ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ στα Θέματα ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ Εξετάσεων Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ στην ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

(Α) *Να χαρακτηρίσετε με τις λέξεις ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω πέντε προτάσεις μεταφέροντας τις απαντήσεις σας στο γραπτό σας.*

(Α1) *Σε έναν κύκλο όταν δύο χορδές του έχουν ίσα αποστήματα, τότε είναι ίσες .*

Σ *- Λ (3μ)*

(Α2) *Δύο ορθογώνια τρίγωνα τα οποία έχουν από μία κάθετη πλευρά ίση και από μία οξεία γωνία ίση, τότε τα τρίγωνα αυτά ισούνται.* *Σ -* ***Λ*** *3μ)*

(Α3) *Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου ισούται με 180°.*

Σ - ***Λ*** *(3μ)*

(Α4) *Εάν σε τυχαίο κυρτό τετράπλευρο , οι διαδοχικές του γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε είναι παραλληλόγραμμο.* ***Σ*** *- Λ (3μ)*

(Α5) *Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του, είναι τετράγωνο.*

Σ *- Λ (3μ)*

(Β)

Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι και μεσοκάθετος της κοινής χορδής αυτών των κύκλων. *(10μ)*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

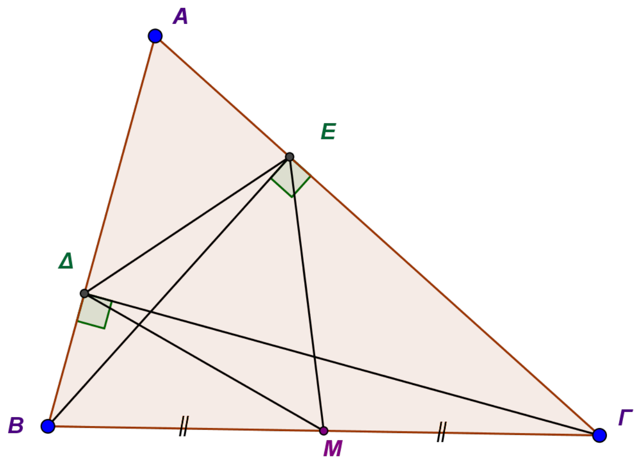
Σχολικό Βιβλίο σελ. 70.

ΘΕΜΑ 2ο

Σε τυχαίο οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Στη συνέχεια ονομάζω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ , και φτιάχνω το τρίγωνο ΜΔΕ.

(α) Να αποδείξετε πως το ΜΔΕ είναι ισοσκελές τρίγωνο. *(15μ)*

(β) Ποιά σημεία στο συγκεκριμένο σχήμα βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.
Ποιός είναι ο κύκλος, το κέντρο του και η ακτίνα του.
Να σχεδιάσετε τον συγκεκριμένο κύκλο *(10μ)*



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

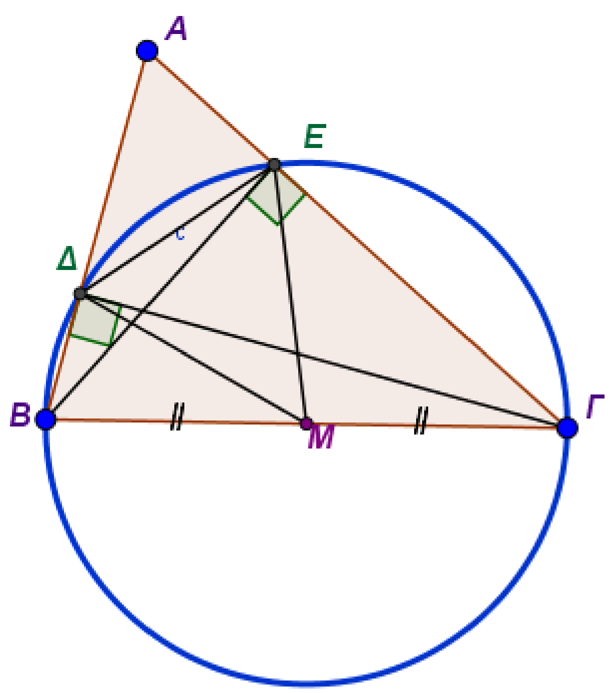
(α)

