπώς η ημιευθεία ON έχει εξίσωση $y = \frac{-1}{\lambda}x$, και το σημείο N θα έχει συντεταγμένες που προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} y = \frac{-1}{\lambda}x \\ x = -l \end{cases} \sim \dots N\left(-l, \frac{l}{\lambda}\right)$.

Οι διάφορες θέσεις της ημιευθείας ON ορίζουν αμφιμονοσήμαντα (λόγω συμπληρωματικότητας) τις διάφορες θέσεις που μπορεί να λάβει η ημιευθεία OZ , καθώς και ότι οι εικονιζόμενες συμπληρωματικές (εκ κατασκευής) γωνίες φ και ω λαμβάνουν τις τιμές του διαστήματος $[0^\circ, 90^\circ]$. Άρα σύροντας το σημείο N πάνω στην κατακόρυφη ευθεία BN , η ημιευθεία OZ αναπαριστά την οικογένεια τω ευθειών με εξίσωση $y = \lambda x$.

Όμως για μία τυχαία θέση του σημείου N , εκτός από μοναδική ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x$, ορίζεται και μοναδική ευθεία που συνδέει το $N\left(-l, \frac{l}{\lambda}\right)$ με το σταθερό σημείο $A(k, 0)$. Η συγκεκριμένη ευθεία έχει κλίση $\frac{y_N - y_A}{x_N - x_A} = \frac{\frac{l}{\lambda} - 0}{-l - k} = \dots = \frac{-l}{\lambda(k+l)}$, και προκύπτει πως η εξίσωσή της είναι $y = -\frac{l}{\lambda(k+l)}x + \frac{kl}{\lambda(k+l)}$.

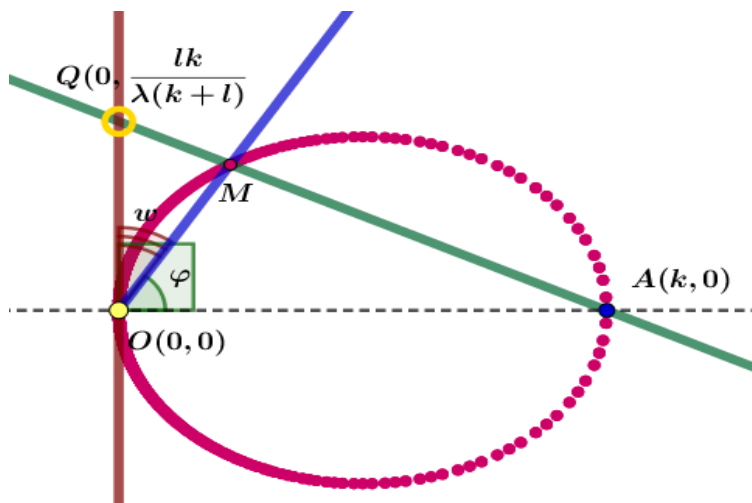
Τελικά, οι διαδοχικές θέσεις του σημείου N ορίζουν αμφιμονοσήμαντα τις ευθείες των 2 οικογενειών των οποίων η αντίστοιχη τομή τους για κάθε θέση του σημείου N ορίζουν σημείο M τόξου κωνικής τομής (εν προκειμένω ελλείψεως).

Τελικά έχουμε έναν επίπεδο **1-1 γεωμετρικό μετασχηματισμό** ευθυγράμμου κινήσεως σε κίνηση επί τόξου κωνικής τομής.



Εικόνα 155: Τοποθέτηση γραφίδας στο σημείο M

Αξίζει να αναφερθεί ότι θα μπορούσε να κατασκευασθεί σχετικός κωνικογράφος χωρίς την παρουσία του κατακόρυφου «οδηγού» BN , αλλά χρησιμοποιώντας ως κατακόρυφο οδηγό τον άξονα $y'y$, ο οποίος τέμνεται από την ευθεία AM (και για κάθε τιμή του λ) σε σημείο $Q\left(0, \frac{kl}{\lambda(l+k)}\right)$.



Εικόνα 156: εναλλακτική πρόταση μηχανισμού Berger

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΗΧΑΝΩΝ

Επομένως, δοθείσης της εξίσωσης $y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 - 2px = 0$, η οποία και αναπαριστά κωνική τομή σε καρτεσιανό επίπεδο όπου το σημείο αναφοράς $O(0,0)$ έχει τοποθετηθεί σε κορυφή της και ως άξονας των τετμημένων έχει ορισθεί ο κύριος άξονας συμμετρίας της, στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σταθερές k και l και τοποθετούμε στον άξονα $x'x$ το σταθερό σημείο $A(k, 0)$

(Α) Εάν θελήσουμε να κατασκευάσουμε την 1^η εκδοχή, πρέπει να τοποθετήσουμε και το σημείο $B(-l, 0)$, όπου και θα τοποθετήσουμε μπάρα κύλισης (κάθετη στον άξονα $x'x$) στην οποία επιλέγουμε τυχαίο σημείο N .

Το N είναι αρθρωμένο πρισματικά με την κατακόρυφη μπάρα και αρθρώνονται πάνω του περιστροφικά οι 2 ευθύγραμμες ράβδοι κύλισης NO και NA . Η ράβδος NO αρθρώνεται μόνο περιστροφικά στο σταθερό σημείο O με δυνατότητα ολίσθησης του N πάνω της. Η ράβδος NA αρθρώνεται περιστροφικά και πρισματικά στο σταθερό σημείο A .

Στη συνέχεια στο O αρθρώνεται περιστροφικά μία ράβδος η οποία είναι μονίμως κάθετη με την NO , και στο σημείο – γραφίδα M όπου συναντά την ράβδο NA την αρθρώνουμε περιστροφικά με τις NA και OM , και αυτή η άρθρωση μπορεί ταυτόχρονα να σύρεται στις ράβδους NA και OM (διπλή πρισματική άρθρωση με δυνατότητα περιστροφής).

Σύροντας το σημείο N πάνω στην κατακόρυφη μπάρα, η γραφίδα M χαράσσει τόξο κωνικής τομής αναλόγως της εκκεντρότητας της.

(Β) Εάν θελήσουμε να κατασκευάσουμε την 2^η εκδοχή, πρέπει για μια τυχαία θέση της ευθείας OM να υπολογισθούν πρώτα οι σταθερές k, l και η παράμετρος λ (αριθμητικά και

κατασκευαστικά), και στη συνέχεια η τεταγμένη $\frac{lk}{\lambda(k+l)}$ (αριθμητικά και κατασκευαστικά) του σημείου $Q \left(0, \frac{lk}{\lambda(l+k)}\right)$, έτσι ώστε να αρθρωθεί καταλλήλως στο σημείο Q η ράβδος QA , και στη συνέχεια η ράβδος OM στα σημεία O και M .

Το σημείο-γραφίδα M θα χαράσσει κάποια κωνική τομή καθώς το Q θα σύρεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ (αναλόγως της εκκεντρότητας της).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

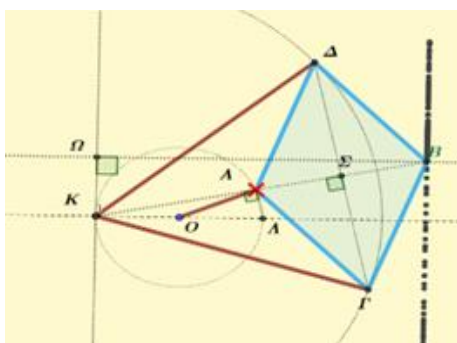
(1) Η 1^η εκδοχή εξαρτάται λιγότερο από την ακρίβεια και κατασκευή αριθμητικών υπολογισμών (χρειάζονται μόνο να τοποθετηθούν οι σταθερές k, l), όμως χαράσσει το μισό τμήμα μιας κωνικής τομής.

(2) Στην 2^η εκδοχή υπάρχει μεγάλη εξάρτηση από τους υπολογισμούς και τις κατασκευές των αριθμητικών ποσοτήτων k, l, λ και $\frac{lk}{\lambda(k+l)}$, όμως μπορεί να χαράξει σχεδόν όλη την αντίστοιχη κωνική τομή.

[8] Ευθυγράφος των Peauchelier-Lipkin

<https://www.geogebra.org/m/t7qunmrf>

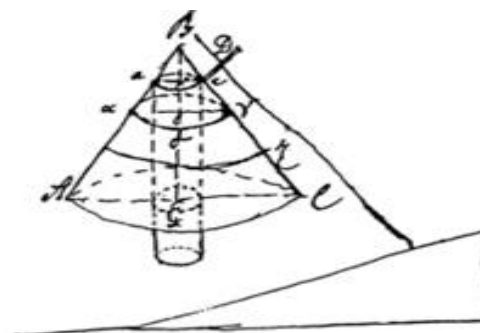
Ας υποθέσουμε ότι οι πλευρές του ρόμβου έχουν μήκος 4, η ακτίνα του μεγάλου κύκλου ισούται με 9 και η ακτίνα του μικρού κύκλου ισούται με 3 (εικόνα 164). Το σημείο K και το σημείο O δεν μετακινούνται αλλά περιστρέφονται ομοεπίπεδα. Επίσης το σημείο K ανήκει στον μικρό κύκλο κέντρου O. Οι μεγάλες ακτίνες είναι αρθρωμένες περιστροφικά στο K αλλά και στις κορυφές Δ και Γ του ρόμβου. Η μικρή ακτίνα είναι επίσης αρθρωμένη περιστροφικά στο O καθώς και στην πλησιέστερη κορυφή A του ρόμβου. Το σημείο A είναι η «είσοδος» του μηχανισμού και η κορυφή B του ρόμβου είναι η «έξοδος» του όπου έχει τοποθετηθεί και μία γραφίδα. Στο σημείο K έχει χαραχθεί ευθεία κάθετη με την διάκεντρο KO. Από την κορυφή B του ρόμβου έχει χαραχθεί ευθεία BΩ παράλληλη με την KO, και επομένως κάθετη με την κάθετη στην KO. Τα τρίγωνα ΚΑΔ και ΚΑΓ ισούνται λόγω κριτηρίου Π-Π-Π, και προκύπτει ότι οι γωνίες ΚΑΔ και ΚΑΓ ισούνται. Άρα ισούνται και οι παραπληρωματικές γωνίες τους. Άρα η ΚΑ οφείλει να είναι συγγραμμική με την διαγώνιο ΑΒ του ρόμβου. Συνεπώς τα σημεία τα σημεία Κ,Α,Σ,Β είναι συνευθειακά και $(KA) \cdot (KB) = ((KS) - (AS)) \cdot ((KS) + (AS)) = (KS)^2 - (AS)^2 = [(KD)^2 - (DS)^2] - [(AD)^2 - (DS)^2] = 9^2 - (DS)^2 - 4^2 + (DS)^2 = 81 - 16 = 65 = ct$. Τα τρίγωνα ΚΩΒ και ΚΑΛ είναι ορθογώνια και όμοια λόγω του ότι οι γωνίες ΩΒΚ και ΑΚΛ ισούνται ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων ΒΩ και ΚΟ τεμνόμενων από την ΚΒ. Άρα ισχύει η αναλογία $\frac{(ΚΛ)}{(ΚΒ)} = \frac{(ΑΛ)}{(ΩΚ)} = \frac{(ΚΑ)}{(ΩΒ)} \Rightarrow (ΩΒ) = \frac{(ΚΑ) \cdot (ΚΒ)}{(ΚΛ)} = \frac{65}{4} = ct$. Τελικά, για οποιαδήποτε θέση του σημείου-γραφίδας Β, η απόσταση του Β από την σταθερή ευθεία ΚΩ παραμένει ίδια, που μεταφράζεται πως η γραφίδα Β χαράσσει ευθεία γραμμή ή αλλιώς το σημείο Β κινείται σε νοητή ευθεία τροχιά.



