

1η ΟΜΑΔΑ

Θέμα 1ο

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω προτάσεις

(Α) $d(x, -1) \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-5, 1]$ Σ **A** (10μ)

Απάντηση

$$\begin{aligned}d(x, -1) \leq 3 &\Leftrightarrow |x - (-1)| \leq 3 \Leftrightarrow |x + 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -3 - 1 \leq x + 1 - 1 \leq 3 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-4, 2]\end{aligned}$$

(Β) $|\sqrt{4} - \sqrt{5}| - |-\sqrt{4} + \sqrt{5}| = 0$ Σ **A** (10μ)

Απάντηση

$$|\sqrt{4} - \sqrt{5}| - |-\sqrt{4} + \sqrt{5}| = |\sqrt{4} - \sqrt{5}| - |-(\sqrt{4} - \sqrt{5})| = |\sqrt{4} - \sqrt{5}| - |\sqrt{4} - \sqrt{5}| = 0$$

(Γ) $|a + \beta| = |a| + |\beta|$ μόνο στην περίπτωση ομόσημων αριθμών. Σ **A** (10μ)

(Δ) Για κάθε πραγματικό αριθμό β ισχύει η σχέση $-\beta \leq |\beta|$ Σ **A** (10μ)

Απάντηση

Έχουμε δείξει ότι για κάθε αριθμό β ισχύει ότι

$$-|\beta| \leq \beta \leq |\beta| \Rightarrow -|\beta| \leq \beta \Rightarrow (-1) \cdot (-|\beta|) \geq (-1) \cdot \beta \Rightarrow |\beta| \geq -\beta$$

(Ε) $\frac{|\alpha|}{|\beta|} = |\alpha : \beta|$ για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό Σ **A** (10μ)

Απάντηση

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = |\alpha : \beta|$$

Θέμα 2ο

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση: $\alpha < \beta < 0 < \gamma$.

Να απλοποιηθεί η παράσταση $|\alpha\beta\gamma| - |\gamma - \alpha| + |\beta - \alpha| + |\gamma - (\alpha - \beta)|$. (40 μ)

Απάντηση

$$\alpha < \beta < 0 < \gamma \Rightarrow \alpha\beta\gamma > 0 \Rightarrow |\alpha\beta\gamma| = \alpha\beta\gamma$$

$$\alpha < \beta < 0 < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma \Rightarrow \gamma > \alpha \Rightarrow \gamma - \alpha > 0 \Rightarrow |\gamma - \alpha| = (\gamma - \alpha)$$

$$\alpha < \beta < 0 < \gamma \Rightarrow \beta > \alpha \Rightarrow \beta - \alpha > 0 \Rightarrow |\beta - \alpha| = (\beta - \alpha)$$

$$\begin{aligned} \gamma - (\alpha - \beta) &= \text{θετικός} - (\text{αρνητικός}) = \text{θετικός} + \text{θετικός} = \text{θετικός} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\gamma - (\alpha - \beta)| &= (\gamma - (\alpha - \beta)) = \gamma - \alpha + \beta \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} |\alpha\beta\gamma| - |\gamma - \alpha| + |\beta - \alpha| + |\gamma - (\alpha - \beta)| &= \alpha\beta\gamma - (\gamma - \alpha) + (\beta - \alpha) + (\gamma - (\alpha - \beta)) = \\ &= \alpha\beta\gamma - \gamma + \alpha + \beta - \alpha + (\gamma - \alpha + \beta) = \alpha\beta\gamma - \gamma + \alpha + \beta - \alpha + \gamma - \alpha + \beta = \alpha\beta\gamma - \alpha + 2\beta \end{aligned}$$

Θέμα 3ο

Να γράψετε τους δύο ισοδύναμους ορισμούς της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού a . (10μ)

Απάντηση

$$|a| = \text{απόσταση}_\text{αριθμού}_\text{από}_\text{το}_\text{μηδέν}$$

$$|a| = \begin{cases} a, \text{όταν } a \geq 0 \\ -a, \text{όταν } a < 0 \end{cases}$$

2η ΟΜΑΔΑ

Θέμα 1ο

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω προτάσεις

(Α) $d(2x, -4) \leq 4 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$ Σ 1 (10μ)

