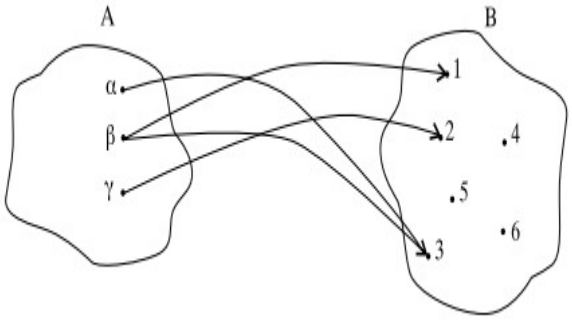
ΘΕΜΑ 1ο

(Α) Να χαρακτηρίσετε με τις λέξεις ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω πέντε προτάσεις μεταφέροντας τις απαντήσεις σας στο γραπτό σας.

(Α1) Το παρακάτω σχήμα παριστάνει "συνάρτηση". Σ Λ (3μ)



(Α2) Εάν $x < 0$, τότε ισχύει : $|-x| = |x| = -x$ Σ Λ (3μ)

(Α3) Εάν ο αριθμός α είναι μη αρνητικός και ν = φυσικός αριθμός , τότε η $\sqrt[\nu]{a}$ αποτελεί την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu} = a$ Σ Λ (3μ)

(Α4) Η γωνία της ευθείας $y = \alpha \cdot x + \beta$ με $a > 0$, είναι αμβλεία. Σ Λ (3μ)

(Α5) Αν **α,β,γ** είναι πραγματικοί αριθμοί και $a \neq 0$ και η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες αντίθετες, τότε είναι **β = 0** . Σ Λ (3μ)

(Β) Να αποδείξετε ότι για πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει πάντοτε η σχέση

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \quad \text{,όπου} \quad \nu \in \mathrm{N} - \{0,1\}$$ (10μ)

(σχολικό βιβλίο σελ. 71)

ΘΕΜΑ 2ο

α) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{2\cdot|x-2|-3}{4}-\dfrac{2-|x-2|}{3}<1-3\cdot|x-2|$. (10μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\frac{2\cdot|x-2|-3}{4}-\frac{2-|x-2|}{3}<1-3\cdot|x-2| \Leftrightarrow 12\frac{2|x-2|-3}{4}-12\frac{2-|x-2|}{3}<12-36|x-2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot[2|x-2|-3]-4\cdot[2-|x-2|<12-36|x-2| \Leftrightarrow 6|x-2|-9-8+4|x-2|<12-36|x-2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10|x-2|+36|x-2|<12+9+8 \Leftrightarrow 46|x-2|<29 \Leftrightarrow |x-2|<\frac{29}{46} \Leftrightarrow -\frac{29}{46}<x-2<\frac{29}{46} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{29}{46}+2<x-2+2<\frac{29}{46}+2 \Leftrightarrow \frac{63}{46}<x<\frac{121}{46}$$

β) Να λυθεί η εξίσωση $x^2-7x+6=0$ (10μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$\Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot6=49-24=25>0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\dfrac{7\pm5}{2}$. **Επομένως** $x_1=1,\&,x_2=6$

γ) Να ελέγξετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις της ανίσωσης. (5μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επειδή οι λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι αριθμοί που εμπεριέχονται στο ανοιχτό διάστημα $\left(\dfrac{63}{46},\dfrac{121}{46}\right)=(1{,}36..,2{,}63..)$ **καμμία λύση της εξίσωσης δεν βρίσκεται σε αυτό το διάστημα και επομένως καμμία λύση της εξίσωσης δεν είναι λύση της ανίσωσης.**

ΘΕΜΑ 3ο

Εάν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+2x-7=0$, να βρείτε δευτεροβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις οι οποίες έχουν ως ρίζες τα παρακάτω ζεύγη αριθμών:

α) x_1+2, x_2+2 (6μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : Από την μέθοδο VIETA , το άθροισμα των ριζών της αρχικής εξίσωσης $S=x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$ **και το γινόμενό τους** $P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-7}{1}=-7$ **. Επομένως στην (α) περίπτωση το αντίστοιχο** $S=\rho_1+\rho_2=(x_1+2)+(x_2+2)=(x_1+x_2)+4=-2+4=2$ **και το αντίστοιχο** $P=\rho_1\cdot\rho_2=(x_1+2)\cdot(x_2+2)=...=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=-7+2(-2)+4=-7$ **. Επομένως μία δευτεροβάθμια εξίσωση η οποία τις έχει ως ρίζες είναι η** $x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-2x-7=0$ **.**

β) $-2x_1, -2x_2$ (6μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : Από την μέθοδο VIETA , το άθροισμα των ριζών της αρχικής εξίσωσης $S=x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$ **και το γινόμενό τους** $P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-7}{1}=-7$ **. Επομένως στην (β) περίπτωση το αντίστοιχο** $S=\rho_1+\rho_2=(-2x_1)+(-2x_2)=-2(x_1+x_2)=-2\cdot(-2)=4$ **και το αντίστοιχο** $P=\rho_1\cdot\rho_2=(-2x_1)\cdot(-2x_2)=4x_1x_2=4\cdot(-7)=-28$ **. Επομένως μία δευτεροβάθμια εξίσωση η οποία τις έχει ως ρίζες είναι η** $x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-4x+(-28)=0\Leftrightarrow x^2-4x-28=0$ **.**