Εικόνα 157: ευθυγράφος Peaucellier-Lipkin

[9] Εμβαδογράφος του Johann Martin Hermann

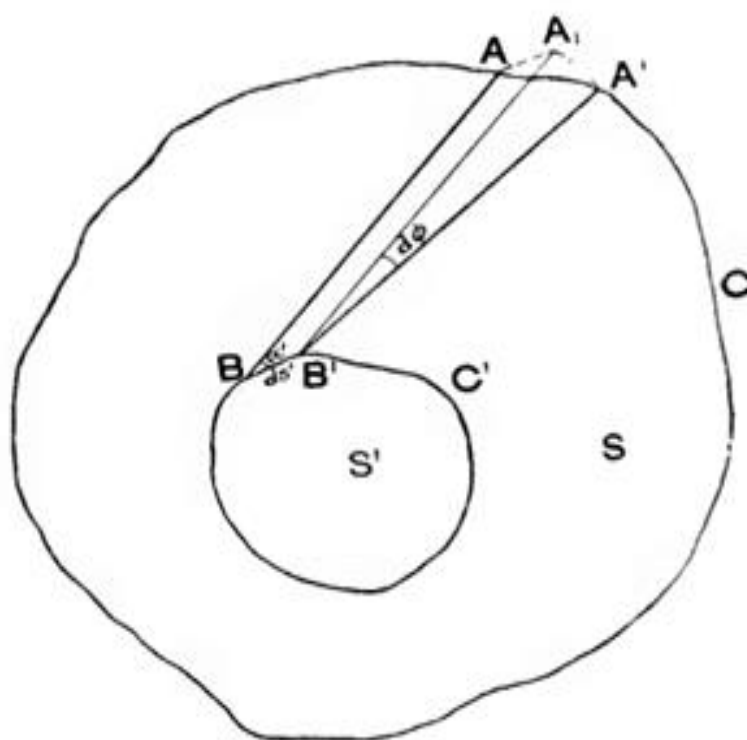
Αναζητήθηκε και η κατασκευή των διαφορικών εξισώσεων δηλαδή μια εύχρηστη και μηχανική λύση για την πιο απλή διαφορική εξίσωση $y' = f(x)$. Ο Fischer (2018) αναφέρει ότι ο Johann Martin Hermann (1785-1841) σχεδίασε το 1814 μια τέτοια μαθηματική μηχανή. Αν και δεν έχει δημοσιευθεί, η συσκευή του Hermann είναι πλέον αναμφισβήτητα το πρώτο γνωστό όργανο για ακριβή ολοκλήρωση και ικανό να μετρήσει με ακρίβεια το εμβαδόν οποιουδήποτε ακανόνιστου οριοθετημένου επιπέδου σχήματος (εικόνα 165). Η «κάλυψη» μιας περιοχής με ένα τετράγωνο πλέγμα ήταν μέθοδος προσέγγισης πολύ γνωστό στο Μεσαίωνα. Μια άλλη μέθοδος προσέγγισης ήταν μια επικάλυψη νε λωρίδες ιδίου πλάτους, και πολλαπλασιάζοντας το μέσο μήκος τους με το πλάτος της περιοχής. Με την ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού τον 17^ο αιώνα, έγινε σαφής η σύνδεση μεταξύ του υπολογισμού του εμβαδού και ορισμένου ολοκληρώματος. Όμως μετά από 150 έτη επιτεύχθηκε από τον Hermann μια καθαρά μηχανική λύση για τον ακριβή προσδιορισμό του εμβαδού οποιουδήποτε έστω και ακανόνιστου οριοθετημένου σχήματος. Όμως δεν δημοσιεύτηκε η εργασία του αλλά βεβαιώνεται από τους κατασκευαστές μαθηματικών οργάνων Georg Reichenbach (1771-1826) και Joseph Liebherr (1767-1840), καθώς και τον μαθηματικό Johann Georg [von] Soldner (1776-1833), καθώς και η ύπαρξη μόνο ενός τέτοιου οργάνου. Όπως αναφέρει ο Fischer στο άρθρο του, ο μηχανισμός χρησιμοποιεί μόνο τρία μηχανικά στοιχεία: έναν κώνο, έναν τροχό και μια σφήνα (εικόνα 157) και αποτελεί συσκευή συνεχούς «πολλαπλασιασμού και συσσώρευσης» άρα εμβαδομέτρησης. Εάν ο κώνος στρίβει κατά dx και το σημείο επαφής του τροχού με τον κώνο απέχει $f(x)$ από την κορυφή, τότε ο τροχός στρέφεται κατά $f(x) \cdot dx$ και «συσσωρεύει συνεχώς» τις διαφορικές στροφές και καθώς η σφήνα μπορεί, κατά τη διάρκεια της στροφής, να αλλάξει τη θέση του σημείου επαφής B τότε ο συντελεστής πολλαπλασιασμού $f(x)$ μπορεί επίσης να αλλάξει συνεχώς και τελικά έχουμε συνεχή πολλαπλασιασμό με συνεχή συσσώρευση (Fischer, 2018).



Εικόνα 158: οπτικό διάγραμμα για το εμβαδόμετρο του Hermann, από χειρόγραφο του 1814-1815 (Fischer, 2014)

[10] Εμβαδόμετρο των Carse & Urquhart

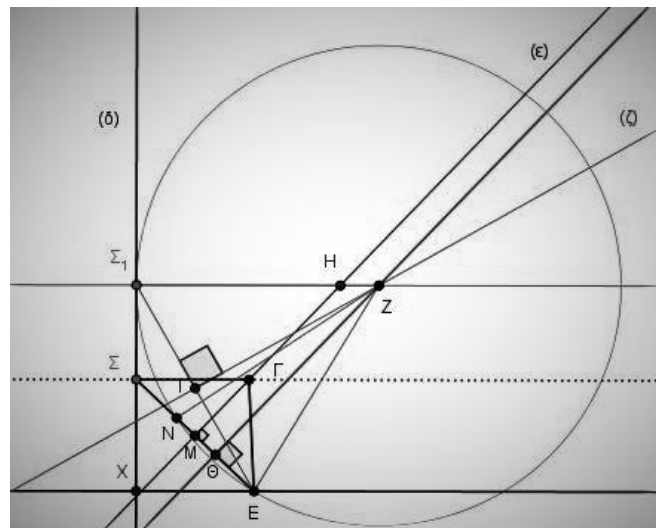
Το 1914 περιγράφουν έναν γενικό τρόπο λειτουργίας του επιτεδόμετρου (planimeter) που έχει στην δομή του έναν βραχίονα σταθερού μήκους. Στόχος είναι η εμβαδομέτρηση της περιοχής μεταξύ των δύο κλειστών γραμμών C και C' (εικόνα 166). Έστω ένα σημείο A στην καμπύλη C και ένα σημείο B στην καμπύλη C' καθώς και η σταθερού μήκους l άκαμπτη ράβδος AB . Μετακινώντας το σημείο A κάνοντας μία πλήρη ιχνηλάτηση του περιγράμματος C , ενώ το B υποτάσσεται στο να κινηθεί ταυτοχρόνως επί της C' , αυτό έχει ως αποτέλεσμα η περιοχή που σαρώνεται από το AB να έχει εμβαδόν την διαφορά των εμβαδών της μεγάλης περιοχής S και της μικρής περιοχής S' . Εάν η ράβδος AB μετακινηθεί στην θέση $A'B'$ έχοντας τοποθετηθεί πάνω σε έναν «ολοκληρωτικό τροχό» κάθετο στο επίπεδο και με άξονα παράλληλο της AB , τότε αυτή η πολύ μικρή περιοχή $ABB'A'$ θα έχει εμβαδόν ίσο με $l \cdot ds' \cdot \sin \alpha' + \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \sin \varphi = l \cdot ds' \cdot \sin \alpha' + \frac{1}{2} l \cdot d\varphi$ (θεωρώντας το ύψος $l \cdot \sin \varphi$ του $ABB'A'$ περίπου ίσο με το τόξο $d\varphi$). Επομένως μετά από την επιστροφή της άκαμπτης ράβδου στην αρχική της θέση AB , θα έχει «σαρωθεί» εμβαδόν ίσο με $E = l \cdot \int ds' \cdot \sin \alpha' + \frac{1}{2} l^2 \int d\varphi = l \cdot \int ds' \cdot \sin \alpha' + \frac{1}{2} l^2 \cdot 2\pi = l \cdot \int ds' \cdot \sin \alpha' + l^2 \cdot \pi$. Θα υπολογισθεί στη συνέχεια η ποσότητα $\int ds' \cdot \sin \alpha'$. Όταν η BA μετατοπίζεται διαδοχικά στις θέσεις $B'A_1$ και $B'A'$, τότε ένα τυχαίο σημείο πάνω στον περιστρεφόμενο τροχό μετατοπίζεται κατά διάστημα που σχετίζεται άμεσα με το πλήθος dn των περιστροφών του τροχού. Το μήκος των περιστροφών αυτών ισούται με $ds' \cdot \sin \alpha' - a \cdot d\varphi$, όπου a η απόσταση του B' από τον τροχό και θεωρούμενη ως ακτίνα κύκλου κέντρου B' . Η ποσότητα $a \cdot d\varphi$ αφαιρείται διότι κατά την μετατόπιση του $B'A_1$ στην θέση $B'A'$ και λόγω της απειροελάχιστης μετατόπισης A_1A' , μπορεί να θεωρηθεί ότι ο τροχός θα κινηθεί αντίθετα της μετατόπισης $ds' \cdot \sin \alpha'$ (ύψος παραλληλογράμμου BAA_1B'). Άρα, το σημείο του τροχού θα μετατοπισθεί συνολικά κατά $n = \int dn = \int ds' \cdot \sin \alpha' - \int a \cdot d\varphi = \int ds' \cdot \sin \alpha' - a \cdot \int d\varphi \Rightarrow \int ds' \cdot \sin \alpha' = n - a \cdot 2\pi$, δηλαδή το ζητούμενο ολοκλήρωμα υπολογίζεται από την διαφορά των γνωστών ποσοτήτων n και $2a\pi$ (n = πλήθος περιστροφών του ολοκληρωτικού τροχού). Τελικά το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ των δύο κλειστών γραμμών ισούται με $E = l \cdot \int ds' \cdot \sin \alpha' + l^2 \cdot \pi = l \cdot (n - a \cdot 2\pi) + l^2 \cdot \pi$. Σε αυτήν τη λογική στηρίζεται η κατασκευή των πολικών και γραμμικών εμβαδόμετρων.



Εικόνα 159: «οπτικό διάγραμμα εμβადόμετρου με βραχίονα σταθερού μήκους από το βιβλίο του Horsburgh, M. (1914)»

[11] Πρόταση: η μεσοκάθετος του τμήματος ΣE , είναι και εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο Γ της παραβολής.

Απόδειξη



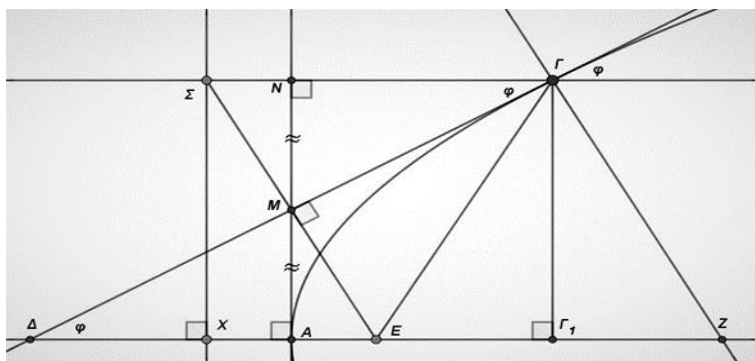
Εικόνα 160: εφαπτομένη παραβολής

Το σημείο Γ ανήκει στην Παραβολή αλλά και στην μεσοκάθετο του εκάστοτε τμήματος ΣE . Εάν υπάρχει ακόμη ένα σημείο N της μεσοκάθετης που ανήκει στην Παραβολή, τότε ως σημείο της παραβολής θα ισχύει $NE=NN_1$. Επίσης, αφού το N ανήκει στη μεσοκάθετη, έχουμε ότι $NE=N\Sigma$, προκύπτει λοιπόν ότι $N\Sigma=NN_1$, δηλαδή ότι ένα πλάγιο τμήμα είναι ίσο με την απόσταση, που είναι άτοπο. Επίσης με τον ίδιο τρόπο κατασκευής σημείων της παραβολής και επιλέγοντας ένα σημείο Σ_1 της διευθετούσας (σε “μεγαλύτερο ύψος” από το Σ), αυτό βρίσκεται στο δεξιά ημιεπίπεδο της μεσοκάθετης του τμήματος ΣE (εικόνα 167).

Πράγματι, φέροντας την κάθετη της (δ) στο Σ_1 και την μεσοκάθετη του $\Sigma_1 E$ η οποία τέμνει την καμπύλη σε σημείο Z το οποίο βρίσκεται “υψηλότερα” από το Γ , ο κύκλος $(Z, Z\Sigma_1)$ περνά από το E , τέμνει εσωτερικά το ΣE (στο N) και εφάπτεται της (δ) στο Σ_1 . Έστω η μεσοκάθετη (ζ) του NE και είναι φανερό ότι το μέσον Θ του NE βρίσκεται δεξιά του μέσου M του ΣE . Άρα η (ζ) που είναι παράλληλη με την (ϵ) θα βρίσκεται δεξιά της (ϵ) και το (τυχαίο) σημείο Z της Παραβολής θα βρίσκεται στο δεξιά ημιεπίπεδο της (ϵ) . Άρα η μεσοκάθετη (ϵ) του ΣE δεν έχει άλλα κοινά σημεία με την Παραβολή εκτός από το Γ και όπως αυτό κατασκευάστηκε.

[12] Πρόταση: Η προβολή σημείου Παραβολής στον άξονα της και το σημείο τομής του άξονα της και της εφαπτομένης³⁵ της στο σημείο αυτό, ισαπέχουν από την κορυφή της παραβολής.

Απόδειξη



Εικόνα 161: χαρακτηριστική ιδιότητα μέσου της υποεφαπτομένης της παραβολής

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΓ (εικόνα 164) και από την καθετότητα των ΔΓ και ΕΣ προκύπτει πως το Μ είναι μέσον και του τμήματος ΔΓ. Στο τρίγωνο ΔΓΓ₁, από το μέσον Μ της ΔΓ έχει χαραχθεί η παράλληλη ΜΑ προς την ΓΓ₁. Επομένως το σημείο Α είναι μέσον της πλευράς ΔΓ₁.

³⁵ Το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ της παραβολής ορίζεται ως “εφαπτομένη”, και η προβολή του ΔΓ₁ στον άξονα της ορίζεται ως “υποεφαπτομένη”. Επομένως οποιαδήποτε υποεφαπτομένη της Παραβολής έχει ως μέσον την κορυφή της Παραβολής (Dennis et al., 1996).