ΔΜ=διάμεσος προς την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ. Άρα $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$ *.(1)*

ΕΜ=διάμεσος προς την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ.
Άρα $EM = \frac{B\Gamma}{2}$ *.(2)*

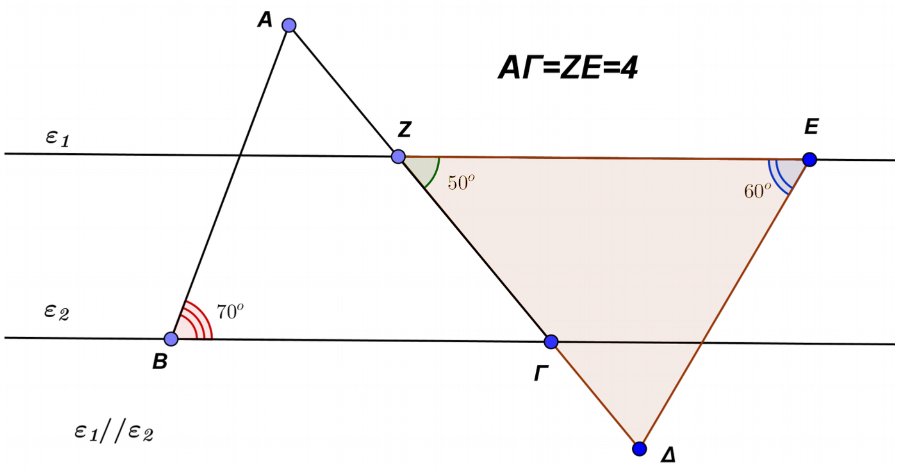
Από (1) & (2) προκύπτει πως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ.

(β)



ΘΕΜΑ 3ο

*Έχουμε δύο **παράλληλες ευθείες** ε_1 και ε_2 , καθώς και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ , όπως βλέπετε στο διπλανό σχήμα.*
Επίσης η γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 70^o, καθώς επίσης και οι γωνίες Ε και Ζ του τριγώνου ΔΕΖ ισούνται με 60^o και 50^o αντιστοίχως.
Τέλος , έχουμε : ΑΓ=ΖΕ=4



(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα. (15μ)

(β) Να βρείτε τα υπόλοιπα ίσα πρωτεύοντα στοιχεία τους. (5μ)

(γ) Να ελέγξετε εάν είναι παράλληλες οι πλευρές ΑΒ και ΔΕ. (5μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

$\text{τρίγωνο}\mathrm{AB\Gamma} \Rightarrow \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = 50^o$ *ως ΕΝΤΟΣ και ΕΝΑΛΛΑΞ ($\varepsilon_1//\varepsilon_2$ και ΑΔ τέμνουσα).* *(1)*

$$\text{τρίγωνο}\mathrm{AB\Gamma} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} = 180^o - \hat{\mathrm{B}} - \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o \quad (2)$$

$$\text{τρίγωνο}\,\mathrm{ZE\Delta} \Rightarrow \hat{\Delta} = 180^o - 50^o - 60^o = 70^o \quad (3)$$

Τελικά, Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ ισούνται επειδή:

$\alpha)\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{ZE} = 4$

$\beta)\,\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{E}} = 60^o$ *(Γ-Π-Γ).*

$\gamma)\,\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{Z}} = 50^o$

(β) *Γνωρίζουμε την **βασική πρόταση** πως “σε ΙΣΑ τρίγωνα, απέναντι από ΙΣΕΣ πλευρές βρίσκονται ΙΣΕΣ γωνίες και απέναντι από ΙΣΕΣ γωνίες βρίσκονται ΙΣΕΣ πλευρές.”*