γ) $\lambda x_1, \lambda x_2$ (6μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : Από την μέθοδο VIETA , το άθροισμα των ριζών της αρχικής εξίσωσης $S=x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$ **και το γινόμενό τους** $P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-7}{1}=-7$ **. Επομένως στην (γ) περίπτωση το αντίστοιχο** $S=\rho_1+\rho_2=(\lambda x_1)+(\lambda x_2)=\lambda(x_1+x_2)=\lambda\cdot(-2)=-2\lambda$ **και το αντίστοιχο** $P=\rho_1\cdot\rho_2=(\lambda x_1)\cdot(\lambda x_2)=\lambda^2x_1x_2=\lambda^2\cdot(-7)=-7\lambda^2$ **. Επομένως μία δευτεροβάθμια εξίσωση η οποία τις έχει ως ρίζες είναι η** $x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-(-2\lambda)x+(-7\lambda^2)=0\Leftrightarrow x^2+2\lambda x-7\lambda^2=0$ **.**

δ) $x_1\cdot x_2^2, x_2\cdot x_1^2$ (7μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ : Από την μέθοδο VIETA , το άθροισμα των ριζών της αρχικής εξίσωσης $S=x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$ **και το γινόμενό τους** $P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-7}{1}=-7$ **. Επομένως στην (γ) περίπτωση το αντίστοιχο** $S=\rho_1+\rho_2=x_1x_2^2+x_2x_1^2=x_1x_2(x_2+x_1)=(-7)\cdot(-2)=14$ **και το αντίστοιχο** $P=\rho_1\cdot\rho_2=(x_1x_2^2)\cdot(x_2x_1^2)=x_1^3x_2^3=(x_1x_2)^3=(-7)^3=-343$ **. Επομένως μία δευτεροβάθμια εξίσωση η οποία τις έχει ως ρίζες είναι η** $x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-14x+(-343)=0\Leftrightarrow x^2-14x-343=0$ **.**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+\mu|x|-\mu-1}{|x|-6}$ όπου $\mu\in R$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. (4μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πρέπει $|x|-6\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 6 \Leftrightarrow x\neq \pm 6 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-6)\cup(-6,+6)\cup(+6,+\infty)$

β) Εάν $f(-2)=1$, τότε να βρεθεί ο αριθμός μ. (4μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$f(-2)=\frac{(-2)^2+\mu|-2|-\mu-1}{|-2|-6}=\frac{4+2\mu-\mu-1}{2-6}=\frac{3+\mu}{-4}=1\Leftrightarrow 3+\mu=-4\Leftrightarrow \mu=-7$$

γ) Εάν $\mu=-7$ τότε να δειχθεί ότι ο τύπος της συνάρτησης παίρνει την μορφή

$$f(x)=|x|-1$$ (4μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επομένως $f(x)=\dfrac{x^2+\mu|x|-\mu-1}{|x|-6}=\dfrac{x^2-7|x|-(-7)-1}{|x|-6}=\dfrac{|x|^2-7|x|+6}{|x|-6}$ **. Θέτοντας** $w=|x|$

ο αριθμητής γίνεται: $w^2-7w+6=.....=(w-1)(w-6)=(|x|-1)(|x|-6)$ **και επομένως ο τύπος της συνάρτησης γίνεται**

$$f(x)=\frac{x^2+\mu|x|-\mu-1}{|x|-6}=\frac{x^2-7|x|-(-7)-1}{|x|-6}=\frac{|x|^2-7|x|+6}{|x|-6}=\frac{(|x|-1)(|x|-6)}{(|x|-6)}=|x|-1.$$

δ)Εάν $f(x)=|x|-1$ να βρεθούν τα σημεία του Καρτεσιανού επιπέδου όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
(4μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να βρούμε σε ποιό σημείο τέμνει τον άξονα x' x , θέτω στον τύπο της συνάρτησης
$y=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow |x|-1=0\Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow x=\pm 1$ **και επομένως προκύπτουν τα σημεία**

Α(-1,0) και Β(1,0).

Για να βρούμε σε ποιό σημείο τέμνει τον άξονα y' y , θέτω στον τύπο της συνάρτησης
$x=0\Leftrightarrow f(0)=|0|-1\Leftrightarrow f(0)=-1$ **και επομένως προκύπτει το σημείο Γ(0,f(0))=(0,-1)**

ε) Έάν $f(x)=|x|-1$ να τοποθετήσετε στον τύπο της συνάρτησης f όπου $\boldsymbol{x}$ την ποσότητα $w-2$. Να υπολογισθεί ο τύπος και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(w-2)$. (4μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε βρει ήδη πως στη συνάρτηση f έχουμε τύπο $f(x)=|x|-1$ **και πεδίο ορισμού** $x\in(-\infty,-6)\cup(-6,+6)\cup(+6,+\infty)$. **Άρα** $f(w-2)=|w-2|-1$ **και** $x\neq\pm6 \Leftrightarrow w-2\neq\pm6 \Leftrightarrow w\neq\pm6+2 \Leftrightarrow w\neq 8,\&, w\neq -4$ **ή ισοδύναμα** $w\in(-\infty,-4)\cup(-4,+8)\cup(+8,+\infty)$

στ) Να λυθεί η ανίσωση $f(w-2)\leq 0$ (5μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$f(w-2)\leq 0 \Leftrightarrow |w-2|-1\leq 0 \Leftrightarrow |w-2|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq w-2\leq 1 \Leftrightarrow -1+2\leq w-2+2\leq 1+2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1\leq w\leq 3$

Δεχόμαστε όλους τους αριθμούς του διαστήματος (1,3) ως λύσεις της ανίσωσης, διότι βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της $f(w-2)$