συγκεκριμένα σημεία A και E, καθώς και το σημείο τομής της εφαπτομένης στην κορυφή Σ του τόξου και της εφαπτομένης στην κορυφή A της Παραβολής. Προκύπτει η αναλογία:

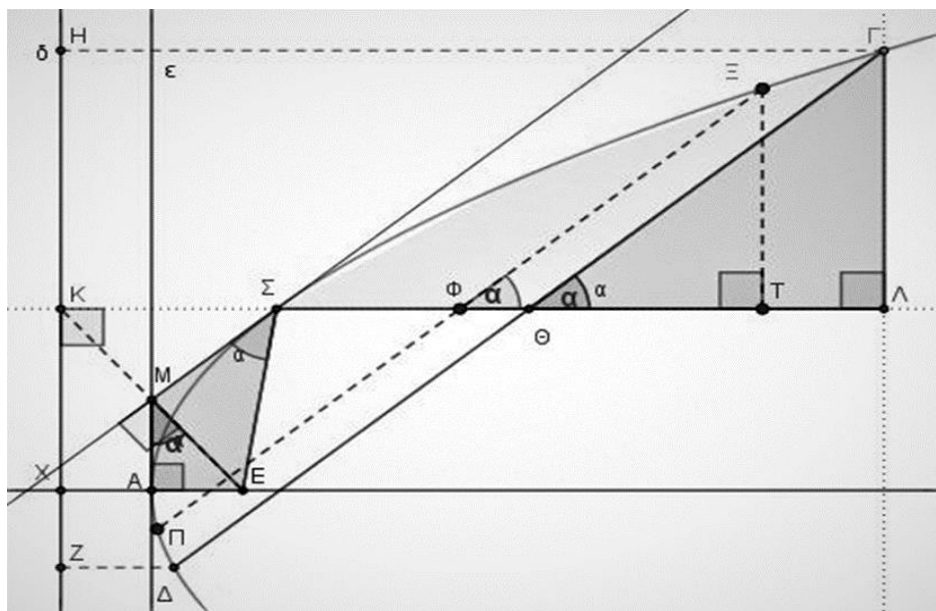
$$\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda E} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta E} = \frac{\Theta\Lambda}{\Lambda M} \Rightarrow \frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda E} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta E} \Rightarrow \Gamma\Lambda = \frac{\Lambda E \cdot \Gamma\Theta}{\Theta E} \Rightarrow \Gamma\Lambda = \frac{\Lambda E}{\Theta E} \cdot \Gamma\Theta \Rightarrow \Gamma\Lambda = \kappa \cdot \Gamma\Theta = \eta\mu\alpha \cdot \Gamma\Theta$$

όπου το κ είναι μία “σταθερή ποσότητα” ή καλύτερα μία παράμετρος για το συγκεκριμένο παραβολικό τόξο (και για όλα τα τόξα της Παραβολής αυτής με παράλληλες χορδές), και εξαρτάται μόνο από την γωνία μεταξύ των παραλλήλων χορδών και διαμέτρου των αντιστοίχων τόξων. Άρα από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{\Gamma\Lambda^2}{\Sigma\Theta} = 4 \cdot \Lambda E = 2p \Rightarrow \frac{(\eta\mu\alpha \cdot \Gamma\Theta)^2}{\Sigma\Theta} = 2p \Rightarrow \frac{\Gamma\Theta^2}{\Sigma\Theta} = \frac{2p}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{2p}{\kappa^2} = \mu$$

όπου το μ είναι μία “σταθερή ποσότητα” για το συγκεκριμένο παραβολικό τόξο (και για όλα τα τόξα της Παραβολής με παράλληλες χορδές), ή καλύτερα μία παράμετρος που εξαρτάται μόνο από την γωνία μεταξύ χορδής και διαμέτρου του τόξου. Παίρνοντας τυχαίο σημείο Ξ του παραβολικού τόξου και φέρνοντας παράλληλη χορδή ΞΠ με την χορδή ΓΔ (εικόνα 167), δημιουργείται τρίγωνο ΞΦΤ όμοιο με το ΓΘΛ, άρα και όμοιο με το ΑΜΕ. Επίσης έχειδειχθεί ότι τα παραβολικά τόξα που έχουν παράλληλες χορδές, έχουν την ίδια κορυφή άρα και την ίδια εφαπτομένη στην κορυφή αυτή. Συνεπώς ότι ισχύει για τα τρίγωνα ΓΘΛ και ΑΜΕ, θα ισχύει και για τα τρίγωνα ΞΦΤ και ΑΜΕ.

$$\frac{\Xi\Phi^2}{\Sigma\Phi} = \frac{2p}{\eta\mu^2\alpha} = \mu \Rightarrow \frac{\Gamma\Theta^2}{\Sigma\Theta} = \frac{\Xi\Phi^2}{\Sigma\Phi} = \mu \Rightarrow \frac{\Gamma\Theta^2}{\Xi\Phi^2} = \frac{\Sigma\Theta}{\Sigma\Phi}$$



Εικόνα 164

Αντιστρόφως, έστω καμπύλη η οποία έχει άξονα συμμετρίας και σε κάθε σημείο της δέχεται εφαπτομένη ευθεία με την οποία έχει μόνο ένα κοινό σημείο, και η καμπύλη βρίσκεται κάθε φορά στο ένα εκ των δύο ημιεπιπέδων που ορίζει η αντίστοιχη εφαπτομένη. Επίσης έστω

“τόξο” της καμπύλης αυτής και ευθεία ΚΛ που είναι παράλληλη με τον άξονα συμμετρίας και διχοτομεί την αντίστοιχη “χορδή” τέμνοντας την υπό γωνία α , και τέμνει το τόξο στο Σ. Εάν για δύο τυχαία σημεία Ξ, Γ οποιουδήποτε τόξου αυτής της καμπύλης, ισχύει η σχέση $\frac{\Gamma\Theta^2}{\Sigma\Theta} = \frac{\Xi\Phi^2}{\Sigma\Phi} = c$, όπου ΞΦ, ΓΘ είναι οι πλάγιες αποστάσεις (παράλληλως με την χορδή του τόξου) των Ξ, Γ από την ΚΛ, και ΣΦ, ΣΘ είναι οι αποστάσεις του σημείου Σ από τα Φ, Θ τότε η καμπύλη αυτή είναι Παραβολή, επειδή στην περίπτωση που επιλεγεί $\alpha=90^\circ$, και επομένως η χορδή τέμνει κάθετα τον άξονα συμμετρίας της καμπύλης, λόγω συμμετρίας η ΚΛ διέρχεται από την κορυφή Α της καμπύλης που ταυτίζεται με το Σ και για κάθε σημείο της θα ισχύει $\frac{\Gamma\Theta^2}{\Sigma\Theta} = c$. Είναι φανερό τότε πως αυτή η σχέση είναι ο ισοδύναμος ορισμός για την Παραβολή με ορθία ίση με c , όπως παρουσιάστηκε και στο αντίστροφο του 1^{ου} Θεωρήματος.

[14]

ΑΙΤΗΣΗ Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Κ. Ντόντος Ειδικότητα: Μαθηματικός ΠΕ03 Οργανική θέση: 9ο ΓΕΛ Πάτρας Τηλέφωνο: 6978722687 Ηλεκτρ. Δ/νση (e-mail): gkdodos@sch.gr	Προς : Διευθυντή 9ου ΓΕΛ Πάτρας Παρακαλώ να εγκρίνετε την διεξαγωγή της ερευνητικής πειραματικής διδασκαλίας με την διαμεσολάβηση μαθηματικών μηχανισμών με το τμήμα Β/θετική/1ο και με τίτλο: <i>«Εισαγωγή των μαθηματικών μηχανών στην ενοποιημένη διδασκαλία Άλγεβρας, Γεωμετρίας και Μαθηματικών Θετικού Προσανατολισμού Β΄ Λυκείου».</i> Η έρευνα αυτή πληροί τα κριτήρια, όπως αυτά αναφέρονται στον Οδηγό και συγκεκριμένα στο «ΜΕΡΟΣ Γ του Οδηγού για την Έγκριση Εκπαιδευτικών Προγραμμάτων και Ερευνών», που δημοσιεύθηκε από το Ι.Ε.Π. τον Ιανουάριο του 2022 και αφορά το άρθρο 88 του Νόμου 4823/3-8-2021 καθώς και τον συλλογικό προγραμματισμό της σχολικής μας μονάδας σύμφωνα με τον Νόμο 4692/2020. Ημερομηνία: 30/03/2022 Ο Αιτών
--	---

Συνημμένα:

- 1) Συνοπτικό Δελτίο Έρευνας
- 2) Έντυπο ενυπόγραφης συγκατάθεσης συμμετοχής μαθητή-τριας στην πειραματική διδασκαλία (μέσω μαθηματικών μηχανισμών)
- 3) ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ για ηχογράφηση και βιντεοσκόπηση.

Συνοπτικό Δελτίο Έρευνας

Τίτλος Έρευνας: «Εισαγωγή των μαθηματικών μηχανών στην ενοποιημένη διδασκαλία Άλγεβρας Γεωμετρίας και Μαθηματικών Θετικού Προσανατολισμού Β' Λυκείου».

Περίληψη: Οριζόντια προσέγγιση της έννοιας των Κωνικών τομών μέσα σε «διαφορετικά» μαθηματικά πλαίσια, για να υπάρξει σύνδεση αυτών των εννοιών με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις τους καθώς και ανακάλυψη ύπαρξης σχετικών εργαλείων τα οποία τις χαράσσουν.

Λέξεις Κλειδιά: Κωνικές τομές, κωνικογράφος, διεπιστημονικότητα, Καρτέσιος, Bonaventura Cavalieri, Frans van Schooten.

Επιλογή κύριου θεματικού άξονα της έρευνας: Διδακτική θεωρία και πράξη (Μαθηματικά και Τεχνολογία)

Ονοματεπώνυμο Υπεύθυνου Έρευνας: Γεώργιος Κ. Ντόντος
Ονοματεπώνυμο και ιδιότητα Μελών Τριμελούς Επιτροπής ή Επιβλέπουσας Καθηγήτριας: Κολέζα Ευγενία (Δρ. στο Πανεπιστήμιο Πάτρας)
Επιστημονικός Φορέας: Σχολή Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών (Τμήμα Επιστημών Εκπαίδευσης και Κοινωνικής Εργασίας). Διεύθυνση Φορέα: Πανεπιστημιούπολη Ρίου Πάτρας Τηλ. Επικοινωνίας: 2610969738
Ιδιότητα Ερευνητή: Εκπαιδευτικός του 9ου ΓΕΛ Πατρών & υποψήφιος Διδάκτορας Πανεπιστημίου Πατρών Διεύθυνση Ερευνητή: Νοταρά 143 Πάτρα 26442 Τηλέφωνο: 6978722687 e-mail: gkdodos@sch.gr & up1063811@upatras.gr
Διάρκεια Διεξαγωγής της Έρευνας στο σχολείο: Δύο διδακτικά δίωρα Προγραμματισμένος Χρόνος Ολοκλήρωσης/Δημοσίευσης Αύγουστος 2022
Μέγεθος Δείγματος: 18 μαθητές-τριες τμήματος θετικού προσανατολισμού Β' Λυκείου. Αριθμός Σχολείων: ένα (1) Γεωγραφικό Πεδίο Διεξαγωγής Έρευνας: (Περιφέρεια Δυτικής Ελλάδος/ Νομός Αχαΐας)
Δείγμα Έρευνας: 18 μαθητές-τριες Εκπαιδευτική Δομή: 9ο ΓΕΛ Πάτρας
Αναλαμβάνω την υποχρέωση να καταθέσω στη βιβλιοθήκη της αρμόδιας υπηρεσίας ένα ψηφιακό αντίγραφο της ολοκληρωμένης ή της δημοσιευμένης έρευνάς μουΥπογραφή:

Έντυπο ενυπόγραφης συγκατάθεσης συμμετοχής μαθητή-τριας στην πειραματική διδασκαλία (μέσω μαθηματικών μηχανισμών)

1. ΣΚΟΠΙΜΟΤΗΤΑ

Σκοπός αυτής της έρευνας (διδασκαλία) είναι η εισαγωγή καινοτόμου διδασκαλίας εννοιών μέσω ειδικών μαθηματικών μηχανισμών (διαβητών) που αφορούν την αφομοίωση της διδακτέας ύλης των Μαθηματικών Β' Λυκείου. Έχει ιδιαίτερη σημασία η εμπλοκή με την διαδικασία αυτή μαθητών και μαθητριών που επέλεξαν το θετικό προσανατολισμό σπουδών και αφορά την διδακτέα ύλη της Β' Λυκείου.

2. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Μέσα σε 2 διδακτικά δίωρα θα γίνει ανάλυση και μελέτη δύο μαθηματικών μηχανισμών σε προγραμματισμένη διαδικασία συμπλήρωσης σχετικών φύλλων εργασίας.

3. ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΑ ΟΦΕΛΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Οι μαθητές και οι μαθήτριες θα μπορέσουν να ανακαλύψουν έννοιες κρυμμένες μέσα στους μηχανισμούς καθώς και ισοδύναμους ορισμούς κάποιων γεωμετρικών αντικειμένων. Επίσης το διαρκές «πέρασμα» από την Άλγεβρα στη Γεωμετρία (και το αντίστροφο) θα σπάσει τις διαχωριστικές γραμμές μεταξύ των μαθηματικών περιοχών και θα δοθεί εμφανώς στους μαθητές-τριες η αίσθηση της καλύτερης κατανόησης των Μαθηματικών που ταυτόχρονα συνδέονται άμεσα με την Τεχνολογία.

4. ΠΙΘΑΝΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ

Επειδή όλα αυτά τα έτη οι μαθητές-τριες είναι κυρίως «δέκτες» διαλέξεων από τον διδάσκοντα, πιθανώς να τους δυσκολέψει η μαθητοκεντρική και ομαδική διδασκαλία σε επίπεδο διεπιστημονικό.