Απάντηση

$$\begin{aligned}d(2x, -4) \leq 4 &\Leftrightarrow |2x - (-4)| \leq 4 \Leftrightarrow |2x + 4| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 2x + 4 \leq 4 \Leftrightarrow -4 - 4 \leq 2x + 4 - 4 \leq 4 - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -8 \leq 2x \leq 0 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-8, 0]\end{aligned}$$

(Β) $|\sqrt{6} - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} - \sqrt{6}| = 0$ Σ 1 (10μ)

Απάντηση

$$\begin{aligned}|\sqrt{6} - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} - \sqrt{6}| &= |\sqrt{6} - \sqrt{5}| - |-(\sqrt{5} - \sqrt{6})| = |\sqrt{6} - \sqrt{5}| - |-(\sqrt{6} - \sqrt{5})| = \\ &= |\sqrt{6} - \sqrt{5}| - |\sqrt{6} - \sqrt{5}| = 0\end{aligned}$$

(Γ) $|a + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ μόνο στην περίπτωση ετερόσημων αριθμών. Σ 1 (10μ)

(Δ) Για κάθε πραγματικό αριθμό β ισχύει η σχέση $\beta \leq |\beta|$ Σ 1 (10μ)

Απάντηση

Έχουμε δείξει ότι για κάθε αριθμό β ισχύει ότι $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta| \Rightarrow \beta \leq |\beta|$

(Ε) $\frac{|\alpha|}{|\beta|} > |\alpha : \beta|$ για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό Σ 1 (10μ)

Απάντηση

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = |\alpha : \beta|$$

Θέμα 2ο

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση : $\alpha < \beta < 0 < \gamma$.

Να απλοποιηθεί η παράσταση $|\alpha\beta\gamma| - |\alpha - \gamma| + |\beta - \gamma| + |\gamma - (\alpha - \beta)|$. (40 μ)

Απάντηση

$$\alpha < \beta < 0 < \gamma \Rightarrow \alpha\beta\gamma > 0 \Rightarrow |\alpha\beta\gamma| = \alpha\beta\gamma$$

$$\alpha < \beta < 0 < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma \Rightarrow \alpha - \gamma < 0 \Rightarrow |\alpha - \gamma| = -(\alpha - \gamma) = -\alpha + \gamma = \gamma - \alpha = (\gamma - \alpha)$$

$$\alpha < \beta < 0 < \gamma \Rightarrow \beta < \gamma \Rightarrow \beta - \gamma < 0 \Rightarrow |\beta - \gamma| = -(\beta - \gamma) = -\beta + \gamma = \gamma - \beta = (\gamma - \beta)$$

$$\begin{aligned} \gamma - (\alpha - \beta) &= \text{θετικός} - (\text{αρνητικός}) = \text{θετικός} + \text{θετικός} = \text{θετικός} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\gamma - (\alpha - \beta)| &= (\gamma - (\alpha - \beta)) = \gamma - \alpha + \beta \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} |\alpha\beta\gamma| - |\alpha - \gamma| + |\beta - \gamma| + |\gamma - (\alpha - \beta)| &= \alpha\beta\gamma - (\gamma - \alpha) + (\gamma - \beta) + (\gamma - (\alpha - \beta)) = \\ &= \alpha\beta\gamma - \gamma + \alpha + \gamma - \beta + (\gamma - \alpha + \beta) = \alpha\beta\gamma - \gamma + \alpha + \gamma - \beta + \gamma - \alpha + \beta = \alpha\beta\gamma + \gamma = \gamma(\alpha\beta + 1) \end{aligned}$$

Θέμα 3ο

Να γράψετε 3 ιδιότητες της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού.

(10μ)

Απάντηση

α) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

δ) $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$

β) $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

ε) $|\beta| = |\gamma| \Leftrightarrow \beta = \gamma, \acute{\eta}, \beta = -\gamma$

γ) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

στ) $|\beta| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq \beta \leq \theta$

ζ) $|\beta| \geq \theta \Leftrightarrow \beta \geq \theta, \acute{\eta}, \beta \leq -\theta, (\theta = \text{θετικός})$

-