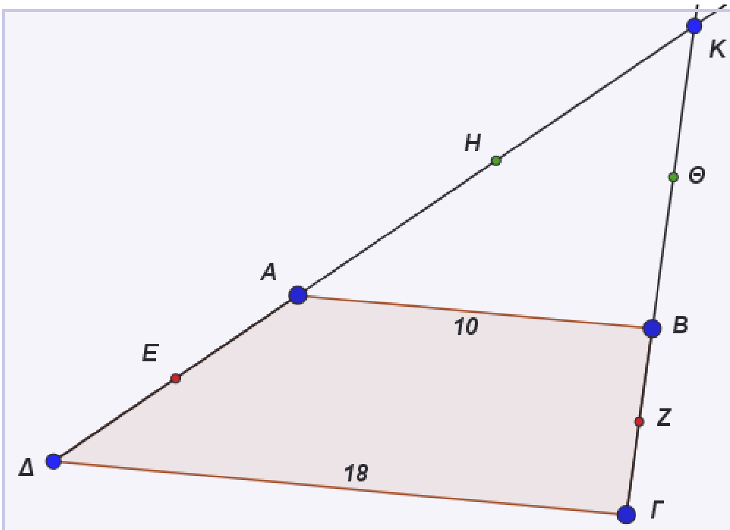
Επομένως για τα προηγούμενα ίσα τρίγωνα :

$$\hat{B} = \hat{\Delta}(ή\tau\alpha\nu\ \_\ \gamma\nu\omega\sigma\tau ό)$$
$$B\Gamma = Z\Delta$$
$$AB = \Delta E$$

(γ) *Έστω ΑΒ//ΔΕ. Ισχύει επίσης (δεδομένο) πως $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Τότε οι γωνίες* $\hat{B} = \hat{E}$ *ως οξείες γωνίες με παράλληλες πλευρές ......ΑΤΟΠΟ, διότι* $\hat{B} = 70^o \neq 60^o = \hat{E}$

ΘΕΜΑ 4ο

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ = η μικρή βάση του) φέρουμε την διάμεσο (του τραπεζίου) ΕΖ. Στη συνέχεια προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του,οι οποίες τέμνονται στο σημείο Κ. Στη συνέχεια , στο τρίγωνο ΚΑΒ , ονομάζουμε Η και Θ τα μέσα των πλευρών ΚΑ και ΚΒ αντιστοίχως.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΗΘΖΕ είναι επίσης τραπέζιο. (5μ)

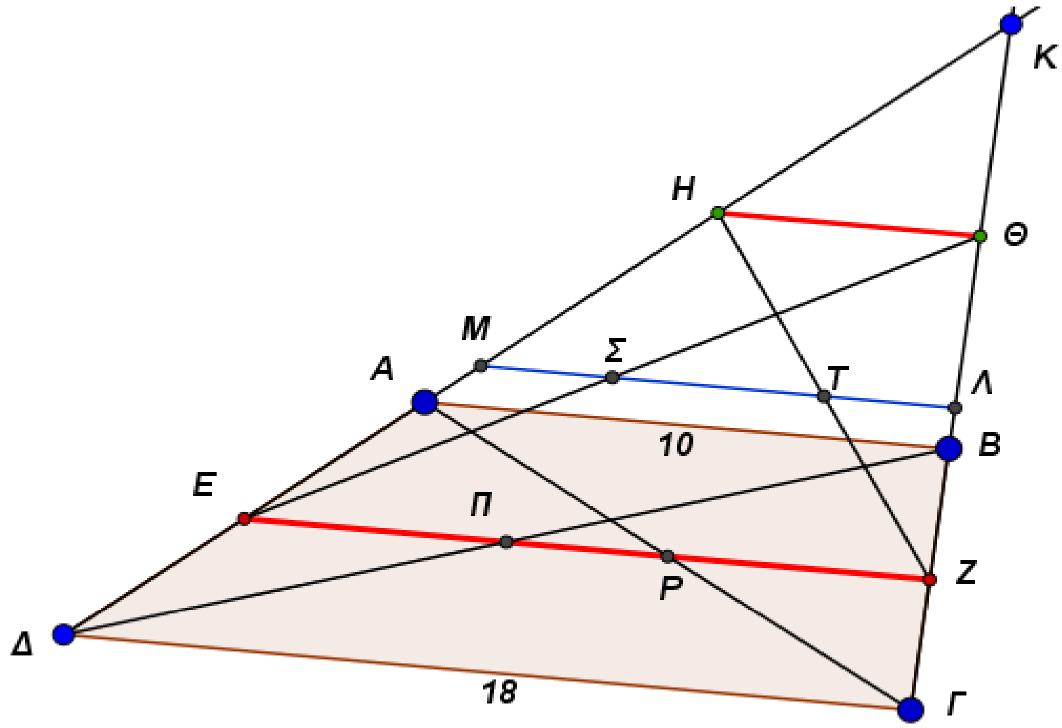
β) Εάν ΑΒ=10 και ΔΓ=18, πόσο είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ; (5μ)