5. ΑΝΩΝΥΜΙΑ / ΠΡΟΣΤΑΣΙΑ ΠΡΟΣΩΠΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Είναι αυτονόητη η προστασία της ανωνυμίας των συμμετεχόντων καθώς και η προστασία των προσωπικών τους δεδομένων. Δηλαδή, δεν θα αναφερθούν τα επίθετα τους και τα email τους σε τρίτους (γραπτώς ή προφορικά) και ό, τι άλλο είναι προσωπικό δεδομένο τους.

6. ΑΡΝΗΣΗ / ΑΠΟΣΥΡΣΗ

Κάθε μαθητής ή μαθήτρια έχει το δικαίωμα να αρνηθεί τη συμμετοχή του/της στην καινοτόμο αυτή διδασκαλία ή να αποσυρθεί από αυτή σε οποιοδήποτε στάδιό της επιστρέφοντας στο αντίστοιχο τμήμα γενικής παιδείας όπου και ανήκει.

7. ΗΧΟΓΡΑΦΗΣΗ & ΒΙΝΤΕΟΣΚΟΠΗΣΗ

Για λόγους μελέτης των απαντήσεων από αυτές τις καινοτόμες πειραματικές διδασκαλίες, πρέπει να ηχογραφηθούν οι διάλογοι των μαθημάτων και να βιντεοσκοπηθούν κάποιες στιγμές των μαθητών με τους μηχανισμούς χωρίς βέβαια να φαίνονται πρόσωπα (μόνο τα χέρια των χειριστών μαθητών-τριών) ούτε να αναφέρονται επίθετα ή άλλα προσωπικά στοιχεία.

Συγκεκριμένα: σας δηλώνω υπεύθυνα ότι:

α. Η ηχογράφηση ή βιντεοσκόπηση (όχι τα πρόσωπα) των μαθητών-τριών θα γίνει αποκλειστικά για τις ανάγκες της έρευνας μου με τίτλο *«Εισαγωγή των μαθηματικών μηχανών στην ενοποιημένη διδασκαλία Άλγεβρας Γεωμετρίας και Μαθηματικών Θετικού Προσανατολισμού» για την Β΄ Λυκείου»*.

β. Τα αρχεία της ηχογράφησης και βιντεοσκόπησης δε θα χρησιμοποιηθούν για κανένα άλλο σκοπό παρά μόνο για τις ανάγκες συλλογής και ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων από τον διδάσκοντα καθηγητή Γεώργιο Ντόντο (ΠΕ03).

γ. Σε καμία περίπτωση δε θα επιχειρηθεί δημόσια προβολή των αρχείων της ηχογράφησης και βιντεοσκόπησης στο σύνολό τους ή έστω τμήματος αυτών, στο πλαίσιο οποιασδήποτε ερευνητικής ή ακαδημαϊκής δραστηριότητας του ερευνητή.

δ. Τα αρχεία της ηχογράφησης και βιντεοσκόπησης με τις συνεδρίες των μαθητών/-τριών θα καταστραφούν αμέσως μετά τη χρήση τους για τις ανάγκες συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας.

ε. Την απόλυτη και αποκλειστική ευθύνη για τη φύλαξη, διαχείριση και καταστροφή των εν λόγω αρχείων φέρει ο διδάσκων εκπαιδευτικός (Γεώργιος Ντόντος).

**ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ και ΥΠΕΥΘΥΝΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ -
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ**

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ / ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΗΔΕΜΟΝΑ

- Δηλώνω υπεύθυνα ότι μελέτησα όλες τις παραπάνω παραγράφους και αποδέχομαι τη συμμετοχή του παιδιού μου στην καινοτόμο αυτή διδασκαλία.
- Το παιδί μου διατηρεί το δικαίωμα να αποσυρθεί από τη διαδικασία της διδασκαλίας σε οποιοδήποτε στάδιο της διεξαγωγής της.

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΓΟΝΕΑ Ή ΚΗΔΕΜΟΝΑ/ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

(άρθρο 8 Ν. 1599/1986)

Η ακρίβεια των στοιχείων που υποβάλλονται με αυτή τη δήλωση μπορεί να ελεγχθεί με βάση το αρχείο άλλων υπηρεσιών (άρθρο 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986)

ΠΡΟΣ ⁽¹⁾ :	9ο ΓΕΛ Πάτρας						
Ο – Όνομα:	ΓΕΩΡΓΙΟΣ			Επώνυμο:	ΝΤΟΝΤΟΣ		
Όνομα και Επώνυμο Πατέρα:	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΝΤΟΝΤΟΣ						
Όνομα και Επώνυμο Μητέρας:	ΝΙΚΗ ΝΤΟΝΤΟΥ						
Ημερομηνία γέννησης ⁽²⁾ :	09/11/1963						
Τόπος Γέννησης:	ΑΘΗΝΑ						
Αριθμός Δελτίου Ταυτότητας:	ΑΒ344358			Τηλ:	6978722687		
Τόπος Κατοικίας:	ΠΑΤΡΑ		Οδός:	NOTAPA		Αριθ:	143 TK: 26442
Αρ. Τηλεομοιοτύπου (Fax):				Δ/ση Ηλεκτρ. Ταχυδρομείου (Email):	gkdodos@sch.gr		

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις ⁽³⁾, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

α. Η ηχογράφηση και βιντεοσκόπηση των μαθητών θα γίνει αποκλειστικά για τις ανάγκες της έρευνας με τίτλο «Εισαγωγή των μαθηματικών μηχανών στην ενοποιημένη διδασκαλία Άλγεβρας Γεωμετρίας και Μαθηματικών Θετικού Προσανατολισμού Β' Λυκείου».

β. Τα αρχεία της ηχογράφησης και βιντεοσκόπηση δε θα χρησιμοποιηθούν για κανένα άλλο σκοπό παρά μόνο για τις ανάγκες συλλογής και ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων.

γ. Σε καμία περίπτωση δε θα επιχειρηθεί δημόσια προβολή των αρχείων της ηχογράφησης και βιντεοσκόπηση στο σύνολό τους ή έστω τμήματος αυτών, στο πλαίσιο οποιασδήποτε ερευνητικής ή ακαδημαϊκής δραστηριότητας του ερευνητή.

δ. Τα αρχεία της ηχογράφησης και βιντεοσκόπηση με τις συνεδρίες των μαθητών/-τριών θα καταστραφούν αμέσως μετά

τη χρήση τους για τις ανάγκες συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας.

ε. Την απόλυτη και αποκλειστική ευθύνη για τη φύλαξη, διαχείριση και καταστροφή των εν λόγω αρχείων φέρει ο/η ερευνητής.

στ. Για κάθε μαθητή-τρια που πρόκειται να ηχογραφηθεί ή να βιντεοσκοπηθεί (όχι το πρόσωπο), έχει εξασφαλιστεί από τον/την ερευνητή η ενυπόγραφη συναίνεση, κατόπιν πλήρους ενημέρωσης, του γονέα ή του κηδεμόνα του/της μαθητή-τριας, για τη διενέργεια της ηχογράφησης ή βιντεοσκόπησης.

Ημερομηνία: 20

Ο – Η Δηλ.

[15]

Φύλλα εργασίας για την ομάδα van Schooten

(Ερώτηση 1^η) Χρησιμοποιώντας χάρακα και διαβήτη, να βρείτε σημεία του επιπέδου έτσι ώστε το καθένα να ισαπέχει από το σημείο A και την ευθεία (ε).

(Ερώτηση 2^η) Στον μηχανισμό που έχετε μπροστά σας, αφού μετακινήσετε τον κέρσορα G κατά μήκος της διαδρομής QR, να περιγράψετε αυτόν τον μηχανισμό με όση ακρίβεια μπορείτε. Συγκεκριμένα να περιγραφούν τα μέλη της και ο τρόπος άρθρωσής μεταξύ τους.

(Για μια πιο εύκολη περιγραφή, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γράμματα των παρακάτω εικόνων).

(Ερώτηση 2^η) Στον μηχανισμό που έχετε μπροστά σας, αφού μετακινήσετε τον κέρσορα G κατά μήκος της διαδρομής QR, να περιγράψετε αυτόν τον μηχανισμό με όση ακρίβεια μπορείτε. Συγκεκριμένα να περιγραφούν τα μέλη της και ο τρόπος άρθρωσής μεταξύ τους.

(Για μια πιο εύκολη περιγραφή, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γράμματα των παρακάτω εικόνων).

(Ερώτηση 3^η) Να απαριθμηθούν και μετά να περιγραφούν όλες οι αρθρώσεις του μηχανισμού καθώς εσείς μετακινείτε τον κέρσορα (δρομέα) G.

Στη συνέχεια να παρατηρήσετε από τι επηρεάζεται η κίνηση της μηχανής; Από έναν ή περισσότερους παράγοντες;

(Αν ένας μόνο παράγοντας καθορίζει την κίνηση της μηχανής, λέμε ότι η μηχανή έχει 1 βαθμό ελευθερίας. Σε άλλες περιπτώσεις έχει 2,3,... βαθμούς ελευθερίας.

Τελικά, πόσους βαθμούς ελευθερίας έχει αυτός ο μηχανισμός;

(Ερώτηση 4^η) Σχεδιάστε τον μηχανισμό αυτό (με απλές γραμμές). (Η διαδικασία αυτή καλείται «μονογραμμική απεικόνιση»).

(Ερώτηση 5^η) Το τετράπλευρο το οποίο υπάρχει στο σύστημα αυτό, τι τετράπλευρο είναι και γιατί; Ποιες γεωμετρικές ιδιότητες έχει το τετράπλευρο το οποίο αναγνωρίσατε προηγουμένως; Η ράβδος (ευθεία) DF τι είναι για αυτό το τετράπλευρο αυτό και ποιες ιδιότητες έχει;

(Ερώτηση 6^η) Αφού βάλουμε το μολύβι στην θέση D, περιγράψτε ποιες ιδιότητες έχει αυτή η θέση (σημείο).

Τελικά, για το σημείο D ποια ιδιότητα του μένει «αναλλοίωτη» καθώς κινείται ο δρομέας G και ο μηχανισμός είναι σε κίνηση;

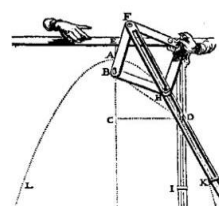
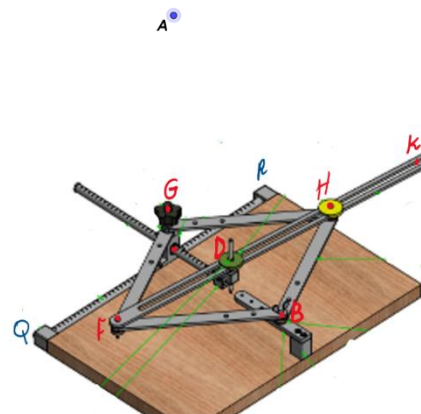
(Ερώτηση 7^η) Αφού μετακινήσετε τον δρομέα (κέρσορα) σε όλο το τμήμα QR, περιγράψτε τι σχεδιάζει η γραφίδα (μολύβι).

(Ερώτηση 8^η) Ανοίξτε το αρχείο “van Schooten 1. ggb” ή “van Schooten 2” το οποίο βρίσκεται στην επιφάνεια του H.Y, και αποτελεί μία προσομοίωση του μηχανήματος.

Μετακινείτε το σημείο G (κρατώντας σταθερό το αριστερό κουμπί του ποντικιού) έτσι ώστε να δημιουργήσετε κίνηση στο μηχανήμα.

(α) Το μηχανήμα φτιάχνει μία συνεχόμενη καμπύλη γραμμή;

(c)



(β) Ποιο είναι το κοινό χαρακτηριστικό όλων των σημείων της καμπύλης;

(Ερώτηση 9^η) Αφού ορίσετε ως p την σταθερή απόσταση (BE) του σημείου B από τον άξονα κύλισης QR , και στη συνέχεια ορίσετε ως C την κάθετη προβολή του σημείου D στην ευθεία BE , να εφαρμόσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BCD .

Στη συνέχεια να εντάξετε στο αποτέλεσμά σας και τις αποστάσεις της γραφίδας D

(α) από τον άξονα κύλισης QR , δηλαδή το (DG) , και

(β) από την ευθεία BE , δηλαδή το (DC) .

(Ερώτηση 10^η) Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τοποθετήσει άξονες «Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων».

Αφού έχετε ήδη ορίσει ως p την σταθερή απόσταση (BE) του σημείου B από τον άξονα κύλισης QR στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων G & C , θεωρώντας ότι το σημείο D έχει συντεταγμένες (x, y) .

(Ερώτηση 11^η) Αφού ορίσατε ως p την σταθερή απόσταση (BE) του σημείου B από τον άξονα κύλισης QR , να εφαρμόσετε πάλι το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BCD , χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των αντίστοιχων σημείων για να εκφράσετε τα μήκη των πλευρών που θα χρησιμοποιήσετε.

Ποια σχέση προκύπτει (και συνδέει) τις συντεταγμένες του σημείου $D(x, y)$.

Από την σχέση που μόλις βρήκατε, τι είδους καμπύλη έχει χαράξει η γραφίδα που τοποθετήσαμε στο σημείο D ;

Ποιος συλλογισμός σας οδήγησε σε αυτήν την υπόθεση;

Προκύπτει κάποια γνωστή συνάρτηση από το μάθημα της Άλγεβρας;

(Ερώτηση 12^η) Υπάρχει κάποιος σταθερός όρος στην εξίσωση (τύπο) της συνάρτησης που βρήκατε;

Ποιο είναι το πρόσημο αυτού του σταθερού όρου και πως ερμηνεύεις αυτό σχετικά με την γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκατε;

(Ερώτηση 13^η) Τι πρόσημο έχει ο συντελεστής του x^2 στην εξίσωση της συνάρτησης που βρήκες;

Πως ερμηνεύεις το πρόσημο του συντελεστή του x^2 σχετικά με την γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκες;

(Ερώτηση 14^η) Στην εξίσωση της συνάρτησης που βρήκες, ποια μεταβολή θα υποστεί ο συντελεστής του x^2 εάν μεγαλώσει η απόσταση p ;

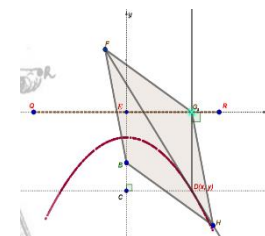
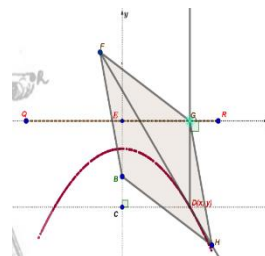
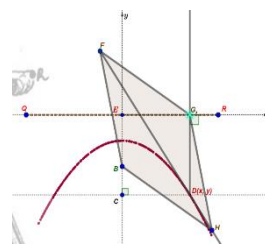
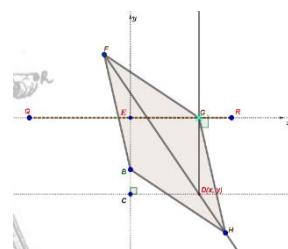
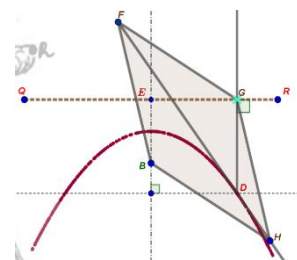
Ποια επίπτωση έχει αυτό στη γραμμή την οποία χαράσσει ο μηχανισμός ;

Επαλήθευσε το συμπέρασμά σου στην μηχανή που έχεις μπροστά σου, αλλάζοντας την θέση του σταθερού σημείου B .

Επαλήθευσε το συμπέρασμά σου στο αρχείο *Descartes 1.ggb* του Η.Υ., αλλάζοντας την θέση του σημείου B (πατώντας με αριστερό διαρκές κλικ πάνω στο B).

(Ερώτηση 15^η) (α) ΞΑΝΑΓΥΡΙΣΤΕ ΣΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ με βάση τις γνώσεις που αποκτήσατε κατά τη διάρκεια του Εργαστηρίου.

“Βρείτε ΟΛΑ τα σημεία που απέχουν εξίσου από το σημείο A και την ευθεία ϵ ”.



(β) Αν θέλατε να δώσετε ένα όνομα στη μαθηματική μηχανή την οποία μελετήσατε, πως θα την ονομάζατε;

(Ερώτηση 16^η) Στο αρχείο *van Shooten 1 ή 2* του HY, μεγαλώστε το μήκος του QR , χρησιμοποιώντας την παράμετρο ν που υπάρχει στο κάτω μέρος της οθόνης σας.

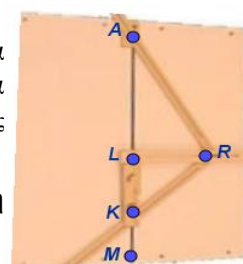
Στη συνέχεια μετακινείτε τον κέρσορα (οδηγό) G και περιγράψτε σε τι διαφέρει η χαρασσόμενη καμπύλη από την προηγούμενη.

Εάν η οριζόντια μπάρα QR είχε «άπειρο μήκος», τότε ποιο χαρακτηριστικό της καμπύλης (την οποία σχεδιάζει η μηχανή) εξαρτάται από το μήκος των πλευρών του ρόμβου;

Ποιοι είναι οι ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ της μηχανής;

Φύλλα εργασίας για την ομάδα Cavalieri

Ερώτηση 1^η) Μετακινώντας τον κέρσορα LK κατά μήκος της διαδρομής AM , να περιγράψετε αυτόν τον μηχανισμό με όση ακρίβεια μπορείτε (πλήθος και σχήμα εξαρτημάτων, είδη αρθρώσεων) (Για μια πιο εύκολη περιγραφή, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γράμματα της εικόνας).



(Ερώτηση 2^η) Τι αλλάζει και τι μένει σταθερό κατά την κίνηση της μηχανής; (Η αλλαγή μπορεί να αφορά αλλαγή θέσης, μήκους, γωνίας, σχήματος κλπ.)

(Ερώτηση 3^η) Να απαριθμηθούν και μετά να περιγραφούν όλες οι αρθρώσεις του μηχανισμού καθώς εσείς μετακινείτε τον κέρσορα LK . Στη συνέχεια να παρατηρήσετε από τι επηρεάζεται η κίνηση της μηχανής; Από έναν ή περισσότερους παράγοντες; (Αν ένας μόνο παράγοντας καθορίζει την κίνηση της μηχανής, λέμε ότι η μηχανή έχει 1 βαθμό ελευθερίας. Σε άλλες περιπτώσεις έχει 2, 3, ... κλπ.)

Τελικά, πόσους βαθμούς ελευθερίας έχει αυτός ο μηχανισμός;

(Ερώτηση 4^η) Σχεδιάστε τον μηχανισμό αυτό (με απλές γραμμές). (Η διαδικασία αυτή καλείται «μονογραμμική απεικόνιση»).

(Ερώτηση 5^η) Αφού μετακινήσετε μερικές φορές τον κέρσορα (δρομέα) KL , απαντήστε στα επόμενα ερωτήματα:

Ποια μεγέθη του μηχανισμού μεταβάλλονται (ως προς μέτρο, θέση,...);

Ποια εξ αυτών μεταβάλλονται ανεξάρτητα από την μεταβολή των υπολοίπων;

(Ερώτηση 6^η) Στην διπλανή εικόνα, βλέπετε τη γεωμετρική αναπαράσταση του μηχανήματος.

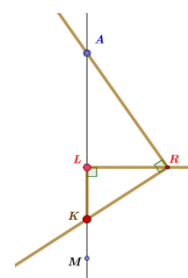
Υπάρχουν γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του μηχανήματος (πχ σχέσεις μεταξύ ευθ. τμημάτων, γωνιών, τριγώνων κλπ.) ;

Από τις σχέσεις που ίσως προκύπτουν, μπορείτε να συμπεράνετε κάτι σχετικά με το σημείο R και κάποιες μετρικές σχέσεις για τα ευθύγραμμα τμήματα του μηχανισμού;

(Ερώτηση 7^η) Αφού βάλουμε την γραφίδα ή το μολύβι στην θέση R , περιγράψτε ποιες ιδιότητες έχει αυτή η θέση.

Τελικά, για το σημείο R ποια ιδιότητα του μένει «αναλλοίωτη» καθώς κινείται ο δρομέας LK (και ο μηχανισμός επίσης) ;

(Ερώτηση 8^η) Αφού μετακινήσετε τον δρομέα (κέρσορα) LK , περιγράψτε τι σχεδιάζει η γραφίδα (μολύβι).



(Ερώτηση 9^η) Ανοίξτε το αρχείο “*Cavalieri 1. ggb*” το οποίο βρίσκεται στην επιφάνεια του Η.Υ, και αποτελεί μία προσομοίωση του μηχανήματος.

Κάνοντας δεξί κλικ πάνω στο σημείο R , ενεργοποιήστε την εντολή «ίχνος ενεργό».

Μετακινείτε το LK (κρατώντας σταθερό το αριστερό κουμπί του ποντικιού), έτσι ώστε να δημιουργήσετε κίνηση στο μηχανήμα.

(α) Το μηχανήμα φτιάχνει μία συνεχόμενη καμπύλη γραμμής;

(β) Ποιο είναι το κοινό χαρακτηριστικό όλων των σημείων της καμπύλης;

(Ερώτηση 10^η) Σχεδιάστε ένα τετράγωνο με μία του πλευρά το τμήμα RL και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μία πλευρά το LA και την άλλη ίση με το LK , έτσι ώστε να έχουν κοινή την ορθή γωνία L . (Το ορθογώνιο να ονομασθεί $LATS$)

Χρησιμοποιώντας την σχέση που προέκυψε μεταξύ των τμημάτων RL , LA και LK , τι προκύπτει για τα εμβαδά αυτών των τετραπλεύρων (σε τυχαία θέση του δρομέα LK);

Τι καταφέρνει αυτός ο μηχανισμός σχετικά με το εμβαδόν του ορθογωνίου $LATS$;

(Ερώτηση 11^η) Εάν το μήκος του τμήματος LK ισούται με 1, τότε ποια σχέση συνδέει τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων RL και AL ;

Τελικά αυτή η μηχανή τι μπορεί να υπολογίσει για τους θετικούς αριθμούς;

(Ερώτηση 12^η) Μετακινώντας τον κέρσορα LK , αλλάζει η διάσταση LA του ορθογωνίου με αποτέλεσμα να αλλάζει και η πλευρά RL του ισεμβαδικού τετραγώνου.

Σε πέντε διαδοχικές θέσεις του κέρσορα, χαράξτε πάνω στο χαρτί του μηχανισμού (κατά το δυνατόν) το ορθογώνιο $LATS$ και το αντίστοιχο ισεμβαδικό τετράγωνο $LRPQ$. Στη συνέχεια σημειώστε (με το μολύβι σας) τις διαδοχικές θέσεις της κορυφής R του μηχανισμού.

Εάν αντί για 5 διαδοχικές θέσεις, λαμβάνετε 50 διαδοχικές θέσεις, τι σχήμα θα «αναδυόταν» από τις αντίστοιχες θέσεις της κορυφής R ;

Βάζοντας την γραφίδα (μολύβι) στο σημείο R του μηχανισμού και μετακινώντας τον κέρσορα LK , επιβεβαιώστε και διατυπώστε την εικασία σας. Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας στο αντίστοιχο αρχείο *Cavalieri 2. ggb* που βρίσκεται στην οθόνη του Η.Υ.

(Ερώτηση 13^η) Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τοποθετήσει άξονες Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Να ορίσετε συντεταγμένες για τα σημεία L και K , θεωρώντας ότι το σταθερό σημείο A έχει συντεταγμένες $(0,0)$ και το $R(x,y)$. (Ορίστε ως $c > 0$ το σταθερό μήκος του τμήματος LK της μηχανής).

(Ερώτηση 14^η) Επαναδιατυπώστε και σχολιάστε την γεωμετρική σχέση που προέκυψε στην προηγούμενη φάση από τη σύγκριση των ορθογωνίων τριγώνων χρησιμοποιώντας πλέον τις συντεταγμένες των κορυφών των τριγώνων.

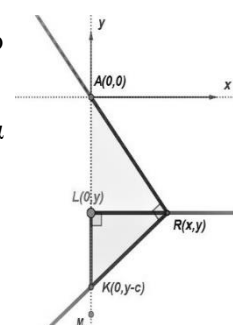
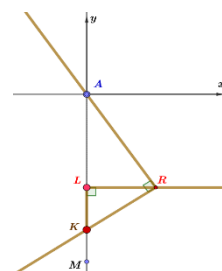
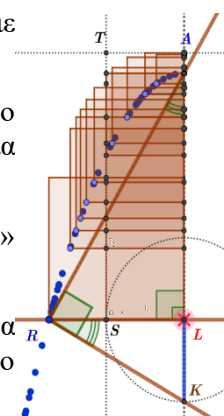
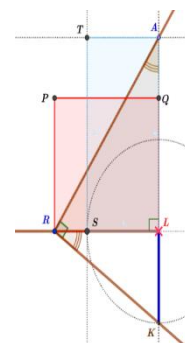
Η τελευταία σχέση που προκύπτει αφορά τις συντεταγμένες του σημείου R .

Ποια γνωστή συνάρτηση σας θυμίζει (αφού στο πρώτο μέλος της θα έχετε την τεταγμένη του σημείου R);

Τίνος γεωμετρικού τόπου αποτελεί την αντίστοιχη εξίσωση; Να περιγραφεί και να σχεδιαστεί.

(Ερώτηση 15^η)

Τι σημαίνει ότι ο συντελεστής του x^2 είναι αρνητικός;

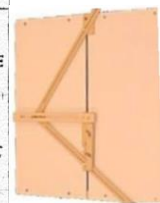
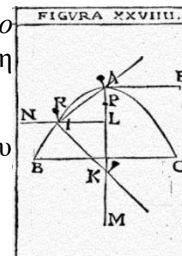


Τι θα συμβεί στον συντελεστή του x^2 εάν μεγαλώσει το μήκος c του τμήματος LK ;

Ποια επίπτωση έχει αυτό στη γραμμή που χαράσσει το εργαλείο;

(Ερώτηση 16^η)

Βλέπετε το αυθεντικό σχήμα του εργαλείου, όπως το έφτιαξε ο Cavalieri (Κεφάλαιο XLVI στο βιβλίο «*Lo specchio ustorio -the burning mirror*», 1632), και μια σύγχρονη ανακατασκευή του, όπως αυτή που έχετε μπροστά σας.