γ) Πόσο είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΗΘΖΕ; (5μ)

δ) Εάν φέρετε τις διαγωνίους του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε η διάμεσός του σε πόσα τμήματα χωρίζεται και τι μήκος έχει το κάθε τμήμα; (5μ)

ε) Εάν φέρετε τις διαγωνίους του τραπεζίου ΗΘΖΕ , τότε η διάμεσός του σε πόσα τμήματα χωρίζεται και τι μήκος έχει το κάθε τμήμα; (5μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:



(α)

Στο τρίγωνο ΚΑΒ , το ΗΘ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΚΑ και ΚΒ. Άρα ***ΗΘ=ΑΒ/2=10/2=5*** *και ΗΘ//ΑΒ.*

Επίσης στο ΤΡΑΠΕΖΙΟ ΑΒΓΔ, η διάμεσος ΕΖ είναι παράλληλη με τις βάσεις του, και ισούται με το ημιάθροισμά τους (από το ΘΕΩΡΗΜΑ 1/σελ 117). Άρα ΕΖ//ΑΒ//ΔΓ &
ΕΖ=(18+10)/2=14.

ΤΕΛΙΚΑ αφού ΗΘ//ΑΒ & ΕΖ//ΑΒ τότε ΗΘ//ΕΖ .
Επίσης ΕΗ,ΖΘ μη παράλληλες.
Άρα το ΗΘΖΕ=τραπέζιο.

(β)

Απαντήθηκε στο (α)

(γ)

Παίρνω το Μ=μέσον του ΗΕ και Λ=μέσον του ΘΖ. Άρα ΜΛ=διάμεσος του τραπεζίου ΗΘΖΕ.
Άρα θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων ΗΘ και ΕΖ.
Άρα ***ΜΛ=(ΗΘ+ΕΖ)/2=(5+14)/2=9,5***

(δ)

Επειδή η διάμεσος του οποιουδήποτε τραπεζίου, διχοτομεί τις διαγωνίους του (από το Θεώρημα της "ΧΤΕΝΑΣ"), τότε πρέπει η διάμεσος του τραπεζίου να χωρίζεται από τις διαγωνίους σε 3 τμήματα.
Στην περίπτωση που η διάμεσος χωριζόταν σε 2 τμήματα, θα έπρεπε οι διαγώνιοι να συναντιόντουσαν πάνω στην διάμεσο....άρα θα εδιχοτομούντο στο σημείο συνάντησής τους...άρα θα είχαμε παραλληλόγραμμο....ΑΤΟΠΟ. (βλέπε και το σχήμα)

Στο τρίγωνο ΔΑΒ, τα σημεία Ε,Π είναι μέσα των ΔΑ και ΔΒ αντίστοιχα...άρα ***ΕΠ=ΑΒ/2=5***
Στο τρίγωνο ΓΑΒ, τα σημεία Ζ,Ρ είναι μέσα των ΓΒ και ΓΑ αντίστοιχα...άρα ***ΖΡ=ΑΒ/2=5.***

Επίσης, ***ΠΡ=ΕΖ-ΕΠ-ΖΡ=14-5-5=4***

(ε)
Ομοίως στο τραπέζιο ΗΘΖΕ, η διάμεσός του ΜΛ χωρίζεται σε 3 τμήματα.

Στο τρίγωνο ΕΘΗ , τα σημεία Μ,Σ είναι μέσα των ΕΗ και ΕΘ αντίστοιχα...άρα ***ΜΣ=ΗΘ/2=2,5***
Στο τρίγωνο ΖΘΗ, τα σημεία Λ,Τ είναι μέσα των ΖΘ και ΖΗ αντίστοιχα...άρα ***ΛΤ=ΗΘ/2=2,5.***
Επίσης, ΣΤ=ΜΛ - ΜΣ – ΛΤ=9,5 – 2,5 – 2,5 = 4,5.

Συγχαρητήρια σε όσους προσπάθησαν για την ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και την "σκέψη" τους...

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ , καλή ξεκούραση, και στο επανιδείν....