Μπορείτε να τοποθετήσετε τα γράμματα από το αυθεντικό σχήμα στην εικόνα του αντίγραφου;

Σε τι μοιάζουν οι δυο απεικονίσεις; Σε τι διαφέρουν;

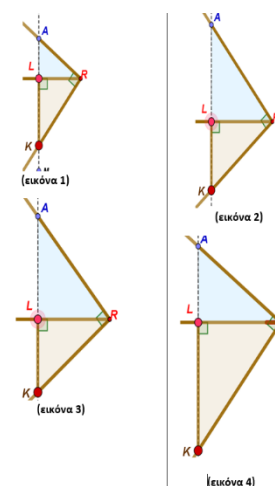
Η σύγχρονη ανακατασκευή μπορεί να φτιάξει την καμπύλη που φαίνεται στο αυθεντικό κείμενο; Σχολιάστε λεπτομερώς.

(Ερώτηση 17^η)

Μεταβάλλοντας κάποιες παραμέτρους του εργαλείου, ίσως μπορούμε να πάρουμε διαφορετική καμπύλη.

Στα πρώτα 2 σχήματα (εικόνες 1 και 2) έχουμε αλλάξει τα μήκη AR και RK , ενώ στα επόμενα 2 σχήματα (εικόνες 3 και 4) αλλάξαμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος KL .

Αιτιολογείστε (για κάθε περίπτωση) τις αλλαγές που προκαλούνται στην καμπύλη που θα σχεδιάσει η γραφίδα της μη

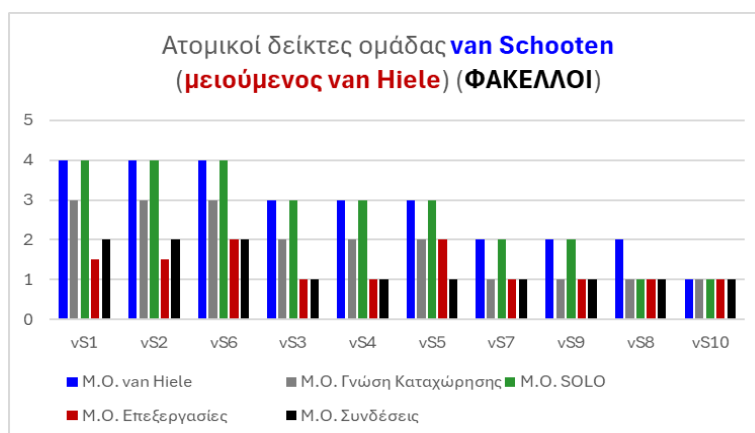


[16] Ατομική & Ομαδική αξιολόγηση μαθητών-τριών στους 5 δείκτες με βάση τους «φακέλλους» στα μαθήματα Γεωμετρίας και Μαθηματικών προσανατολισμού στο σχολείο τους.

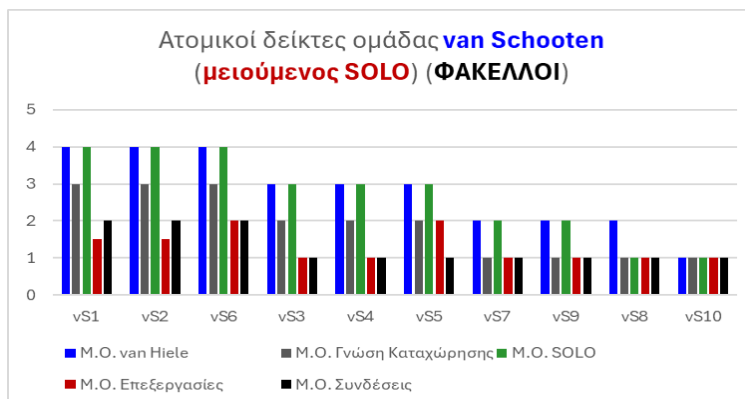
ΟΜΑΔΑ «van Schooten»

Πίνακας 9: Ομάδα van Schooten (ατομική αξιολόγηση μαθητών από τα μαθήματα στο σχολείο)

	Επίπεδα van Hiele	Γνώση καταχώρησης	Ταξινόμηση SOLO	Επεξεργασίες	Συνδέσεις
vS1	Παρ (4)	ΓΜΤΚ (3)	Σχε (4)	Συν (1) & Σημ (2)	ΥΣ (2)
vS2	Παρ (4)	ΓΜΤΚ (3)	Σχε (4)	Συν (1) & Σημ (2)	ΥΣ (2)
vS3	Αφ (3)	ΓΤΚ (2)	Πολυ (3)	Συν (1)	ΙΣ (1)
vS4	Αφ (3)	ΓΤΚ (2)	Πολυ (3)	Συν (1)	ΙΣ (1)
vS5	Αφ (3)	ΓΤΚ (2)	Πολυ (3)	Σημ (2)	ΙΣ (1)
vS6	Παρ (4)	ΓΜΤΚ (3)	Σχε (4)	Σημ (2)	ΥΣ (2)
vS7	Αν (2)	ΓΜΚ (1)	Μονο (2)	Συν (1)	ΙΣ (1)
vS8	Αν (2)	ΓΜΚ (1)	Προ (1)	Συν (1)	ΙΣ (1)
vS9	Αν (2)	ΓΜΚ (1)	Μονο (2)	Συν (1)	ΙΣ (1)
vS10	Οπτ (1)	ΓΜΚ (1)	Προ (1)	Συν (1)	ΙΣ (1)



Εικόνα 165: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στα μαθήματα του σχολείου (ομάδα van Schooten)



Εικόνα 166: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στα μαθήματα του σχολείου (ομάδα van Schooten)

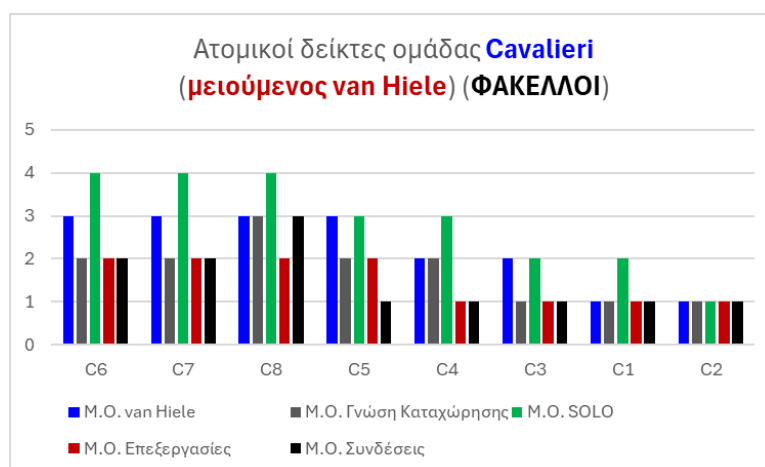
Πίνακας 10: Ομάδα van Schooten (αξιολόγηση ομάδας από τα μαθήματα στο σχολείο)

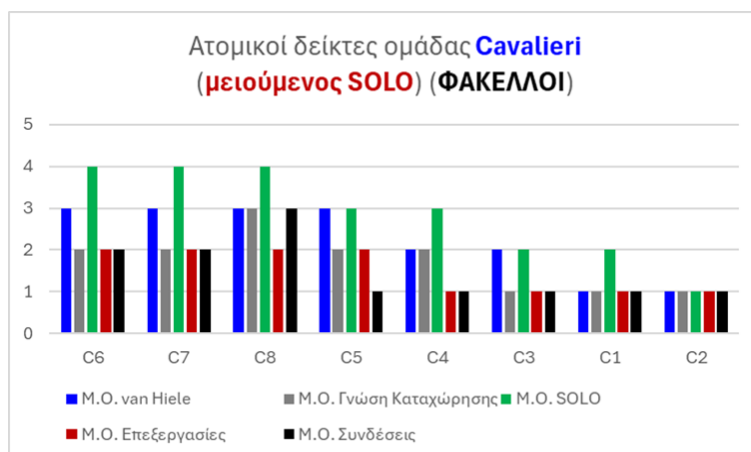
	(van Hiele)	(Γνώση Καταχώρησης)	(SOLO)	(Συνδέσεις)	(Επεξεργασίες)
<i>N</i>	10	10	10	10	10
<i>M</i>	2,8	1,9	2,7	1,3	1,3
<i>δ</i>	3	2	3	1	1
<i>S</i>	1	0,9	1,1	0,5	0,4
<i>R</i>	3	2	3	1	1
<i>min</i>	1	1	1	1	1
<i>max</i>	4	3	4	2	2

ΟΜΑΔΑ «Cavalieri»

Πίνακας 11: Ομάδα Cavalieri (ατομική αξιολόγηση μαθητών από τα μαθήματα στο σχολείο)

	Επίπεδα van Hiele	Γνώση καταχώρησης	Ταξινόμηση SOLO	Επεξεργασίες	Συνδέσεις
C1	Οπτ (1)	ΓΜΚ (1)	Μono (2)	Συν (1)	ΙΣ (1)
C2	Οπτ (1)	ΓΜΚ (1)	Προ (1)	Συν (1)	ΙΣ (1)
C3	Αν (2)	ΓΜΚ (1)	Μono (2)	Συν (1)	ΙΣ (1)
C4	Αν (2)	ΓΤΚ (2)	Πολυ (3)	Συν (1)	ΙΣ (1)
C5	Αφ (3)	ΓΤΚ (2)	Πολυ (3)	Σημ (2)	ΙΣ (1)
C6	Αφ (3)	ΓΤΚ (2)	Σχε (4)	Σημ (2)	ΥΣ (2)
C7	Αφ (3)	ΓΤΚ (2)	Σχε (4)	Σημ (2)	ΥΣ (2)
C8	Αφ (3)	ΓΜΤΚ (3)	Σχε (4)	Σημ (2)	ΜΣ (3)

**Εικονάκι 167:** Ατομικοί δείκτες κατανόησης στα μαθήματα του σχολείου (ομάδα Cavalieri)



Εικόνα 168: Ατομικοί δείκτες κατανόησης στα μαθήματα του σχολείου (ομάδα Cavalieri)

Πίνακας 12: Ομάδα Cavalieri (αξιολόγηση ομάδας από τα μαθήματα στο σχολείο)

	(van Hiele)	(Γνώση Καταχώρησης)	(SOLO)	(Συνδέσεις)	(Επεξεργασίες)
<i>N</i>	8	8	8	8	8
<i>M</i>	2,2	1,8	2,9	1,5	1,5
<i>δ</i>	2,5	2	3	1	1,5
<i>S</i>	0,9	0,7	1,1	0,5	0,8
<i>R</i>	2	2	3	2	1
<i>max</i>	3	3	4	2	3
<i>min</i>	1	1	1	1	1

[17] Πίνακες & Γραφήματα ταξινόμησης δεικτών κατανόησης

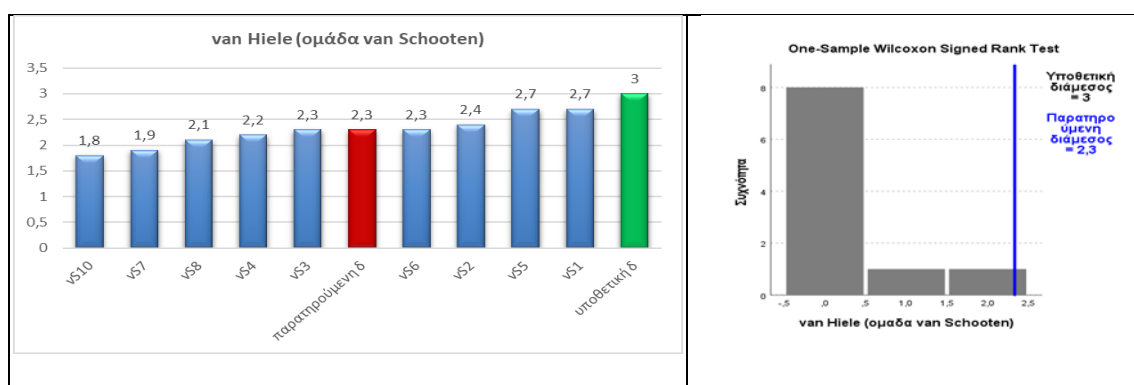
Γνωστικός δείκτης «van Hiele»

	H_0	Έλεγχος	$P (value)^{a,b}$	Απόφαση
1	$\delta = 3$.	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,005	Απορρίπτεται η H_0
a.	Επίπεδο σημαντικότητας = 0,05.			
b.	Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.			

Πίνακας 13: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων (van Hiele για την ομάδα van Schooten)

Πίνακας 14: Περίληψη ελέγχου Wilcoxon signed rank (για ένα δείγμα)

N	10
Στατιστικός έλεγχος	0,0
Τυπικό σφάλμα	9,8
Z	-2,8
P	0,005



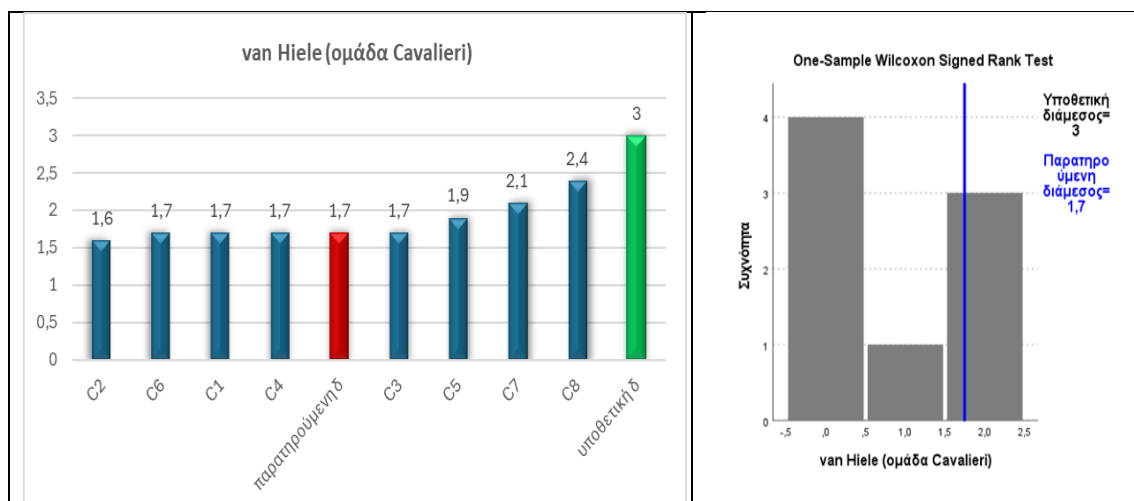
Εικόνα 169: μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη van Hiele (ομάδα van Schooten)

Πίνακας 15: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων (van Hiele για την ομάδα Cavalieri)

	H_0	Έλεγχος	$P (value)^{a,b}$	Απόφαση
1	$\delta = 3$.	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,011	Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση
a.	Επίπεδο σημαντικότητας = 0,05.			
b.	Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.			

Πίνακας 16: Περίληψη ελέγχου Wilcoxon signed rank (για ένα δείγμα)

N	8
Στατιστικός έλεγχος	0,0
Τυπικό σφάλμα	7,1
Z	-2,5
P	0,011



Εικόνα 170: μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη van Hiele (ομάδα Cavalieri)

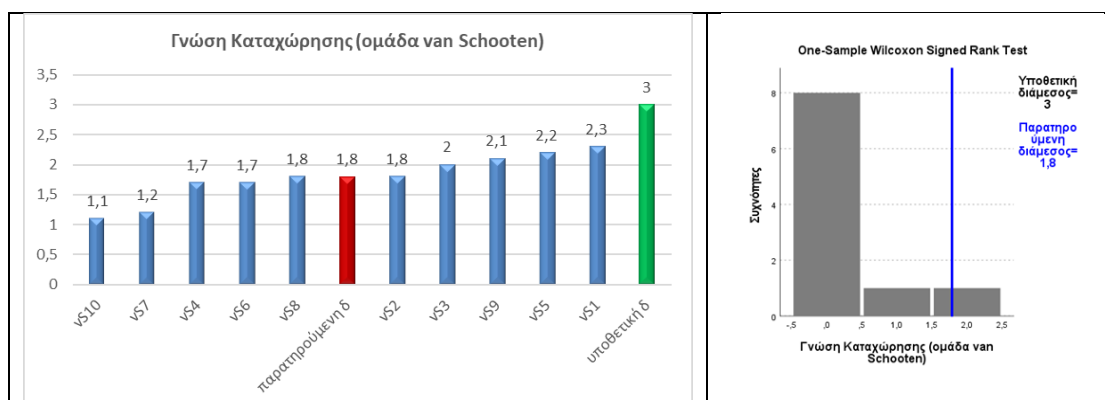
Γνωστικός δείκτης «Γνώση Καταχώρησης»

Πίνακας 17: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων (Γνώση Καταχώρησης για την ομάδα van Schooten)

H_0	Έλεγχος	Σημαντικότητα ^{a,b}	Απόφαση
1 $\delta = 3$	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,005	Απορρίπτεται η H_0
a. Το επίπεδο σημαντικότητας είναι 0,05.			
b. Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.			

Πίνακας 18: Περίληψη ελέγχου Wilcoxon signed rank (για ένα δείγμα)

N	10
Στατιστικός έλεγχος	0,0
Τυπικό σφάλμα	9,8
Z	-2,8
p	0,005



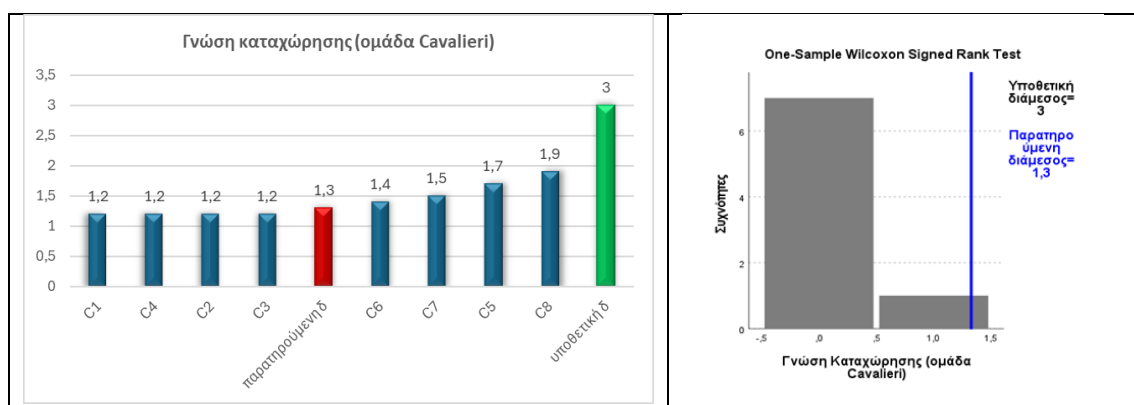
Εικόνα 171: μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη «Γνώση Καταχώρησης» (ομάδα van Schooten)

Πίνακας 19: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων (Γνώση Καταχώρησης για την ομάδα Cavalieri)

	H_0	Έλεγχος	P (value) ^{a,b}	Απόφαση
1	$\delta = 3$	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,012	Απορρίπτεται η H_0 .
a. Επίπεδο σημαντικότητας = 0,05.				
b. Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.				

Πίνακας 20: Έλεγχος κατάταξης Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα

N	8
Στατιστικός έλεγχος	0,0
Τυπικό σφάλμα	7,1
Z	-2,5
P	0,012

**Εικόνα 172:** μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη «Γνώση Καταχώρησης» (ομάδα Cavalieri)

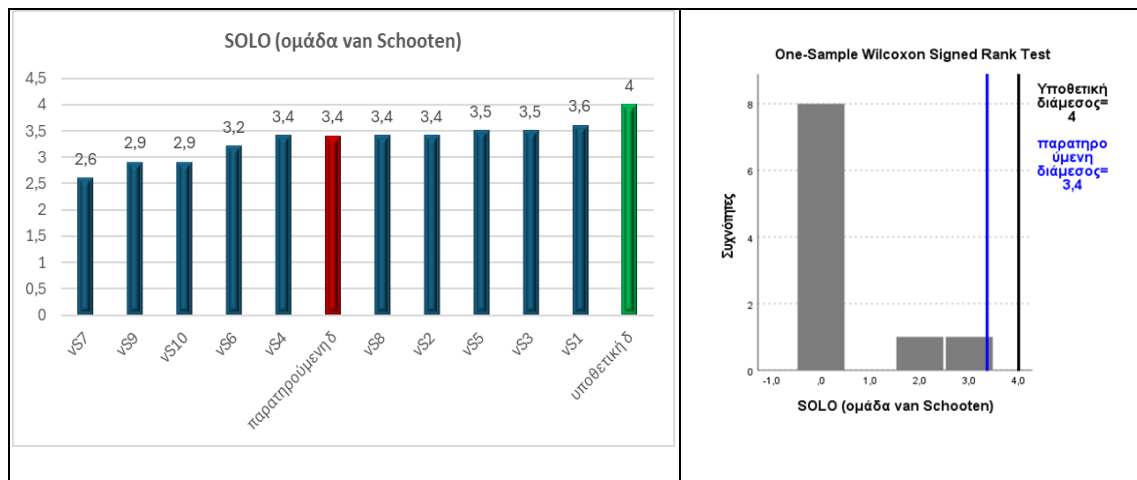
Δείκτης «SOLO» για την γνωστική δομή μέσω δραστηριοτήτων

Πίνακας 21: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων (SOLO για την ομάδα van Schooten)

	H_0	Έλεγχος	P (value) ^{a,b}	Απόφαση
1	$\delta = 4$.	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,005	Απορρίπτεται η H_0 .
a. Το επίπεδο σημαντικότητας είναι 0,05.				
b. Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.				

Πίνακας 22: Περίληψη ελέγχου Wilcoxon signed rank (για ένα δείγμα)

N	10
Στατιστικός έλεγχος	0,0
Τυπικό σφάλμα	9,8
Z	-2,8
P (value)	0,005



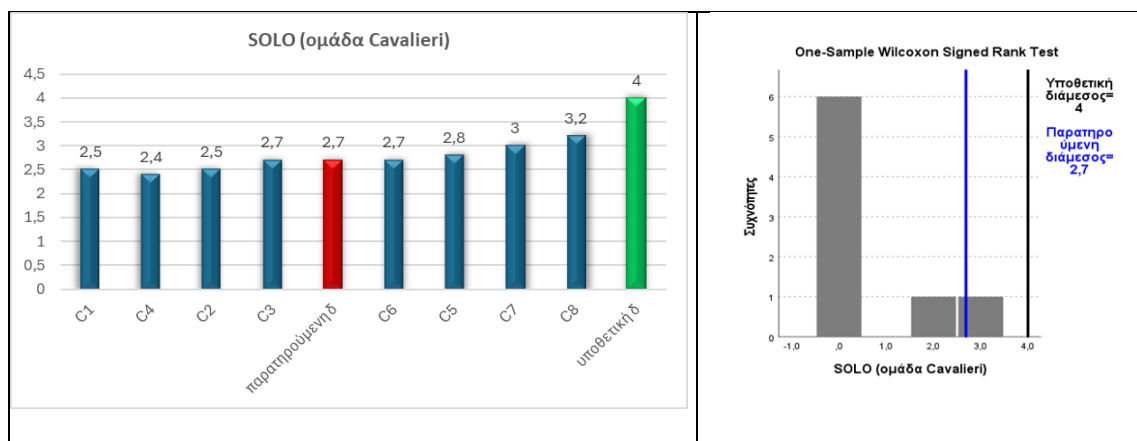
Εικόνα 173: μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη «SOLO» (ομάδα van Schooten)

Πίνακας 23: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων (SOLO για την ομάδα Cavalieri)

H_0	Έλεγχος	$P (value)^{a,b}$	Απόφαση
1 $\delta = 4$.	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,012	Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.
a. Επίπεδο σημαντικότητας = 0,05.			
b. Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.			

Πίνακας 24: Περίληψη ελέγχου Wilcoxon signed rank (για ένα δείγμα)

N	8
Στατιστικός έλεγχος	0,0
Τυπικό σφάλμα	7,1
Z	-2,5
P (value)	0,012



Εικόνα 174: μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη «SOLO» (ομάδα Cavalieri)

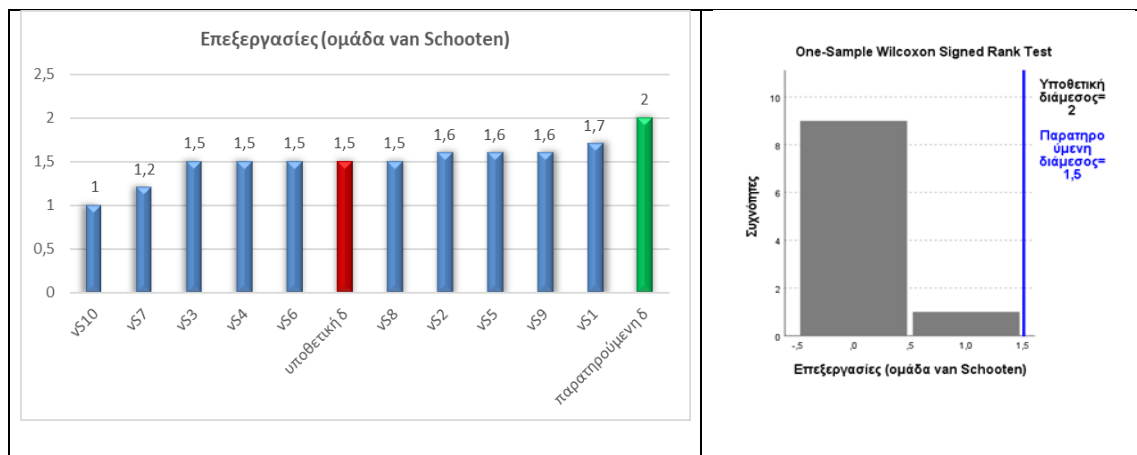
Δείκτης «Επεξεργασίες» για την γνωστική δομή μέσω δραστηριοτήτων

Πίνακας 25: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων («Επεξεργασίες» για την ομάδα van Schooten)

	H_0	Έλεγχος	P (value). ^{a,b}	Απόφαση
1	$\delta = 2$.	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,005	Απορρίπτεται η H_0 .
a. Το επίπεδο σημαντικότητας είναι 0,05.				
b. Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.				

Πίνακας 26: Περίληψη ελέγχου Wilcoxon signed rank signed rank (για ένα δείγμα)

N	10
Στατιστικός έλεγχος	0,0
Τυπικό σφάλμα	9,8
Z	-2,8
P	0,005



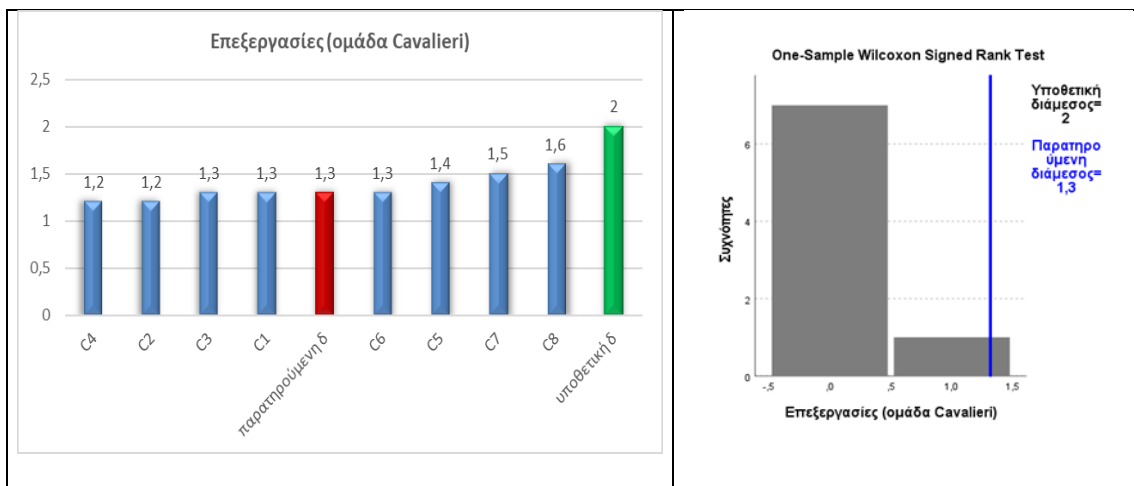
Εικόνα 175: μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη «Επεξεργασίες» (ομάδα van Schooten)

Πίνακας 27: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων («Επεξεργασίες» για την ομάδα Cavalieri)

	H_0	Έλεγχος	P (value). ^{a,b}	Απόφαση
1	$\delta = 2$.	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,012	Απορρίπτεται η H_0 .
a. Το επίπεδο σημαντικότητας είναι 0,05.				
b. Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.				

Πίνακας 28: Περίληψη ελέγχου Wilcoxon signed rank (για ένα δείγμα)

N	8
Στατιστικός έλεγχος	0,0
Τυπικό σφάλμα	7,1
Z	-2,5
P	0,012



Εικόνα 176: μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη «Επεξεργασίες» (ομάδα Cavalieri)

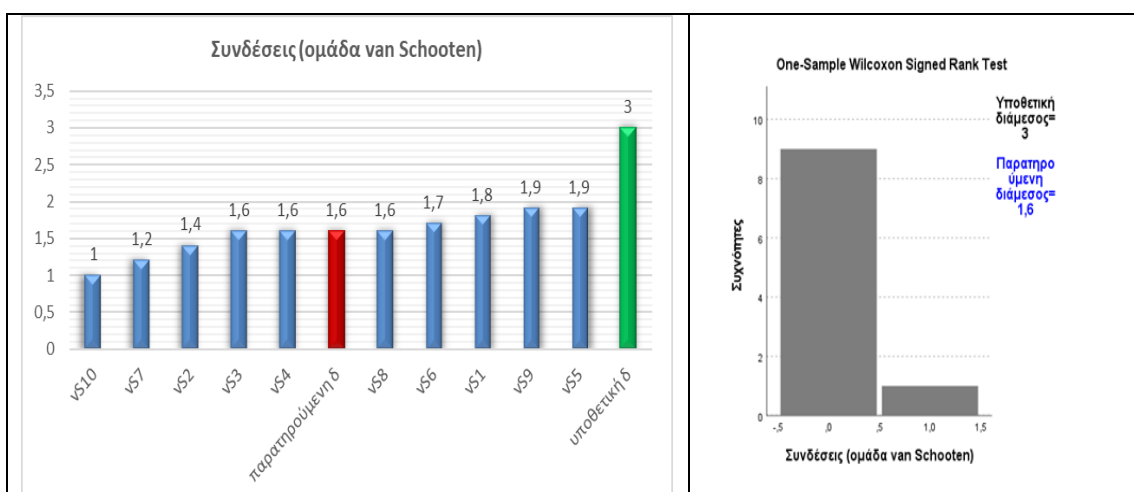
Δείκτης «Συνδέσεις» για την γνωστική δομή μέσω δραστηριοτήτων

Πίνακας 29: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων (Συνδέσεις για την ομάδα van Schooten)

	H_0	Έλεγχος	$P(\text{value})^{a,b}$	Απόφαση
1	$\delta = 3$	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,005	Απορρίπτεται η H_0 .
a.	Το επίπεδο σημαντικότητας είναι 0,05.			
b.	Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.			

Πίνακας 30: Περίληψη ελέγχου Wilcoxon signed rank (για ένα δείγμα)

N	10
Στατιστικός έλεγχος	0,0
Τυπικό σφάλμα	9,8
Z	-2,8
P	0,005



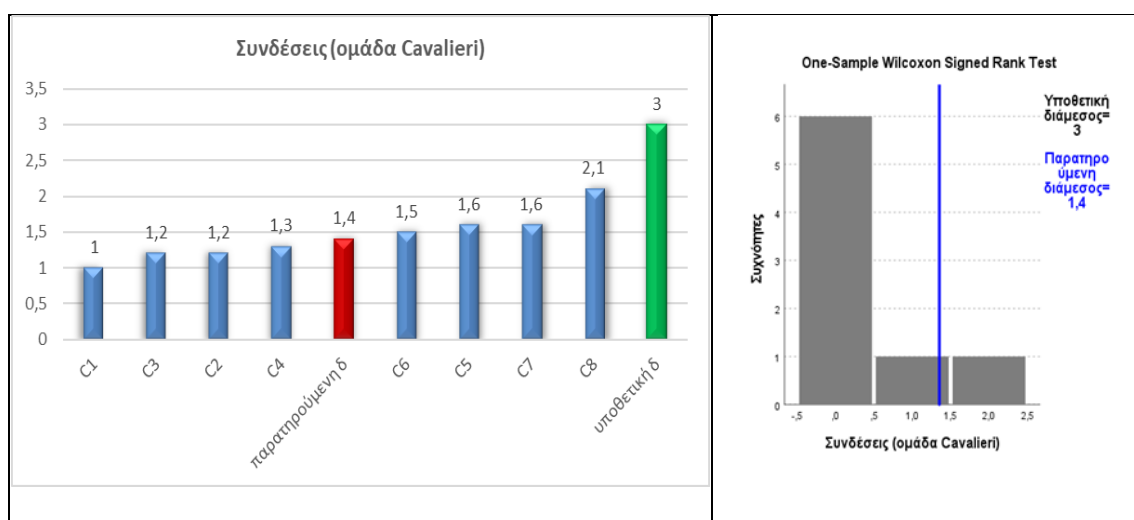
Εικόνα 177: μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη «Συνδέσεις» (ομάδα van Schooten)

Πίνακας 31: Σύνοψη ελέγχου υποθέσεων (Συνδέσεις για την ομάδα Cavalieri)

	H_0	Έλεγχος	$P(\text{value})$. ^{a,b}	Απόφαση
1	$\delta = 3$	Wilcoxon signed rank για ένα δείγμα	0,012	Απορρίπτεται η H_0
a. Το επίπεδο σημαντικότητας είναι 0,05.				
b. Εμφανίζεται η ασυμπτωτική σημαντικότητα.				

Πίνακας 32: Περίληψη ελέγχου Wilcoxon signed rank (για ένα δείγμα)

N	8
Στατιστικός έλεγχος	0
Τυπικό σφάλμα	7,1
Z	-2,5
P	0,012

**Εικόνα 178:** μη παραμετρικός έλεγχος διαμέσου για τον δείκτη «Συνδέσεις» (ομάδα Cavalieri)**Πίνακας 33:** τιμή γνωστικών δεικτών για κάθε μαθητή-τρια (ομάδα van Schooten)

	van Hiele	n	M	Γνώση Καταχώρησης	n	M
vS1	65	24	2,7	59	26	2,3
vS2	29	12	2,4	22	12	1,8
vS3	56	24	2,3	49	24	2
vS4	51	23	2,2	45	27	1,7
vS5	61	23	2,7	57	26	2,2
vS6	42	18	2,3	36	21	1,7
vS7	19	10	1,9	16	13	1,2
vS8	33	16	2,1	33	19	1,7
vS9	47	20	2,4	48	23	2,1
vS10	18	10	1,8	9	8	1,1

Πίνακας 34: τιμή δεικτών γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων για κάθε μαθητή-τρια (ομάδα van Schooten)

	<i>SOLO</i>	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>Επεξεργασίες</i>	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>Συνδέσεις</i>	<i>n</i>	<i>M</i>
<i>vS1</i>	91	25	3,6	44	26	1,7	37	21	1,8
<i>vS2</i>	41	12	3,4	19	12	1,6	17	12	1,4
<i>vS3</i>	81	23	3,5	36	24	1,5	37	23	1,6
<i>vS4</i>	90	27	3,3	40	27	1,5	41	25	1,6
<i>vS5</i>	98	28	3,5	46	28	1,6	51	27	1,9
<i>vS6</i>	63	20	3,2	32	21	1,5	32	19	1,7
<i>vS7</i>	34	13	2,6	15	13	1,15	15	13	1,2
<i>vS8</i>	61	18	3,4	28	19	1,5	28	18	1,6
<i>vS9</i>	63	22	2,9	37	23	1,6	40	21	1,9
<i>vS10</i>	29	10	2,9	10	10	1	10	10	1

Πίνακας 35: τιμή γνωστικών δεικτών για κάθε μαθητή-τρια (ομάδα Cavalieri)

	<i>van Hiele</i>	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>Γνώση Καταχώρησης</i>	<i>n</i>	<i>M.</i>
<i>C1</i>	33	19	1,7	28	23	1,2
<i>C2</i>	33	20	1,7	29	23	1,3
<i>C3</i>	35	20	1,8	29	23	1,3
<i>C4</i>	33	19	1,7	27	22	1,2
<i>C5</i>	32	17	1,9	33	20	1,7
<i>C6</i>	33	19	1,7	32	23	1,4
<i>C7</i>	38	18	2,1	32	21	1,5
<i>C8</i>	24	10	2,4	26	14	1,9

Πίνακας 36: τιμή δεικτών γνωστικής δομής μέσω δραστηριοτήτων για κάθε μαθητή-τρια (ομάδα Cavalieri)

	<i>SOLO</i>	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>Επεξεργασίες</i>	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>Συνδέσεις</i>	<i>n</i>	<i>M</i>
<i>C1</i>	61	24	2,5	36	28	1,3	29	28	1
<i>C2</i>	59	24	2,5	32	26	1,2	27	23	1,2
<i>C3</i>	69	26	2,7	35	28	1,3	32	28	1,1
<i>C4</i>	57	24	2,4	29	25	1,2	28	22	1,3
<i>C5</i>	62	22	2,8	34	25	1,4	31	20	1,6
<i>C6</i>	68	25	2,7	39	29	1,3	33	23	1,4
<i>C7</i>	68	23	3	41	28	1,5	33	21	1,6
<i>C8</i>	42	13	3,2	32	20	1,6	30	14	2,1

Πίνακας 37: Επαγωγική ανάλυση ομάδας «van Schooten»

	(van Hiele)	(Γνώση Καταχώρησης)	(SOLO)	(Συνδέσεις)	(Επεξεργασίες)
<i>N</i>	10	10	10	10	10
<i>M</i>	2,3	1,8	3,2	1,6	1,5
<i>δ</i>	2,3	1,8	3,4	1,6	1,5
<i>S</i>	0,3	0,4	0,3	0,3	0,2
<i>R</i>	0,9	1,1	1	0,9	0,7
<i>min</i>	1,8	1,1	2,6	1	1
<i>max</i>	2,7	2,3	3,6	1,9	1,7
<i>z</i>	-2,8	-2,8	-2,8	-2,8	-2,8
<i>p</i>	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005

Πίνακας 38: Επαγωγική ανάλυση ομάδας (Cavalieri)

	(van Hiele)	(Γνώση Καταχώρησης)	(SOLO)	(Συνδέσεις)	(Επεξεργασίες)
<i>N</i>	8	8	8	8	8
<i>M</i>	1,9	1,4	2,7	1,4	1,3
<i>δ</i>	1,7	1,3	2,7	1,4	1,3
<i>S</i>	0,3	0,2	0,3	0,4	0,1
<i>R</i>	0,8	0,6	0,9	1,1	0,4
<i>max</i>	1,7	1,2	2,4	1	1,1
<i>min</i>	2,4	1,9	3,2	2,1	1,6
<i>z</i>	-2,5	-2,5	-2,5	-2,4	-2,5
<i>P</i>	0,011	0,012	0,012	0,017	0,012

Πίνακας 39: μη παραμετρικός έλεγχος συσχέτισης δεικτών για την ομάδα van Schooten

		<i>van Hiele</i>	<i>Γνώση Καταχώρησης</i>
<i>Kendall's tau_b</i>	SOLO	Συντελεστής συσχέτισης	0,49*
		P(value)	0,048
	Επεξεργασίες	Συντελεστής συσχέτισης	0,94**
		P(value)	0,000
	Συνδέσεις	Συντελεστής συσχέτισης	0,58*
		P(value)	0,02

** . Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,01 (2-tailed).

* . Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,05 (2-tailed).

Πίνακας 40: μη παραμετρικός έλεγχος συσχέτισης δεικτών για την ομάδα Cavalieri

			<i>van Hiele</i>	<i>Γνώση Καταχώρησης</i>
Kendall's tau_b	SOLO	Συντελεστής συσχέτισης	0,79**	0,76**
		P(value)	0,007	0,009
	Επεξεργασίες	Συντελεστής συσχέτισης	0,72*	0,69*
		P(value)	0,016	0,018
	Συνδέσεις	Συντελεστής συσχέτισης	0,64*	0,76**
		P(value)	0,03	0,009
*. Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,05 (2-tailed).				
**. Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,01 (2-tailed).				